Università desli Studi di Bologna A.A. 2007/2008

C.d.L. in Matematica

Corso di GEOMETRIA I Compito B 10. 1. 2008

1. Si consideri il sistema lineare
$$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ (a+1)x + 2y + z = a + 3 \\ (a-5)x - (a+1)y = (a+1)(a+3) \end{cases}$$
dove a é un parametro reale e i vettori

$v_1 = (2, 1, 1, 0)$, $v_2 = (a{+}1, 2, 1, a{+}3)$, $v_3 = (a{-}5, -(a{+}1), 0, (a{+}1)(a{+}3)) \in \mathbb{R}^4$.

Sia $V_a := \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3)$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori v_1, v_2, v_3.

   a) Si stabilisca per quali valori del parametro reale a il sistema lineare ammette soluzioni.
   b) Si determinino le soluzioni del sistema nei casi in cui esse siano infinite.
   c) Si stabilisca per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{3,3}$ tale che
   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ a+1 & 2 & 1 \\ a-5 & -(a+1) & 0 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
   d) Si determini la dimensione del sottospazio vettoriale $V_a \subset \mathbb{R}^4$ al variare del parametro reale a.
   e) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si determini un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\mathbb{R}^4 = W \oplus V_a$.

Sia $u = (1, 1, -1) \in \mathbb{R}^3$ e siano
$$V := \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid v \wedge u = (0, 0, 0)\},$$
$$W := \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, w = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \ t.c. \ v = w \wedge u\}.$$
Si provi che V e W sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$, se ne scrivano le equazioni (cartesiane e parametriche), se ne determini una base e se ne calcoli la dimensione.

2. Si consideri la retta $r_h : \begin{cases} x - hy + z = 1 \\ x + y = h \end{cases}$, con h parametro reale, e il piano π di equazione $x - y + 2z = 0$.

   a) Si studi la posizione reciproca di r_h e π al variare del parametro reale h (ossia si stabilisca per quali valori del parametro reale h il piano contiene la retta, é parallelo alla retta, incontra la retta in un punto, é ortogonale alla retta).
   b) Al variare del parametro reale h, si determinino tutti i piani dello spazio che contengono la retta r_h e sono ortogonali al piano π.

Università desli Studi di Bologna A.A. 2007/2008
C.d.L. in Matematica
Corso di GEOMETRIA I Compito A 6. 2. 2008

1. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} 4x - y + (a-2)z = a(a-5) \\ 2x + y + z = a \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

dove a é un parametro reale.

a) Si stabilisca per quali valori del parametro reale a il sistema lineare ammette soluzioni e se esistono valori di a per cui il sistema ha una sola soluzione.

b) Si stabilisca se esistono valori del parametro reale a per i quali le soluzioni del sistema costituiscono un sottospazio vettoriale V_a di $\mathbb{R}^3$ e per tali valori si calcoli la dimensione e una base di V_a.

c) Si ponga $a = 7$ e si consideri il sottospazio vettoriale

$$U := \mathcal{L}((4, -1, 5), (2, 1, 1), (2, -1, 3) \subset \mathbb{R}^3$$

generato dalle righe della matrice dei coefficienti del sistema. Si determini un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^3$ tale che $U + W = \mathbb{R}^3$ e $\dim_{\mathbb{R}^3} = 1$.

2. a) Siano

$$A_h := \begin{pmatrix} h-1 & 1 & h \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & h+1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}.$$

Provare che esiste una e una sola matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,2}$ tale che $A_h M = B$ se e solo se la matrice A_h é invertibile.

b) Si calcoli il determinante della matrice $C \in \mathbb{R}^{3,3}$ sapendo che $2C^{-1} + 6I = 0$, dove $I \in \mathbb{R}^{3,3}$ é la matrice identica.

3. Si denoti con $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 4, sia

$$V := \{\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 4}\ \ a_0 + a_1 = 0\},$$

e siano

$$U := \{\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in V\ :\ a_2 = a_3 = a_4\},$$

$$W := \{\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in V\ :\ a_0 = a_4 = 0\},$$

$$Z := \{\ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 \in V\ :\ a_3 = 0\}.$$

a) Mostrare che V e' uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e determinarne una base B.

b) Trovare basi per i sottospazi vettoriali U, W e Z.

c) Stabilire se le somme $U+W$ e $W+Z$ sono dirette.

4. Si considerino i punti $A=(1,2,0)$, $B=(2,-1,1)$, $C_h=(4,-h,h-4)$, dove h é un parametro reale, la retta $r:\begin{cases} x-2=0 \\ x+y+2z=0 \end{cases}$ e il piano π di equazione $x-3y+z=0$.

a) Al variare del parametro reale h, si stabilisca quanti sono i piani dello spazio che passano per i punti A, B, C_h.

b) Al variare del parametro reale h, si determinino tutti i piani dello spazio che passano per i punti A, B, C_h e sono ortogonali al piano π.

c) Al variare del parametro reale h, si determinino tutti i piani dello spazio che passano per i punti A, B, C_h e contengono la retta r.

d) Per $h=7$ si determinino tutti i piani dello spazio che che passano per i punti A, B, C_7 e sono equidistanti dai punti $P=(1,1,1)$ e $Q=(1,0,-2)$.

Università desli Studi di Bologna A.A. 2007/2008

C.d.L. in Matematica

Corso di GEOMETRIA I Compito A 28. 5. 2008

1. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & h & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & h & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

dove h é un parametro reale.

a) Si determinino i ranghi di A e A' al variare del parametro reale h, si stabilisca per quali valori di h il sistema lineare

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix}$$

ammette soluzioni e le si determinino.

b) Siano C_1, C_2, C_3 le colonne della matrice A e sia $U := \mathcal{L}(C_1, C_2, C_3) \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ da esse generato. Si stabilisca se esistono valori del parametro h per i quali esiste un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^4$ tale che $\dim_{\mathbb{R}} V = 2$ e $U \cap V = \{(0,0,0,0)\}$.

2. Si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x - hy = 3 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x - hy = h \\ y - z = 2 - h \end{cases}$$

il punto $A = (1, -2, 1)$ e il piano π di equazione $x + 3y + (h+2)z = 0$, dove h é un parametro reale.

a) Al variare del parametro reale h, si determinino i piani che contengono la retta r e il punto A, stabilendo per quali valori di h sono un finito.

b) Al variare del parametro reale h, si determinino tutti i piani dello spazio che passano per A e sono ortogonali al piano π, stabilendo se esistono valori di h per i quali tali piani sono un numero finito.

c) Al variare del parametro reale h si studi la posizione reciproca delle rette r e s, stabilendo quando sono incidenti, parallele, complanari, sghembe.

d) Stabilire per quali valori di h esiste una e una sola retta ortogonale e incidente entrambe le rette r e s.

3. Si denoti con X lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a 3 (con le usuali operazioni di somma di due polinomi e di moltiplicazione di un numero reale per un polinomio), sia

$$V := \{\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in X :\ a_0 + a_1 = 0\},$$

e siano U, W i seguenti sottospazi di V:

$$U := \{\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in V\ :\ a_2 = a_3\},$$

$$W := \{\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in V\ :\ a_0 = a_3 = 0\}.$$

a) Mostrare che V e' un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione finita determinandone una base.

b) Trovare basi per i sottospazi vettoriali U, W e completarle ad una base di V.

Università desli Studi di Bologna A.A. 2007/2008

C.d.L. in Matematica

Corso di GEOMETRIA I Compito A 18. 6. 2008

1. Si considerino le matrici

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ h & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

dove h é un parametro reale.

a) Si stabilisca per quali valori dei h le matrici A_h e $B \times C_h$ sono tra loro linearmente dipendenti.

b) Per i valori del parametro h per cui le matrici A_h e $B \times C_h$ sono linearmente indipendenti si completi $A_h, B \times C_h$ ad una base dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{2,2}$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali.

2. Si consideri il sistema lineare

$$A_k X = B$$

dove k é un parametro reale e A_k, X, B sono le seguenti matrici:

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & k & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sia $U_k = L(C_1, C_2 C_3)$ il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne della matice A_k e sia V_k il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$A_k X = 0.$$

a) Si stabilisca per quali valori del parametro reale k il sistema lineare $A_k X = B$ ammette soluzioni e le si determinino.

b) Si stabilisca per quali valori del parametro reale k esiste un sottospazio vettoriale T di $\mathbb{R}^3$ tale che $\dim_{\mathbb{R}} U_k \cap T = 1$ e $V_k \bigoplus T = \mathbb{R}^3$ e lo si determini.

3. Nello spazio tridimensionale considerino i punti $P = (0, 1, 1)$ e $Q = (1, 2, -1)$ e la retta r di equazioni parametriche

$$r : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2 \\ z = 2t - 1 \end{cases}.$$

a) Si determini un piano π per P e parallelo alla retta r. Tale piano é unico?

b) Si determini una retta s per P e perpendicolare ad r. Tale retta é unica?

c) Si determini una retta s per P, perpendicolare ad r e incidente con r. Tale retta é unica?

Università degli Studi di Bologna A.A. 2007/2008

C.d.L. in Matematica

Corso di GEOMETRIA I Compito A 12. 2. 2009

1. Sia

$$A_h := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2h \\ 1-h & 2h & h & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4,4}$$

dove h é un parametro reale e siano:

- U_h il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori colonna della matrice A_h,

- V_h il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ costituito dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A_h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$.

i) Si determini $\dim_{\mathbb{R}} U_h$ al variare del parametro reale h e si stabilisca se esistono valori di h per i quali $U_h = \mathbb{R}^4$.

ii) Si determini una base e un sistema di equazioni cartesiane per il sottospazio U_0.

iii) Si determini un sottospazio vettoriale $T \subset \mathbb{R}^4$ tale che $U_0 \bigoplus T = \mathbb{R}^4$. Si stabilisca anche se T é univocamente determinato.

iv) Si determini la dimensione, una base e un sistema di equazioni cartesiane per il sottospazio $V_h \subset \mathbb{R}^4$ al variare del parametro reale h.

v) Si completi una base di V_0 a una base di $\mathbb{R}^4$.

vi) Si determini (se esiste) un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ contenente V_0 e tale che $\dim_{\mathbb{R}} W \cap U_0 = 2$. E' possibile che $\dim_{\mathbb{R}} W = 2$?

vii) Si stabilisca (senza fare calcoli) per quali valori del parametro h esiste una matrice $M \in \mathbb{R}^{4,2}$ tale che $A_h M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Nello spazio tridimensionale ordinario si considerino le rette:

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ 3x - z + 2 = 0 \end{cases}, \quad s : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = t - 2 \\ z = 3t \end{cases}$$

e il punto $P = (1, 0, 1)$

a) Si stabilisca se esiste un piano che contiene le rette r, s e il punto P.

b) Si stabilisca se nel fascio di piani passanti per r esistono piani che incontrano la retta s in un solo punto.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2008/2009
C.d.L. in Matematica Corso di GEOMETRIA I
Compito A 4. 6. 2009

Esercizio 1.

Siano $M_{1\times n}(K)$ e $M_n(K)$ gli insiemi delle matrici $1\times n$ e $n\times n$ a coefficienti nel campo K rispettivamente e siano $B := (\,b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n\,)$, $C := (\,c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n\,) \in M_{1\times n}(K)$.

Si provi che, se $n > 1$, la matrice ${}^tB \cdot C \in M_n(K)$ ha determinante nullo qualunque siano $B, C \in M_{1\times n}(K)$.

Esercizio 2.

Sia $M_2(K)$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti nel campo K, sia $H := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e sia

$$S := \{A \in M_2(K) \quad | \quad AH - H^tA = 0\}.$$

Dopo aver verificato che S è un sottospazio vettoriale di $M_2(K)$, se ne determini una base e la si completi ad una base di $M_2(K)$.

Esercizio 3.

Si consideri l'endomorfismo lineare $f_k\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$f_k(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 4x_2 + 3x_3, x_1 + x_2 - x_3, kx_3),$$

dove k é un parametro reale.

a) Si determinino i valori del parametro k per i quali l'endomorfismo f_k è diagonalizzabile.

b) Per $k = 0$ si determini un endomorfismo lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ distinto da f_0 ma avente lo stesso nucleo e la stessa immagine di f_0.

Esercizio 4.

Nello spazio affine $\mathbb{E}^4$ in cui è fissato un riferimento cartesiano sono assegnati il punto $P = (1, -1, 1, -1)$ e il piano

$$\alpha\colon \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 1 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 - 2 = 0. \end{cases}$$

Si determinino:

a) un sistema di equazioni del sottospazio $S(P, \alpha)$ generato da P e da α;

b) un sistema di equazioni del piano α' per il punto P e parallelo ad α;

c) un sistema di equazioni di una retta sghemba con α;

d) la distanza di P da α;

e) le equazioni di una traslazione che porta α in α'.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2007/2008
C.d.L. in Matematica Corso di GEOMETRIA II (VECCHIO ORD.)
17. 9. 2009

Esercizio 1.

Al variare del parametro reale k sia $f_k : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare espressa rispetto alla base canonica dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k & 0 \\ k & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & k \\ 1 & 0 & k & -k \end{pmatrix}$$

a) Al variare di $k \in \mathbb{R}$ si determini la dimensione, una base e un sistema di equazioni cartesiane di $\operatorname{Ker} f_k$ e di $\operatorname{Im} f_k$.

b) Nel caso $k = 0$ si determini $f_0{}^{-1}(1, 0, 1, 1)$.

c) Nel caso $k = 0$ si determinino gli autovalori e gli autospazi di f_0 e si stabilisca se f_0 é diagonalizzabile.

d) Nel caso $k = 0$ si determini un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^4$ non contenuto in $\operatorname{Ker} f_0$ e tale che $f_0(V) \subseteq V$.

e) Se $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é l'endomorfismo lineare che lascia fissi i vettori dell'iperpiano di equazione $x_2 - x_3 = 0$ e manda il vettore $(0, 1, 0, 0)$ nel vettore nullo, si determini $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 | f_0(x_1, x_2, x_3, x_4) = g(x_1, x_2, x_3, x_4)\}$, stabilendo se esso é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$

Esercizio 2.

Nello spazio affine $\mathbb{E}^4$ in cui è fissato un riferimento cartesiano, si considerino i punti $P_1 = (1, 1, 0, 0)$ $P_2 = (1, 0, 0, 1)$ $P_3 = (0, 1, -1, 0)$. Sia r_1 la retta per il punto P_1 e parallela al vettore $(1, 0, 0, 0)$, sia r_2 la retta per i punti P_2 e P_3 e siano π_1, π_2 i piani di equazioni $\pi_1 : \begin{cases} x_2 - 1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ e $\pi_2 : \begin{cases} x_1 = x_4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ rispettivamente

a) Si determinino tutte le affinitá di $\mathbb{E}^4$ che mandano la retta r_1 nella retta r_2.

b) Si determinino tutte le affinitá di $\mathbb{E}^4$ che mandano il piano π_1 nel piano π_2.

c) Si provi che non esistono affinitá di $\mathbb{E}^4$ che mandano la retta r_1 nella retta r_2 e il piano π_1 nel piano π_2.

d) Si determini il piú piccolo sottospazio affine di $\mathbb{E}^4$ contenente r_2 e π_2.