Università degli Studi di Bologna — A.A. 2013/2014

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I

Prova scritta parziale — 15. 1. 2014 — A

1. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} (a+2)x_2 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 = a+1 \\ (a+1)x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - (a+1)x_3 = -2 \end{cases}$$

con $a$ parametro reale.

a) Si determinino le soluzioni del sistema al variare di $a$.

b) Fissato un valore di $a$ per cui il sistema é risolubile, la somma di due soluzioni del sistema é ancora una soluzione del sistema?

2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2h & 3 & 1-h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$

con $h$ parametro reale. Si stabilisca per quali valori di $h$ esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{3,3}$ tale che

$$MA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e per tali valori di $h$ si determini $M$. Quando $M$ esiste, é univocamente determinata?

3. In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Si scrivano le equazioni del sottospazio vettoriale $L = Span(v_1, v_2)$ e si stabilisca se $v_3 \in L$.

b) Si stabilisca se esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tale che

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e se tale $f$ é unvocamente determinata.

4. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

   a) Se $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sono due applicazioni lineari tali che $f(1,2) = g(1,2)$ e $f(-1,1) = g(-1,1)$, allora $f(x,y) = g(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   b) Se in $\mathbb{R}^4$ si considerano due rette parallele $r, s$ allora la dimensione dell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $Span(r \cup s)$ é minore strettamente di 3.

   c) Se una matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ é tale che $A^2 + 3A + I = 0$ (con $I$ matrice identitá), allora é invertibile.

5. Nello spazio tridimensionale sia $h$ un parametro reale e si considerino il piano $\alpha : 3x - y = 2h$, la retta $r : \begin{cases} hx + y = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$ e la retta $s$ passante per i punti $A = (h-1, 0, 1)$ e $B = (h-1, 1, 1)$.

   a) Si determinino due rette passanti per $A$, ortogonali tra loro ed entrambe ortogonali a $s$.

   b) Si stabilisca per quali valori del parametro le rette $r, s$ sono parallele ad $\alpha$, per quali valori sono contenute in $\alpha$ e per quali valori intersecano il piano in un punto.

   c) Per i valori di $h$ per cui le rette sono complanari si determini il piano che le contiene.

   d) Esistono valori di $h$ per i quali ogni retta complanare con $r$ é anche complanare con $s$?

   e) Posto $h = 1$, si stabilisca se esistono piani contenenti la retta $s$ e che non incontrano la retta $r$.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2013/2014
C.d.L. in Matematica Corso di GEOMETRIA I
Prova scritta parziale 28. 1. 2014 A

1. Si consideri la matrice

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ h-1 & -h & 0 & 1 \\ 1 & 0 & h & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$$

con $h$ parametro reale.

a) Si determini il rango di $A_h$ al variare di $h$.

b) Si determini la dimensione dell'$\mathbb{R}-$spazio vettoriale

$$V = \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid A_h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0\}$$

al variare di $h$.

c) Posto $h = 1$ si determini l'insieme degli $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ per i quali il sistema $A_h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ha soluzioni. Tale insieme é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$? In caso di risposta positiva se ne calcoli una base.

2. Nello spazio vetttoriale $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3 si considerino i polinomi

$$p_1(x) = 1 + x + x^2 - 3x^3, \quad p_2(x) = 1 - 2x^2 + x^3, \quad p_3(x) = 2 + x^3.$$

a) Si determini il sottospazio vettoriale $L = Span(p_1, p_2) \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$, scrivendo esplicitamente le condizioni che debbono soddisfare i coefficienti dei polinomi che stanno in $L$.

b) Si stabilisca se $p_3 \in L$.

c) Considerata l'applicazione lineare $\Phi : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \to \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ tale che

$$\Phi(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2,$$

si determini il sottospazio vettoriale $V = L \cap Ker\,\Phi$ e un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ tale che $V \bigoplus W = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

3. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

   a) Se $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sono due applicazioni lineari tali che coincidono su tutti i sottospazi vettoriali $V \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione 2, allora coincidono su tutto $\mathbb{R}^3$.

   b) Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ é una matrice tale che $A^2 = 2A - I$ (con $I$ matrice identitá $n \times n$), allora $A^{100}$ é combinazione lineare delle matrici $A$ e $I$.

   c) Se $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ e $B' = \{w_1, \dots, w_n\}$ sono due basi di un $K-$spazio vettoriale $V$, allora $B \cup B'$ e $B \cap B'$ sono due sistemi di generatori di $V$.

4. Nello spazio tridimensionale in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ si considerino i punti $A = (1, 1, 0)$, $B = (-1, -1, 2)$, $C = (1, 1, 3), D = (2h, 2, -h)$ con $h$ un parametro reale e il piano $\alpha : x + z = h$. Sia $r$ la retta per i punti $A, B$, $s$ la retta per i punti $B, C$ e $t$ la retta per i punti $C, D$.

   a) Si stabilisca per quali $h$ esiste un piano che contiene i punti $A, B, C, D$.

   b) Si discuta, al variare di $h$, quanti sono i piani che contengono i punti $A, B, D$.

   c) Esistono valori di $h$ per cui il piano $\alpha$ é ortogonale contemporaneamente alle due rette $r$ e $s$?

   d) Esistono valori di $h$ per i quali le rette $r, s, t$ hanno a due a due un punto in comune?

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2013/2014
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I
Prova scritta parziale — 12. 2. 2014

1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} h \\ 1 \\ 1 \\ -2h \end{pmatrix},$$

con $h$ parametro reale.

a) Si stabilisca per quali valori di $h$ il vettore $v$ é combinazione lineare dei vettori $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$.

b) Si determini la dimensione e un sistema di equazioni cartesiane del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori $v_3, v_4, v_5$.

2. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ e siano

$$V = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid AX = XA\}, \quad W = \{X \in \mathbb{R}^{2,2} \mid AX = -XA\}.$$

a) Determinare una base per ciascuno dei sottospazi vettoriali $V$ e $W$ di $\mathbb{R}^{2,2}$.

b) Determinare una base per ciascuno dei sottospazi vettoriali $V + W$ e $V \cap W$.

c) Data la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & h \\ 0 & h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$, si stabilisca per quali valori del parametro reale $h$ essa appartiene al sottospazio $V + W$ e, scelto uno di tali valori di $h$, si scriva $B$ come somma di una matrice non nulla di $V$ e di una non nulla di $W$.

3. Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni.

a) Se $V_1, V_2$ sono due sottospazi vettoriali di un $K$-spazio vettoriale $V$ tali che $V = V_1 \bigoplus V_2$ e $f_1 : V_1 \to V$, $f_2 : V_2 \to V$ sono due applicazioni lineari assegnate, allora esiste ed é unica l'applicazione lineare $f : V \to V$ tale che ristretta a $V_1$ coincide con $f_1$ e ristretta a $V_2$ coincide con $f_2$.

b) Se nello spazio tridimensionale due rette $r, s$ sono tali che esiste una sola retta ortogonale e incidente entrambe, allora le due rette $r, s$ sono necessariamente sghembe.

c) Se $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, allora per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ risulta $det(\lambda A) = \lambda(det A)$.

d) Se $A, B \in \mathbb{R}^{n,n}$ sono matrici simmetriche, allora anche $AB$ é una matrice simmetrica.

4. Nello spazio tridimensionale in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ si considerino i punti $A = (1, 2, -1)$, $B = (3, 0, 1)$, $C = (-1, 2, 3)$ e il piano $\alpha : x + 2y + hz + 1 = 0$, con $h$ un parametro reale.

   a) Si determinino il piano che contiene i punti $A, B, C$ e si stabilisca se esistono valori di $h$ per i quali tale piano é parallelo al piano $\alpha$.

   b) Posto $h = 6$, si determini, se possibile, una retta del piano $x+2y+6z+1 = 0$ parallela alla retta $AB$.

   c) Si determini il luogo dei punti dello spazio equidistanti dai punti $A, B, C$.