Università degli Studi di Bologna - C.d.L. in Matematica
Corso di GEOMETRIA I - A.A. 2013/2014 (Argomenti I semestre)
Prova scritta 2. 7. 2014

1. In $\mathbb{R}^3$ si considerino i vettori

$$v_1 = {}^t(1, 1-h, 0),\ v_2 = {}^t(1, 0, h),\ v_3 = {}^t(0, 0, 1),$$

$$w_1 = {}^t(1, 2, 2-h),\ w_2 = {}^t(1, 2, 1),\ w_3 = {}^t(-1, h-1, 0),$$

con h parametro reale. Siano $S_h = Span(v_1, v_2, v_3)$, $T_h = Span(w_1, w_2, w_3)$.

4 a) Si calcolino le dimensioni dei sottospazi vettoriali S_h e T_h di $\mathbb{R}^3$ al variare del parametro h, individuandone una base.

3 b) Si stabilisca se esistono valori di h per i quali la dimensione del sottospazio vettoriale $S_h \cap T_h$ é minore di 2.

8 c) Si stabilisca per quali valori di h esiste ed é univocamente determinata un'applicazione lineare $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f_h(v_i) = w_i$ per ogni $i = 1, 2, 3$ e per tali valori di h si determinino il nucleo e l'immagine di f_h.

3 2. Dimostrare o confutare la seguente affermazione.

Se I é la matrice identitá di ordine n e $A \in M_n(\mathbb{R})$ é una matrice tale che $A^3 + 2A + I$ é la matrice nulla di ordine n, allora A é una matrice invertibile.

3. Nello spazio tridimensionale, in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$, si considerino le rette di r_1, r_2 di equazioni rispettivamente

$$r_1 : \begin{cases} x = 2z \\ y = z - 1 \end{cases}, \quad r_2 : \begin{cases} x = z + 1 + k \\ y = 3 - kz \end{cases}$$

con k parametro reale.

6 a) Si determini per quali valori di k le due rette sono incidenti, parallele, sghembe.

3 b) Per uno dei valori di k per i quali le due rette r_1, r_2 sono complanari si determini il piano che le contiene.

3 c) Si scrivano le equazioni di due piani contenenti la retta r_1 e tra loro ortogonali.

ES 1

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-h \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $S_h = \text{Span}(v_1, v_2, v_3)$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1-h & 0 & 0 \\ 0 & h & 1 \end{pmatrix} = h-1 = 0 \iff h=1$$

Per $h \neq 1$ $\dim S_h = 3$ base v_1, v_2, v_3

$h = 1$ $\dim S_1 = 2$ base $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2-h \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ h-1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T_h = \text{Span}(w_1, w_2, w_3)$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & h-1 \\ 2-h & 1 & 0 \end{pmatrix} = (h-1)(2-h) - 2 + 2(2-h) - h + 1 =$$

$$= -h^2 + \cancel{3h} \cancel{-2} \cancel{-2} \cancel{+4} \cancel{-2h} \cancel{-h} + 1 = 1 - h^2$$

Per $h \neq \pm 1$ $\dim T_h = 3$

$h = 1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Base di T_1 $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$h = -1$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Base di T_{-1} $w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Per $\boxed{h \neq \pm 1}$

$S_h = \mathbb{R}^3$ $T_h = 3 \Rightarrow S_h \cap T_h = \mathbb{R}^3$

Per $\boxed{h = 1}$ $\dim S_1 = 2 = \dim T_1$

$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$

$T_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2z\}$

$S_1 \cap T_1 = \{(x,y,z) \mid y = z = 0\}$ $\dim S_1 \cap T_1 = 1$

Per $\boxed{h = -1}$ $S_{-1} = \mathbb{R}^3$ $T_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x\}$

$S_{-1} \cap T_{-1} = T_{-1} \Rightarrow \dim S_{-1} \cap T_{-1} = 2$

(c) Per $h \neq 1$ f_h esiste ed è univocamente determinata

Sia $\boxed{h \neq 1}$

$$f(e_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ h-1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) = f(v_2) - h f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - h \begin{pmatrix} -1 \\ h-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+h \\ 2-h^2+h \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f(e_1) + (1-h) f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2-h \end{pmatrix}$$

$$(1-h) f(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2-h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+h \\ 2-h^2+h \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ h^2-h \\ 1-h \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = \begin{pmatrix} \frac{h}{h-1} \\ -h \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+h & \frac{h}{h-1} & -1 \\ 2+h-h^2 & -h & h-1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1+h & \frac{h}{h-1} & -1 \\ 2+h-h^2 & -h & h-1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \cancel{h} - 2 - h + \cancel{h^2} - \cancel{h} + 1 - \cancel{h^2} = -1-h$$

$$\det = 0 \iff h = -1$$

Per $h \neq -1$ f è un isomorfismo

$\operatorname{Ker} f = \{0\}$ $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^3$

Per $h = -1$ $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Ker} f_{-1}$ $\begin{cases} y = 2z \\ y = -x \end{cases}$ $\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$\operatorname{Im} f_{-1} = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \{ y = 2x \}$$

(d) Per $h = 1$

$$\begin{array}{ccc} \\ \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix}\right) \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix} \end{array}$$

$$v_2 = v_1 + v_3$$

$$f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq f(v_1) + f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nexists f$$

$\boxed{\text{ES 2}}$ (a) $A^3 + 2A = I$

$A(A^2 + 2I) = I$ $\quad$ A è invertibile

(b) È vero solo se $V \not\subset W$ e $W \not\subset V$

Es. se $V = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_3 = x_4 = 0\}$

$W = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 0\}$

$$f = id \qquad g\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{ES 3}}$

$$r_1 \begin{cases} x = 2z \\ y = z - 1 \end{cases} \qquad r_2 \begin{cases} x = z + 1 + k \\ y = 3 - kz \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \parallel r_1 \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ 1 \end{pmatrix} \parallel r_2$$

Le due rette non sono // per nessun valore di k

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = z - 1 \\ x = z + 1 + k \\ y = 3 - kz \end{cases} \qquad \begin{cases} 2z = z + 1 + k \\ z - 1 = 3 - kz \end{cases} \qquad \begin{cases} z = 1 + k \\ \cancel{1} + k - \cancel{1} = 3 - k - k^2 \end{cases}$$

$$k^2 + 2k - 3 = 0$$

$$(k + 3)(k - 1) = 0 \iff k = +1, -3$$

Per $k = +1, -3$ le rette sono incidenti

Per $k \neq +1, -3$ le rette sono sghembe

$k = +1$ $\qquad r_1 \begin{cases} x = 2z \\ y = z - 1 \end{cases}$ $\qquad r_2 \begin{cases} x = z + 2 \\ y = 3 - z \end{cases}$ $\qquad r_2 \begin{cases} y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$

$$\lambda(x - 2z) + \mu(y - z + 1) = 0$$

$$\lambda(t + 2 - 2t) + \mu(3 - t - t + 1) = 0$$

$$(-\lambda - 2\mu)t + 2\lambda + 4\mu = 0$$

$$\lambda = -2\mu$$

$$2x - 4z - y + z - 1 = 0$$

$$\boxed{2x - y - 3z - 1 = 0}$$

$k = -3$ $\qquad r_2 \begin{cases} x = z - 2 \\ y = 3 + 3z \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 3 + 3t \\ z = t \end{cases}$

$$\lambda(t - 2 - 2t) + \mu(3 + 3t - t + 1) = 0$$

$$(-\lambda + 2\mu)t - 2\lambda + 4\mu = 0$$

$$\lambda = 2\mu$$

$$2x - 4z + y - z + 1$$

$$\boxed{2x + y - 5z + 1 = 0}$$