Università degli Studi di Bologna — A.A. 2011/2012

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I

Prova scritta — 5. 6. 2012 — A

1. Siano

$$V_1 = Span(\{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 = 1\}),$$
$$V_2 = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + 2x_4 = 0\}.$$

Si determini la dimensione del seguente sottospazio vettoriale dello spazio degli endomorfismi lineari di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \{F \in End(\mathbb{R}^4) \mid Im\, F \subseteq V_1,\ F(V_1) \subseteq V_2,\ \}.$$

2. Sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -k & 0 & k & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$, dove k é un parametro reale e sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare canonicamente associata ad A_k.

   a) Si determini la forma canonica di Jordan della matrice A_k al variare del parametro k e si stabilisca se vi sono valori di k per cui A_k é diagonalizzabile.

   b) Per $k = 1$ si determini l'autospazio generalizzato relativo all'autovalore 1.

3. Sia $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ e siano $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rispettivamente la forma bilineare simmetrica e la forma quadratica associate canonicamente a M.

   Siano

$$Q_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x, y, z) = 0\}, \quad H_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\},$$
$$Q_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x, y, z) = 1\}, \quad H_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}.$$

   a) Si stabilisca se b é degenere e in caso affermativo se ne determini il radicale.

   b) Si determini una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a b.

   c) Si stabilisca se esiste un sottospazio vettoriale $U \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione 2 ristretto al quale b é un prodotto scalare.

   d) Si stabilisca se esiste un'affinitá di $\mathbb{R}^3$ che porta la conica $Q_1 \cap H_1$ nella conica $Q_2 \cap H_2$.

4. Si considerino le rette

$$r_1 = \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2z = 0 \end{cases}, \quad r_2 = \begin{cases} y + z = 1 \\ x = 4 \end{cases}, \quad r_3 = \begin{cases} x = 2t - 2 \\ y = 2(t - a), \\ z = 1 + at \end{cases}$$

con a parametro reale e i piani
$\Pi_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 1\}, \quad \Pi_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1\}$.

a) Si stabilisca se esistono valori di $a \in \mathbb{R}$ per i quali le tre rette r_1, r_2, r_3 sono complanari.

b) Si stabilisca se esiste un'affinitá $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $F(\Pi_1) = \Pi_2$ e $F(r_1) = r_2$ e in caso affermativo la si determini.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2011/2012

C.d.L. in Matematica Corso di GEOMETRIA I

Prova scritta 26. 6. 2012 A

1. Siano

$$V_1 = \{(x_1, \cdots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0, x_3 - x_4 = 0, x_5 = 0\},$$
$$V_2 = \{(x_1, \cdots, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_5 = 0, x_2 - x_3 = 0\},$$
$$V_3 = Span((0,0,0,1,1)).$$

Si determini la dimensione del seguente sottospazio vettoriale dello spazio degli endomorfismi lineari di $\mathbb{R}^5$:

$$W = \{F \in End(\mathbb{R}^5) \mid F(V_i) \subseteq V_i,\ i = 1,2,3\}.$$

2. Sia $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$, dove k é un parametro reale, e sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare canonicamente associata ad A_k.

   a) Si stabilisca per quali valori di k l'applicazione f_k é un isomorfismo e per i valori di k per i quali non lo é si determinino le equazioni cartesiane e una base di $\ker f$ e di Imf.

   b) Si stabilisca se esistono valori di k per i quali la matrice A_k é simile alla matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Sia $M = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ e siano $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ rispettivamente la forma bilineare simmetrica e la forma quadratica associate canonicamente a M.

   Siano

$$Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \mid q(x,y,z) = 1\}, \quad H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_4 = 0\}.$$

   a) Si stabilisca se b é degenere o meno, se ne calcoli la segnatura, si stabilisca se esistono dei vettori isotropi rispetto a b e si determini una base ortogonale di $\mathbb{R}^4$ rispetto a b.

b) Si determini un sottospazio vettoriale $U \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione 2 ristretto al quale b é nulla. Esiste un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione 3 ristretto al quale b é nulla?

c) Si stabilisca se esiste un'affinitá di $\mathbb{R}^4$ che porta la conica $Q \cap H$ nella conica di equazioni $x_1 = 0, x_4 = 0, x_3^2 = x_2$.

4. Si considerino i piani
$\pi_1 : x + y + z - k = 0, \quad \pi_2 : x + kz = 0, \quad \pi_3 : x - y + z - 1 = 0\,,$
con k parametro reale, e le rette

$$r_{12} = \pi_1 \cap \pi_2, \quad r_{13} = \pi_1 \cap \pi_3, \quad r_{23} = \pi_2 \cap \pi_3.$$

a) Si stabilisca se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali i tre piani si incontrano in un punto e valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali i tre piani formano fascio.

b) Si stabilisca se esistono valori di $k \in \mathbb{R}$ per i quali le tre rette r_{12}, r_{13}, r_{23} sono tra loro parallele.

c) Posto $k = -1$ si trovi la retta s simmetrica della retta r_{12} rispetto al piano π_3 e l'equazione del piano contenente le rette r_{12} e s.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2011/2012

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I

Prova scritta — 10. 7. 2012

1. Siano
$$V = Span\{^t(1,0,1,0),^t(0,1,0,0)\} \in \mathbb{R}^4,$$
$$W_1 = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - x_3 = 1\},$$
$$W_2 = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - x_3 = 0\}.$$
Si determini la dimensione del seguente sottospazio vettoriale dello spazio degli endomorfismi lineari di $\mathbb{R}^4$:
$$T = \{F \in End(\mathbb{R}^4) \,|\, V \subseteq KerF,\ F(W_1) \subseteq W_2\}.$$

2. Siano $V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$, $V_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = -2y\}$, siano $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ le applicazioni lineari definite rispettivamente da
$$f_1(a,a,b) = (2a, 2a, a+2b) \quad \forall (a,a,b) \in V_1,$$
$$f_2(a,b,-2b) = (2a, 2b, -3b) \quad \forall (a,b,-2b) \in V_2.$$
   a) Si provi che esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f_{|V_i} = f_i, \quad i = 1,2$.
   b) Si stabilisca se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ rispetto alla quale la matrice associata a f é la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. In $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare euclideo sia
$$U = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + 2x_3 = 0\}$$
e sia $U^\perp$ il suo ortogonale. Sia $F \in End(\mathbb{R}^4)$ l'endomorfismo che ha U come autospazio relativo all'autovalore 2 e $U^\perp$ come nucleo; sia A la matrice canonicamente associata a F.
   a) Si stabilisca se F é un endomorfismo autoaggiunto e/o ortogonale.
   b) Indicata con $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare canonicamente associata ad A si determini la sua segnatura, stabilendo se e' un prodotto scalare.
   c) Si stabilisca se
$$Z = \{x = (x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, b(x,y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^4\},$$
é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e in caso positivo si determini una sua base.

4. Nello spazio tridimensionale si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2t - 1 \end{cases}.$$

a) Si studi la posizione reciproca delle due rette.

b) Si trovino tutte le rette che si appoggiano a r e s e sono parallele al piano $\pi : x + 2y + z = 0$.

5. Si provi o si confuti la seguente affermazione:

"Date tre rette distinte che si intersecano a due a due, o sono complanari o passano per uno stesso punto."

Università degli Studi di Bologna | A.A. 2011/2012
C.d.L. in Matematica | Corso di GEOMETRIA I
Prova scritta | 5. 9. 2012

1. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$: $V_1 = Span\{(1,0,0,1)\}$

$$V_2 = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_4 = 0,\ x_2 + x_3 = 0\},$$

$V_3 = Span\, S$, dove $S = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 - x_4 = 0\}$.
Si determini la dimensione del seguente sottospazio vettoriale dello spazio degli endomorfismi lineari di $\mathbb{R}^4$:

$$L = \{F \in End(\mathbb{R}^4) \mid V_1 \subseteq KerF,\ F(V_2) \subseteq V_1,\ F(\mathbb{R}^4) \subseteq V_3\}.$$

2. Sia $f_k \in End(\mathbb{R}^4)$ l'applicazione definita da

$$f_k(x_1, \ldots, x_4) = \begin{pmatrix} 1 & k(1-k) & 0 & 0 \\ k-1 & 1 & 1-k & 0 \\ 0 & k(1-k) & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

dove k é un parametro reale.

a) Si studi la diagonalizzabilitá di f_k al variare di k in $\mathbb{R}$ e si stabilisca se esistono valori di k per i quali f_k ha un blocco di Jordan di ordine 2.

b) Al variare di k si determini la dimensione di ${f_k}^{-1}(W)$, dove

$$W = \{(y_1, \ldots, y_4) \in \mathbb{R}^4 \mid y_1 - y_4 = 0,\ y_2 + y_3 = 0\}.$$

3. In $\mathbb{R}^4$ munito del prodotto scalare euclideo siano

$$U_1 = Span\{(1,2,0,0)\}, \quad U_2 = Span\{(0,0,0,1)\},$$

$$U_3 = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 = 0, x_4 = 0\}.$$

a) Si stabilisca se esiste un endomorfismo autoaggiunto F di $\mathbb{R}^4$ che abbia U_1, U_2, U_3 come autospazi relativi rispettivamente agli autovalori $0, 1, 2$ e in caso positivo si indichino le immagini mediante F dei vettori di una base di $\mathbb{R}^4$.

b) Si stabilisca se esiste una forma quadratica q su $\mathbb{R}^4$ che assume lo stesso valore su tutti i vettori di U_1.

c) Si stabilisca se esiste una forma quadratica definita positiva q su $\mathbb{R}^4$ che assuma lo stesso valore su tutti i vettori di U_1.

4. Nello spazio tridimensionale si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x + hz + 1 = 0 \\ hx + y - 7 = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x + y - h = 0 \\ y = 1 \end{cases}, \text{ con } h \text{ parametro reale.}$$

a) Si studi la posizione reciproca delle due rette, stabilendo per quali valori di h le due rette sono coincidenti, incidenti, parallele, sghembe.

b) Posto $h = -2$ si trovi il piano che contiene le due rette.

c) Posto $h = 0$, si stabilisca se é vero che ogni retta complanare con r é anche complanare con s.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2011/2012
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I
Prova scritta — 18. 9. 2012

1. In $\mathbb{R}^4$ siano

$$V_1 = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - 4x_3 + x_4 = 0,\ x_2 = 0\},$$
$$S = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, (x_1 - x_2)(x_3 + x_4) = 1,\ x_2 = x_3 = 0\},$$
$$W_1 = Span\{(1,0,1,0)\}, \quad W_2 = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 + x_3 = 0\}$$

e sia

$$L = \{F \in End(\mathbb{R}^4) \,|\, F(V_1) \subseteq W_1, \quad F(S) \subseteq W_2\}.$$

a) Si determini la dimensione dell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale L e si mostri che L non contiene isomofismi di $\mathbb{R}^4$ in sé.

b) Si scrivano le equazioni di un'affinitá di $\mathbb{R}^4$ che porta S nella conica

$$C = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,| x_2(x_1 + 1) = 2, x_3 = x_4 = 0\}.$$

2. Sia $f_k \in End(\mathbb{R}^4)$ l'applicazione definita da $f_k(e_1) = ke_1$, $f_k(e_2) = e_1$, $f_k(e_3) = 2e_3$, $f_k(e_4) = e_3 + (k+1)e_4$, dove $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ é la base canonica di $\mathbb{R}^4$ e k é un parametro reale.

a) Si determini la dimensione di $kerF_k$ e di Imf_k al variare di k.

b) Si determinino i valori di k per i quali f_k é diagonalizzabile e per i valori per cui non lo é si determini la forma di Jordan.

c) Si stabilisca se esistono valori di k per i quali esiste un'endomorfismo lineare g di $\mathbb{R}^4$ tale che $f_k(g(v)) = 2v$ per ogni $v \in \mathbb{R}^4$.

d) Si dimostri che $W = \{v \in \mathbb{R}^4 \,|\, {f_k}^2(v) = f_k(f_k(v)) = 4v\}$ é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e se ne calcoli la dimensione al variare di k.

e) Posto $k = 3$ si stabilisca se esiste un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ rispetto al quale f_k risulti un operatore unitario.

f) Posto $k = 2$ si determini (qualora esista) un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$ rispetto al quale f_k risulti un endomorfismo autoaggiunto.

3. In $\mathbb{R}^4$ si considerino il punto $A = (1,2,0,1)$ e i piani

$$\pi_1 : \begin{cases} x_1 + hx_2 - 1 = 0 \\ 2x_2 - x_4 - 3 = 0 \end{cases}, \quad \pi_2 : \begin{cases} x_1 + (1-h)x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_3 - 2 = 0 \end{cases}, \text{ con } h \text{ parametro reale.}$$

a) Si determinino i valori di h per i quali i due piani hanno in comune un solo punto, quelli per cui hanno in comune una retta, quelli per cui sono paralleli (ossia hanno la stessa giacitura).

b) Al variare di h si detemini il piú piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ che contiene il piano π_1 e il punto A.