Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica
Corso di GEOMETRIA I - A.A. 2013/2014 (Argomenti I semestre)
Prova scritta **11. 6. 2014**

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i sottospazi vettoriali

$$V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 0\}, \quad V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y + z = 0\}$$

e siano $f_1 : V_1 \to \mathbb{R}^3$, $f_2 : V_2 \to \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari definite da $f_1(2a, a, b) = (a, a + b, b)$ per ogni vettore $v = (2a, a, b) \in V_1$, $f_2(c, a, -a) = (2c - 3a, 0, -a)$ per ogni vettore $v' = (c, a, -a) \in V_2$.

2 a) Si stabilisca se esiste un sottospazio vettoriale T di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $V_1 \cap T = \{0\}$ e $\dim_{\mathbb{R}} V_2 \cap T = 1$.

3 b) Si determini una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ che contenga una base di $V_1 \cap V_2$, una base di V_1 e una base di V_2.

4 c) Esiste una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f_{|V_1} = f_1$ e $f_{|V_2} = f_2$? Nel caso esista, se ne discuta l'unicità

3 2. Dimostrare o confutare la seguente affermazione.

Se A e B sono due matrici $n \times n$ a coefficienti reali tali che $\det(A) = det(B)$, allora A e B hanno lo stesso rango.

3. Nello spazio tridimensionale, in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$, si considerino i punti $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, h, -1), C = (0, 1, -2)$ e i piani

$$\alpha_1 : \quad x - y - z = 0,$$

$$\alpha_2 : \quad hx - 2y + hz = 3,$$

$$\alpha_3 : \quad 2y - hz = -1,$$

con h un parametro reale. Sia r la retta per i punti A, B e sia s la retta per i punti B, C.

10 a) Si stabilisca se esistono valori di h per i quali i tre piani si incontrano lungo una retta (cioé formano fascio), si incontrano in un solo punto, sono tutti tra loro paralleli, la retta intersezione tra due di essi é parallela al terzo piano.

4 b) Si stabilisca se esistono valori di h per i quali la retta r giace sul piano α_2 e valori di h per i quali la retta r é parallela al piano α_2.

4 c) Si discuta, al variare di h, quante sono le rette ortogonali e incidenti le rette r, s e si scrivano tali rette nel caso $h = 1$.

NOME COGNOME NUMERO DI MATRICOLA

ESERCIZIO 1.

- Esiste un sottospazio vettoriale T di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $V_1 \cap T = \{0\}$ e $\dim_{\mathbb{R}} V_2 \cap T = 1$?
- Una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ che contenga una base di $V_1 \cap V_2$, una base di V_1 e una base di V_2 è :
- Esiste una applicazione lineare come richiesto? È unica?

ESERCIZIO 2. L'affermazione è :

Perché:

ESERCIZIO 3.

1. I tre piani si incontrano lungo una retta (cioé formano fascio) per $h =$?
2. I tre piani si incontrano in un solo punto per $h =$?
3. I tre piani sono tutti tra loro paralleli per $h =$?
4. La retta intersezione di due dei tre piani é parallela al terzo piano per $h =$?.
5. Esistono valori di h per i quali la retta r giace sul piano α_2?
6. Esistono valori di h per i quali la retta r é parallela al piano α_2?
7. Al variare di h le rette ortogonali e incidenti le rette r, s sono:
8. Tali rette nel caso $h = 1$, sono:

Geometria I A.A. 2013/14

I SEMESTRE

Es 1

$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ x - 2y = 0\}$ $\quad f_1 : V_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(2a, a, b) \mapsto (a, a+b, b)$

$V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \ y + z = 0\}$ $\quad f_2 : V_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$f_2(c, a, -a) \mapsto (2c - 3a, 0, -a)$

ⓐ $\nexists$ T sottospazio di $\mathbb{R}^3$
$\dim T = 2$
t.c. $V_1 \cap T = \{0\}$ per la formula di Grassmann
visto che $\dim V_1 = 2$

ⓑ $V_1 \cap V_2$ $\quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 2y \\ z = -y \end{cases}$ $\quad \dim V_1 \cap V_2 = 1$

base di $V_1 \cap V_2$ $\quad (2a, a, -a)$ con $a \neq 0$

Scelgo $v_1 = (2, 1, -1)$

$v_2 = (0, 0, 1)$ $\qquad v_3 = (1, 0, 0)$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ base di $\mathbb{R}^3$

$\{v_1\}$ base di $V_1 \cap V_2$

$\{v_1, v_2\}$ base di V_1 $\qquad \{v_1, v_3\}$ base di V_2

ⓒ $f_1(v_1) = (1, 0, -1)$ $\qquad f_2(v_1) = (1, 0, -1)$

quindi $f_1\big|_{V_1 \cap V_2} = f_2\big|_{V_1 \cap V_2}$

$\exists\, 1!$ $\quad f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad$ t.c. $\quad f\big|_{V_i} = f_i$

per $i = 1, 2$

ed è così definita

$$f(v_1) = f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(v_2) = f_1(v_2) = f_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(v_3) = f_2(v_2) = f_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2f(e_1) + f(e_3) = \qquad f(e_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ES 2

L'affermazione è falsa

Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det A = 0 \qquad \operatorname{rg} A = 1$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det B = 0 \qquad \operatorname{rg} B = 2$$

Es. 3

$\alpha_1 : \quad x - y - z = 0$

$\alpha_2 \quad hx - 2y + hz = 3$

$\alpha_3 \quad 2y - hz = -1$

$A = (1, 1, 0)$

$B (1, h, -1)$

$C (0, 1, -2)$

$h \in \mathbb{R}$

I tre piani si incontrano lungo una retta se $\text{rg } A = \text{rg } A' = 2$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ h & -2 & h \\ 0 & 2 & -h \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ h & -2 & h & 3 \\ 0 & 2 & -h & -1 \end{pmatrix}$$

$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$ quindi $\text{rg } A \geq 2$

$\det A = + \cancel{2h} - \cancel{2h} - h^2 - 2h = 0 \iff h = 0$ oppure $h = -2$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ h & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = +2 - 6 - h = -4 - h = 0 \iff h = -4$$

I tre piani si incontrano in un punto se $\text{rg } A = \text{rg } A' = 3$ cioè se $\det A \neq 0$ ovvero se e solo se $h \neq 0, -2$

I tre piani sono tutti e tre paralleli $\iff$

$\text{rg } A = \text{rg } A' = 1$

Non è mai vero

La retta intersezione di α_1 e α_3 è parallela ad α_2 se

$2 = rg\ A < rg\ A' = 3$

Questo è vero per $h = 0, -2$.

(b) r è la retta per $A(1,1,0)$ $B(1,h,-1)$

r giace su α_2 se i due punti A, B stanno su α_2

$$\begin{cases} h - 2 = 3 \\ 1 - 2h - h = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} h = 5 \\ -3h = 2 \end{cases} \qquad \nexists\, h \text{ per cui r giace su } \alpha_2$$

r è $\parallel$ α_2 se il vettore $v = (h, -2, h) \perp \alpha_2$

è perpendicolare al vettore di direzione di r

$u = (0, h-1, -1) \perp v = (h, -2, h)$

$-2h + 2 - h = \qquad \boxed{h = \frac{2}{3}}$

(c)

r ed s si incontrano nel punto $B(1, h, -1)$

$\forall h$ quindi vi è sempre 1! retta ortogonale e incidente r, s: è la retta per B e $\perp$ al piano individuato da r e da s

$h=1$ $B(1, 1, -1)$ $A=(1,1,0)$ $C(0,1,-2)$

Si vede subito che il piano individuato da r, s è $\boxed{y=1}$

infatti piano individuato da r, s è il piano per A, B, C

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 0 \qquad +(y-1) = 0$$

$\boxed{y = 1}$ π

Retta per B e $\perp$ a π è $\begin{cases} x = 1 \\ z = -1 \end{cases}$