ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Anno Accademico *2009/2010*

Facoltà *Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali*

Corsi di Laurea o di Diploma **Laurea Magistrale in Matematica**

Insegnamento **Metodi geometrici per le applicazioni (II semestre)**

Docente titolare del corso prof. Mirella Manaresi

Altri docenti partecipanti (modulo)

Data inizio Lezioni *23 febbraio 2010*

Data fine Lezioni *11 maggio 2010*

Da consegnare al docente tramite la Presidenza della Facoltà di appartenenza entro il 31 ottobre e da riconsegnare improrogabilmente al Preside della medesima Facoltà entro 15 gg. dal termine delle lezioni.

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***23 febbraio 2010***

Richiami su varieta' topologiche e varietá topologiche con bordo e sulle loro proprietá elementari. Il bordo di una varietá con bordo di dimensione n é una varietá senza bordo di dimensione $n-1$, il bordo di una varieá compatta é compatto; le componenti connesse del bordo di una varietá compatta sono in numero finito. La sfera S^2 come quoziente dell'unione di due dischi disgiunti modulo l'identificazione dei bordi.

Ore 1 (10-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***24 febbraio 2010***

Il toro bidimensionale come superficie di rotazione, come quoziente di un quadrato e come quoziente di R^2 modulo l'azione del gruppo $Z \times Z$.
Modelli topologici del piano proiettivo, del nastro di Moebius e della bottiglia di Klein.
La striscia di Moebius con bordo.
Ogni varietá topologica connessa compatta di dimensione 1 é omeomorfa a S^1.
Superficie con bordo ottenuta bucando k volte una superficie senza bordo. Superficie senza bordo ottenuta da una superficie con bordo S saldando un disco chiuso ad ogni componente connessa del bordo.
Due superficie compatte connesse S_1, S_2 con lo stesso numero di componenti connesse di bordo sono omeomorfe se e solo se sono omeomorfe le superficie senza bordo $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$ ottenute da S_1, S_2 saldando un disco chiuso ad ogni componente connessa del bordo.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***25 febbraio 2010***

Triangolazioni di una superficie compatta: proprietá ed esempi. Triangoli orientati concordemente, triangolazioni orientabili. Superficie orientabili e non orientabili. Somma connessa di superficie: proprietá ed esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VIII piano***

Data ***2 marzo 2010***

Caratteristica di Eulero di una superficie topologica compatta, con o senza bordo.
Invarianza topologica della caratteristica di Eulero e calcolo di tale invariante per la sfera, il nostro di Moebius, il piano proiettivo, la bottiglia di Klein, il toro, la somma connessa di tori e la somma connessa di piani proiettivi.
Lemmi preparatori al teorema di classificazione delle superficie topologiche compatte.

Ore 1 (10-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***3 marzo 2010***

Ogni superficie topologica compatta senza bordo é omeomorfa allo spazio quoziente ottenuto da un poligono identificando opportunamente a coppie i suoi lati. Riduzione di tale poligono a forma canonica. Ogni superficie compatta connessa orientabile senza bordo é omeomorfa a una sfera o a una somma connessa di tori. Ogni superficie compatta connessa non orientabile senza bordo é omeomorfa a una somma connessa di piani proiettivi. Condizione necessaria e sufficiente affinché due superficie topologiche compatte, connesse senza bordo siano omeomorfe é che siano entrambe orientabili o non orientabili e abbiano la stessa caratteristica di Eulero.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***4 marzo 2010***

Due superficie topologiche compatte, connesse e con bordo sono omeomorfe se e solo se sono entrambe orientabili o non orientabili, hanno la stessa caratteristica di Eulero e hanno lo stesso numero di componenti connesse di bordo. Modelli topologici di superficie compatte, connesse con bordo ottenute attaccando manici a un disco chiuso.
Esercizi sulla somma connessa di superficie e sulle superficie assegnate assegnando i triangoli di una triangolazione.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VIII piano***

Data ***9 marzo 2010***

Introduzione allo studio delle geodetiche partendo dalle proprietá delle rette del piano euclideo. Derivata covariante in un punto e secondo un vettore dato di un campo di vettori definito su un aperto di una superficie. Espressione della derivata covariante in coordinate locali. Derivata covariante di un campo di vettori definito lungo una curva.

Ore 1 (10-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzlielá***

Data ***10 marzo 2010***

Campi di vettori paralleli. Esempi. Il prodotto scalare di due campi di vettori paralleli é costante. Esistenza e unicitá del campo di vettori parallelo lungo una curva di cui é assegnato il valore in un punto. Trasporto parallelo e alcune sue proprieá. Curve regolari a tratti. Definizione di geodetica. La proprietá di essere geodetica dipende sia dal supporto sia dalla parametrizzazione della curva. Se per una curva regolare esiste una parametrizzazione rispetto a cui la curva e' geodetica, allora é una geodetica se parametrizzata secondo la lunghezza d'arco. Geodetiche sulla sfera e su un cilindro circolare retto.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***11 marzo 2010***

Calcolo dei simboli di Cristoffel e delle equazioni differenziali delle geodetiche per una superficie di rotazione. I meridiani sono geodetiche, i paralleli sono geodetiche se e solo se sono descritti dalla rotazione di un punto in cui la tangente al meridiano é parallela all'asse di rotazione. Relazione di Clairaut. Geodetiche di un semicono privato del vertice e del toro.
Esercizi per mostrare che la nozione di geodetica dipende sia dal supporto della curva sia dalla parametrizzazione. Legame tra parametrizzazioni rispetto alle quali una curva é una geodetica.
Curvatura geodetica di una curva regolare orientata su una superficie orientata.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VIII piano***

Data ***16 marzo 2010***

Legame tra curvatura geodetica e curvatura di una curva regolare orientata. Determinazione dell'angolo tra due campi di vettori unitari lungo una curva. La curvatura geodetica come variazione dell'angolo tra il versore tangente alla curva regolare e una direzione parallela lungo la curva. Espressione del valore algebrico della derivata covariante di un campo di vettori in coordinate locali.

Ore 1 (10-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***17 marzo 2010***

Dimostrazione dell'esistenza e unicitá del trasporto parallelo lungo una curva. Formula di Liouville per la curvatura geodetica. Angoli esterni ai vertici di una curva semplice, chiusa, regolare a tratti. Teorema delle tangenti.
Regioni semplici su una superficie e orientamento positivo del bordo. Integrale di una funzione differenziabile su una regione semplice. Enunciato del teorema di Gauss Bonnet locale.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***18 marzo 2010***

Dimostrazione del teorema di Gauss-Bonnet locale.
Regione regolare su una superficie. Ogni regione regolare su una superficie orientata ammette una triangolazione orientata tale che ogni triangolo é contenuto in un intorno coordinato di una famiglia di intorni coordinati che ricoprono S e sono compatibili con l'orientazione di S. La caratteristica di Eulero della regione non dipende dalla scelta della triangolazione.
Teorema di Gauss -Bonnet globale e alcuni suoi corollari. L'integrale della curvatura gaussiana di una superficie compatta orientabile é $2\pi\chi(S)$ dove $\chi(S)$ é la caratteristica di Eulero di S. Una superficie compatta di curvatura positiva é omeomorfa a una sfera.
Geodetiche su una superficie orientabile di curvatura gaussiana $K \leq 0$.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VIII piano***

Data ***23 marzo 2010***

Se S é una superficie omeomorfa a un cilindro con curvatura gaussiana $K < 0$, allora S ha al piú una geodetica semplice chiusa.
Se su una superficie compatta e connessa di curvatura gaussiana positiva esistono due geodetiche semplici chiuse, allora queste si intersecano.
Utilizzo del teorema di Gauss-Bonnet per il calcolo dell'area della superficie sferica.

Ore 1 (10-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***24 marzo 2010***

Area di poligoni geodetici su superficie a curvatura costante. Somma degli angoli di un triangolo geodetico. Eccesso di un triangolo geodetico e V postulato di Euclide.
Indice di un campo di vettori su una supeficie. Indipendenza dell'indice dalla scelta della curva e del sistema di coordinate attraverso cui lo si calcola. Teorema dell'indice di Poincaré.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***25 marzo 2010***

Calcolo dell'indice e delle curve integrali di alcuni campi di vettori.
La mappa esponenziale per una superficie regolare e sue proprietá. Intorni normali. Coordinate normali e coordinate geodetiche polari. Prima forma fondamentale in coordinate normali.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VIII piano***

Data ***30 marzo 2010***

Espressione dei coeffficienti della prima forma fondamentale di una superficie in coordinate geodetiche polari. Calcolo di tali coefficienti nel caso di superficie a curvatura costante. Teorema di Minding (due superficie regolari con la stessa curvatura gaussiana costante sono localmente isometriche).

Ore 1 (10-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***31 marzo 2010***

Geodetiche uscenti da un punto su una superficie a curvatura negativa o positiva, ma non costante.
Proprietá di minimo locale per le geodetiche. Geodetiche minimali.
Esistenza di intorni convessi (senza dimostrazione). Superficie complete e superficie non estendibili. Teorema di Hopf-Rinow (senza dimostrazione): dati due punti su una superficie completa esiste sempre una geodetica minimale che li congiunge.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***7 aprile 2010***

Una superficie regolare compatta $\subset R^3$ *ha almeno un punto ellittico. Punti ombelicali di una superficie regolare di* R^3*. Se tutti i punti di una superficie connessa* S *sono ombelicali, allora* S *é contenuta in un piano o in una sfera.*
Teorema di Liebmann: ogni superficie $S \subset R^3$ *regolare, connessa e compatta, con curvatura Gaussiana costante* K *é una sfera. L'ipotesi della compattezza é essenziale.*
Un ovaloide con curvatura media costante é una sfera. Rigiditá della sfera.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***8 aprile 2010***

Una coppia di punti di una superficie regolare connessa puo' sempre essere unita da una curva regolare a tratti. Distanza intrinseca ad una superficie.
Teorema di Bonnet: ogni superficie completa $S \subset R^3$ *con curvatura gaussiana* $K \geq \delta > 0$ *é compatta.*
Rivestimenti topologici: definizione e prime proprietá. Esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VIII piano***

Data ***13 aprile 2010***

Ogni rivestimento e' un omeomorfismo locale, ma non vale il viceversa. Se $\pi : \tilde{X} \to X$ *é un omeomorfismo locale,* $\tilde{X}$ *é compatto,* X *é di Hausdorff e connesso, allora* π *é un rivestimento.*
Sollevamento di cammini. I rivestimenti hanno la proprietá di sollevamento dei cammini; unicitá del sollevamento di un cammino con punto iniziale fissato.
Omotopia di cammini con estremi fissi. Proprietá di sollevamento dell'omotopia.

Ore 1 (10-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***14 aprile 2010***

Se lo spazio di base di un rivestimento é connesso per archi tutte le fibre hanno la stessa cardinalitá. Numero dei fogli di un rivestimento finito.
Omotopia di cammini con estremi fissi. Sollevamento dell'omotopia. Se un omeomorfismo locale ha la proprietá di sollevamento dei cammini, allora i sollevamenti di due cammini omotopi con estremi fissi a partire da un punto fissato sono due cammini omotopi.
Spazi topologici semplicemente connessi.
Se $\pi : \tilde{X} \to X$ é un omeomorfismo locale con la proprietá di sollevamento dei cammini, $\tilde{X}$ é connesso per archi, X é semplicemente connesso, allora π é un omeomorfismo. Se $\pi : \tilde{X} \to X$ é un omeomorfismo locale con la proprietá di sollevamento dei cammini, $\tilde{X}$ é connesso per archi, X é localmente semplicemente connesso, allora π é un rivestimento.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Arzelá***

Data ***15 aprile 2010***

Spazi omotopicamente equivalenti. Spazi contraibili. Prodotto di cammini. Cappi. Gruppo fondamentale di uno spazio topologico relativo ad un punto. Se lo spazio topologico é connesso per archi i gruppi fondamentali relativi a punti diversi sono tra loro isomorfi. Un'applicazione continua tra spazi topologici induce un omomorfismo di gruppi tra i gruppi fondamentali relativi a punti corrispondenti. Se tra i due spazi topologici vi é un'equivalenza omotopica (in particolare se i due spazi sono omeomorfi) i gruppi fondamentali sono isomorfi. Il gruppo fondamentale di uno spazio contraibile é banale.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VIII piano***

Data ***20 aprile 2010***

La sfera S^n con $n \geq 2$ é semplicemente connessa. Il gruppo fondamentale di S^1 é isomorfo a Z. Grado di un cammino chiuso su S^1. Il gruppo fondamentale del prodotto cartesiano di due spazi topologici é il prodotto diretto dei gruppi fondamentali. Esempi: gruppo fondamentale del toro bidimensionale e del cilindro.

Ore 1 (10-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***21 aprile 2010***

Se $\pi : \tilde{X} \to X$ é un rivestimento, l'omomorfismo indotto $\pi_* : \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \to \pi(X, x_0)$ é iniettivo. Se $\tilde{X}$ é connesso per archi, allora $\pi(\tilde{X}, \tilde{x}_i)$, con $\tilde{x}_i \in p^{-1}(x_0)$ sono sottogruppi di $\pi(X, x_0)$ tra loro coniugati.
Se X é uno spazio di orbite di $\tilde{X}$ rispetto ad un gruppo G che agisce in modo propriamente discontinuo, allora si puo' definire un omomorfismo di gruppi suriettivo $\phi : \pi(\tilde{X}/G, x_0) \to G$ il cui nucleo é il sottogruppo $p_*\pi(\tilde{X}/G, \tilde{x}_0)$ con $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Se $\tilde{X}$ é semplicemente connesso, allora $\pi(\tilde{X}/G, x_0)$ é isomorfo a G. Gruppo fondamentale del piano proiettivo e del nastro di Moebius.

Se S é una superficie regolare completa con curvatura gaussiana non positiva allora per ogni punto $P \in S$ il differenziale della mappa esponenziale aumenta la lunghezza dei vettori; se la curvatura gaussiana é identicamente nulla la mappa esponenziale é un'isometria locale. Se S é una superficie regolare completa con curvatura gaussiana non positiva allora per ogni punto $P \in S$ la mappa esponenziale $exp_P : T_P S \to S$ é un rivestimento.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***22 aprile 2010***

Se S é una superficie connessa completa con curvatura gaussiana $K \leq 0$ la mappa esponenziale é un diffeomorfismo; in particolare S é diffeomorfa ad un piano.
Se S é un ovaloide, allora la mappa di Gauss é un diffeomorfismo, in particolare S é diffeomorfa ad una sfera.
Superficie con curvatura Gaussiana nulla: l'unica linea asintotica passante per un punto ombelicale é un segmento di retta; se la superficie é completa la curva asintotica massimale passante per un punto ombelicale non interseca l'insieme dei punti planari; il bordo dell'insieme dei punti ombelicali é costituito da segmenti di retta.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VIII piano***

Data ***27 aprile 2010***

Una superficie regolare completa con curvatura gaussiana nulla é un cilindro o un piano.
Discussione di un esercizio.

Ore 1 (10-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***28 aprile 2010***

Richiami su superficie differenziabili astatte, applicazioni differenziabili, spazi tangenti. Superficie geometriche (o riemanniane) astratte: definizione e proprietá. Il piano iperbolico e il semipiano di Poincaré. Geodetiche del semipiano di Poincare'.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***29 aprile 2010***

Il semipiano di Poincaré é una superficie completa.
Immersioni (immersions) e immersioni regolari (embeddings) di superficie astratte. Immersioni isometriche. Il toro piatto é diffeomorfo al toro di rotazione di R^3, ma é immergibile isometricamente solo in R^4 ma non in R^3.
Immersione regolare della bottiglia di Klein in R^4.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VIII piano***

Data ***4 maggio 2010***

Non esiste un'immersione regolare del piano proiettivo reale in R^3. Immersione regolare del piano proiettivo reale in R^4. Immersioni del piano proiettivo in R^3.

Ore 1 (10-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***AulaArzelá***

Data ***5 maggio 2010***

Immersioni in posizione generale. Superficie di Steiner e immersioni del piano proiettivo in R^3. Superficie romana di Steiner e superficie cross-cup. Pinch points. Superficie di Boy e sue proprietá.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula Arzelá***

Data ***6 maggio 2010***

Teorema di Hilbert: una superficie geometrica completa di curvatura costante negativa non puó essere immersa isometricamente in R^3. Trattrice e pseudosfera.
Superficie rigate: definizione ed esempi.

Ore 2 (9-11) ***Firma (Mirella Manaresi)***

Luogo (Aula) ***Aula VIII piano***

Data ***11 maggio 2010***

Linea di restringimento di una rigata non cilindrica e sue proprietá: gli eventuali punti singolari della rigata stanno sulla curva di restringimento, parametro di distrubuzione e suo significato geometrico. Curvatura gaussiana di una rigata. Rigate sviluppabili e loro caratterizzazione. Curvatura di una rigata sviluppabile.

Ore 1 (9-10) ***Firma (Mirella Manaresi)***