Università desli Studi di Bologna A.A. 2001/2002

C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica Informatico-Computazionale

Corso di GEOMETRIA I Compito A 8. 1. 2002

1. Stabilire per quali valor del parametro reale k il sistema lineare

$$\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y-z=0 \\ -y+z=-3 \\ y+kz=0 \end{cases}$$

ammette soluzioni e determinarle.

2. a) Determinare tutti i vettori dello spazio di modulo 3 e perpendicolari ai vettori $\underline{u}=(1,1,4)$ e $\underline{v}=(1,-1,0)$.

   b) Stabilire se esiste un vettore $\underline{w}$ tale che $\underline{u}\wedge\underline{w}=\underline{v}$.

3. a) Stabilire se le rette

$$r)\begin{cases} x=1+t \\ y=-1 \\ z=t-1 \end{cases} \qquad s)\begin{cases} x-z=0 \\ y+2=0 \end{cases}$$

   sono complanari e in caso affermativo determinare il piano che le contiene.

   b) Determinare un'equazione cartesiana della superficie S ottenuta facendo ruotare la retta r intorno alla retta s.

   c) Si classifichi S stabilendo se è una superficie rigata.

   d) Si scrivano le equazioni di una curva $\mathcal{C}$ che giace su S e che non sia nè una retta nè una circonferenza.

   e) Si scrivano le equazioni di una retta l diversa da r e che giace su S.

4. Dare un esempio di matrice quadrata $A\in\mathbb{R}^{2,2}$ diversa dalla matrice nulla e dalla matrice $2I=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tale che $A^2=2A$.

   Tale matrice A è univocamente determinata?

Università desli Studi di Bologna A.A. 2001/2002
C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica
Informatico-Computazionale

Corso di GEOMETRIA I Compito A 31. 1. 2002

1. a) Determinare per quali valori di k e h i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono linearmente dipendenti: $v_1 = (0, 1, -1, 1)$, $v_2 = (2, k, 3, -3)$, $v_3 = (1, 0, 2, h)$. Inoltre, per tali valori, esprimere v_2 come combinazione lineare di v_1 e v_3. Tale espressione è unica?

   b) Dati i tre piani di equazioni: $y - z + 1 = 0$, $2x + ky + 3z - 3 = 0$, $x + 2z + h = 0$, determinare per quali valori di k e h essi appartengono tutti ad uno stesso fascio.

   c) Si consideri la retta r_k di equazioni $\begin{cases} y - z + 1 = 0 \\ 2x + ky + 3z - 3 = 0 \end{cases}$ e il piano $\pi_h : x + 2z + h = 0$. Esistono valori di (k, h) per i quali il piano π_h è parallelo ad r_k ma non copntiene r_k?

2. Determinare una matrice quadrata $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ tale che

$$A \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Tale A è univocamente determinata?

3. Siano dati il punto $Q(0, 0, 1)$ e le rette $r) \begin{cases} x = 0 \\ z = -1 \end{cases}$ $s) \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

   a) Stabilire se le rette r ed s sono complanari e determinare la loro distanza.

   b) Determinare il luogo geometrico $\mathcal{D}$ dei punti $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che $(P - Q) \wedge (0, -1, 1) = (1, 2, 2)$ stabilendo se si tratta di una curva o di una superficie.

   c) Determinare la distanza del punto $P(x_p, y_p, z_p)$ dalla retta r.

   d) Trovare il luogo geometrico $\mathcal{S} := \{P \in \mathbb{R}^3 \mid d(P, r) = d(P, Q)\}$, mostrando che si tratta di una quadrica. Si classifichi S stabilendo se è una superficie rigata e/o una superficie di rotazione.

   e) Si determinino le curve $\mathcal{C}_1 = \mathcal{S} \cap \pi_1$ e $\mathcal{C}_2 = \mathcal{S} \cap \pi_2$ dove π_1 e π_2 sono rispettivamente i piani di equazioni $\pi_1 : x - 3 = 0$ e $\pi_2 : z = 4$. Classificare $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

   f) Si scriva l'equazione del cono di vertice il punto $(0, 0, 0)$ e direttrice $\mathcal{C}_1$.

Università desli Studi di Bologna A.A. 2001/2002
C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica Informatico-Computazionale

Corso di GEOMETRIA I Compito A 14. 2. 2002

1. Stabilire per quali valor dei parametri reali a e b il sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - az = b \\ -ax + y + z = b \\ x - ay + z = b \end{cases}$$

ammette soluzioni. Si determinino poi le soluzioni nei casi in cui esse siano infinite.

2. Determinare l'insieme $\mathcal{A}$ di tutte le matrici in $\mathbb{R}^{3,3}$ che commutano con la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dimostrare che per ogni $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ e per ogni $A_1, \ldots, A_r \in \mathcal{A}$ si ha che $\lambda_1 A_1 + \ldots + \lambda_r a_r \in \mathcal{A}$.

3. Siano dati il punto $O(0,0,0)$ e il vettore $\underline{u}(1,0,1)$

   a) Determinare il luogo $\mathcal{C}_1$ dei punti P tali che $|(P - O)| = 6(P - O) \cdot \underline{u}$, ove "$\cdot$" è il prodotto scalare. Classificare $\mathcal{C}_1$.

   b) Determinare il luogo $\mathcal{C}_2$ dei punti P tali che $|(P - O)| = |(P - O) \wedge \underline{u}|$. Classificare $\mathcal{C}_2$.

4. a) Si considerino le rette. $r : \begin{cases} 2x + y + az = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ ed $s : \begin{cases} x + bz = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$.
   Determinare per quali valor dei parametri reali a e b le due rette sono i) sghembe, ii) parallele iii) complanari.

   b) Nel caso in cui $a = 0$, $b = 2$ si determini la superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare r attorno ad s.

Università desli Studi di Bologna A.A. 2001/2002
C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica Informatico-Computazionale

Corso di GEOMETRIA I

Compito 24. 5. 2002

1. a) Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il seguente sistema ammette soluzioni:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -x - ky + 2z = k + 2 \\ (k-6)y + kz = (k+2)(k-3) \end{cases}$$

   b) Nel caso esistano, si calcolino le soluzioni del sistema per $k = 0$ e $k = -2$.

   c) Determinare per quali valori del parametro reale k i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono lineramente dipendenti: $\vec{u} = (1, 2, -1, 0), \vec{v} = (-1, -k, 2, k+2), \vec{w} = (0, k-6, k, (k+2)(k-3))$.

2. a) Dati i vettori $\vec{u} = (3, 0, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 2)$ di $\mathbb{R}^3$ e il punto $O = (0, 0, 0)$ di $\mathbb{R}^3$ determinare il luogo geometrico $\mathcal{C}$ dei punti P di $\mathbb{R}^3$ tali che $\vec{OP} \wedge \vec{u}$ è perpendicolare a $\vec{v}$ e il vettore $\vec{OP} - \vec{v}$ ha modulo 2.

   b) Classificare $\mathcal{C}$.

3. a) Determinare, se esiste, una matrice $X \in \mathbb{R}^{3,3}$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

   b) Determinare, se esiste, una matrice $Y \in \mathbb{R}^{3,3}$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Sia π il piano dello spazio euclideo tridimensionale passante per il punto $P(0, 0, 1)$ e per la retta $r : \begin{cases} x = z \\ y = 2 - x \end{cases}$

   a) Stabilire se il vettore $\vec{v} = (1, -1-, -2)$ è parallelo a π.

   b) Stabilire per quali valori del parametro reale h la retta r_h di equazioni $\begin{cases} hx - y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$ giace sul piano π.

5. Determinare la superficie di rotazione ottenuta facendo ruotare la curva $\mathcal{C}$ di equazioni $\begin{cases} x = 0 \\ y - z^2 = 2 \end{cases}$ intorno alla retta di equazioni $x = z = 0$.

Università desli Studi di Bologna A.A. 2001/2002
C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica Informatico-Computazionale

Corso di GEOMETRIA I

Compito 10. 6. 2002

1. Siano
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & h & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & h & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & h \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
ove h è un parametro reale.

   a) Si determinino le caratteristiche delle matrici A e A' al variare del parametro h.

   b) Si stabilisca per quali valori del parametro reale h il sistema lineare $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}$ ammette soluzioni e le si determinino.

   c) Si considerino le rette $r : \begin{cases} x - z = 2 \\ hy + z = 1 \end{cases}$ $s : \begin{cases} x - z = h \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$.
   Per quali valori di h le due rette sono complanari? Per tali valori si determini il piano che le contiene entrambe.

   d) Sia α il piano di equazione $hy + z = 1$ e sia s la retta di cui al punto c). Si determini per quali valori di h il piano α contiene la retta s.

   e) Siano α, s come nel punto d) e sia $h = 0$. Si determini l'equazione di una retta t ortogonale a s e giacente sul piano α.

   f) Siano r, s come nel punto c) e sia $h = 0$. Si determini l'equazione della superficie $\mathcal{S}$ ottenuta facendo ruotare la retta s attorno alla retta r e si classifichi $\mathcal{S}$, stabilendo se è una superficie rigata.

2. Dati i vettori $\underline{u} = \underline{i} + \underline{k}$, $\underline{v} = \underline{i} - \underline{j} + 2\underline{k}$

   a) Si determini il vettore $\underline{w}$ perpendicolare a $\underline{u} - \underline{v}$ e tale che $\underline{u} \wedge \underline{w} = \underline{u} \wedge \underline{v}$.

   b) Si determini il luogo $\mathcal{C}$ dei punti $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tali che, indicato con $\underline{t}$ il vettore $\underline{t} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$, risulti che $\underline{t} - \underline{u}$ è un vettore unitario perpendicolare a $\underline{u}$.

3. Date le matrici $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, si calcoli il determinante della matrice $-A\ {}^tB\ A^{-1}$.

Università desli Studi di Bologna A.A. 2001/2002
C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica
Informatico-Computazionale

Corso di GEOMETRIA I Compito
6. 9. 2002

1. a) Si stabilisca per quali valori del parametro reale h il seguente sistema lineare ammette soluzioni e le si determinino:

$$\begin{cases} x + 2y - z = h \\ x + hw = 1 \\ x - 2y + (h^2 - 3)z + 2hw = h - 2 \end{cases}$$

b) Si stabilisca per quali valori del parametro reale h i tre vettori:

$$\underline{u} = (1, 1, 1), \underline{v} = (2, 0, -2), \underline{w} = (-1, 0, h^2 - 3)$$

sono linearmente dipendenti.

Si considerino i tre piani $\alpha : x+2y-z = 0$, $\beta : x = h$ e $\gamma : x-2y+(h^2-3)z = 2h$.

c) Si determinino tutte le rette paralle sia ad α che a β.

d) Sia determini h in modo che esista una retta r appartenente a γ e perpendicolare ad α.

e) Si determini per quali valori del parametro reale h i piani α, β e γ appartengono ad uno stesso fascio.

2. Si considerino i vettori $\underline{u} = (1, 0, 1)$ e $\underline{v} = (1, -1, 1)$ di $\mathbb{R}^3$.

a) Si determini il luogo $\mathcal{C}$ dei vettori $\underline{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ di modulo 2 e tali che $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è perpendicolare a $\underline{u}$.

b) Esistono vettori di $\mathcal{C}$ paralleli al piano di equazione $x+y+z+1 = 0$? In caso affermativo, li si determinino.

3. Sia $\mathcal{C}$ la curva di equazioni:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ z = 1 \end{cases} .$$

Si scriva l'equazione cartesiana del cono di vertice $V(0, -1, 0)$ e generatrice la curva $\mathcal{C}$.

4. Data le matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$, si determinino rutte le matrici $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ tali che $AB = BA$.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2002/2003

C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica Informatico-Computazionale

Corso di GEOMETRIA I

Compito 7. 1. 2003

1. a) Si stabilisca per quali valori del parametro reale h il seguente sistema lineare ammette soluzioni e le si determinino:

$$\begin{cases} x + 2y - z = h \\ x + hw = 1 \\ x - 2y + (h^2 - 3)z + 2hw = h - 2 \end{cases}$$

b) Si stabilisca per quali valori del parametro reale h i tre vettori:

$$\underline{u} = (1, 1, 1), \underline{v} = (2, 0, -2), \underline{w} = (-1, 0, h^2 - 3)$$

sono linearmente dipendenti.

Si considerino i tre piani $\alpha : x+2y-z = 0$, $\beta : x = h$ e $\gamma : x-2y+(h^2-3)z = 2h$.

c) Si determinino tutte le rette paralle sia ad α che a β.

d) Sia determini h in modo che esista una retta r appartenente a γ e perpendicolare ad α.

e) Si determini per quali valori del parametro reale h i piani α, β e γ appartengono ad uno stesso fascio.

2. Si considerino i vettori $\underline{u} = (1, 0, 1)$ e $\underline{v} = (1, -1, 1)$ di $\mathbb{R}^3$.

a) Si determini il luogo $\mathcal{C}$ dei vettori $\underline{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ di modulo 2 e tali che $\underline{v} \wedge \underline{w}$ è perpendicolare a $\underline{u}$.

b) Esistono vettori di $\mathcal{C}$ paralleli al piano di equazione $x + y + z + 1 = 0$? In caso affermativo, li si determinino.

3. Sia $\mathcal{C}$ la curva di equazioni:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ z = 1 \end{cases}.$$

Si scriva l'equazione cartesiana del cono di vertice $V(0, -1, 0)$ e generatrice la curva $\mathcal{C}$.

4. Data le matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$, si determinino rutte le matrici $B \in \mathbb{R}^{2,2}$ tali che $AB = BA$.