Università degli Studi di Bologna — A.A. 2012/2013
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I
Prova scritta — 4. 6. 2013

1. Sia h un parametro reale e sia

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 2h & 0 & h+3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & h-2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$$

e sia $f_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare canonicamente associata ad A_h.

a) Si stabilisca per quali valori del parametro h il sistema

$$A_h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ h \\ h-2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ammette soluzioni e se esistono valori di h per i quali esiste una e una solo soluzione.

b) si determinino le equazioni cartesiane dell'immagine e del nucleo di f_k al variare di h, indicando le rispettive dimensioni.

c) Si stabilisca per quali valori di h l'applicazione lineare f_h ha almeno un autospazio di dimensione 2 e per tali valori si determinino le equazioni dell'autospazio.

d) Si determini la forma canonica di Jordan al variare di $h \geq 1$.

2. Siano

$$r = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0, x_2 + 2x_3 = 1\},$$
$$s = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_3 = 1, x_2 = 0\},$$
$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 = 0\},\ W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}.$$

a) Si stabilisca se le rette r, s sono complanari o se sono sghembe.

b) Si determini la dimensione del seguente sottospazio vettoriale dello spazio degli endomorfismi lineari di $\mathbb{R}^3$:

$$L = \{F \in End(\mathbb{R}^3) \mid F(V) \subseteq V,\ F(r \cup s) \subseteq W\}.$$

c) Si determini una retta ortogonale e incidente a r e s, stabilendo se tale retta é univocamente determinata.

d) FACOLTATIVO Si determini (se esiste) un'affinitá ψ di $\mathbb{R}^4$ che trasforma le rette r e s rispettivamente nelle rette

$$r' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = 1, x_3 = 2\},\ s' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_2 = 0, x_3 = 1\}.$$

3. Sia $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ e siano $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rispettivamente la forma bilineare simmetrica e la forma quadratica associate canonicamente a M.

a) Si calcoli il rango r, il radicale R e l'insieme Q dei vettori isotropi di b.

b) Si determini una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a b.

c) Si determini un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^3$ tale che $b|_{V \times V}$ é un prodotto scalare su V.

d) Si determini una trasformazione di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ con $P \in Gl(3, \mathbb{R})$ che porta la forma quadratica q nella sua forma canonica.

4. Sia K un campo di caratteristica diversa da 2,

$$B_h = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ h & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(K), \quad V_h = \{X \in M_{2,2}(K) \,|\, B_h X = O\}.$$

a) Si stabilisca se V_h é un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(K)$ e in caso affermativo se ne calcoli la dimensione al variare di h in K.

b) Il risultato di cui al punto precedente rimane valido se la caratteristica di K é uguale a 2?

Università degli Studi di Bologna A.A. 2012/2013
C.d.L. in Matematica Corso di GEOMETRIA I
Prova scritta 24. 6. 2013

1. Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ hx_1 + x_3 + 2x_4 = 6 - h \\ 3x_1 + x_3 + x_4 = h \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

dove h é un parametro reale e sia $f_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f_h(x_1, \ldots, x_4) = (2x_1 + x_2, hx_1 + x_3 + 2x_4, 3x_1 + x_3 + x_4, 2x_1 + x_2 + x_4).$$

a) Si stabilisca per quali valori di h il sistema ha soluzioni e se, per ognuno di tali valori di h, la differenza di due diverse soluzioni del sistema é ancora una soluzione del sistema.

b) Si determinino le equazioni cartesiane dell'immagine dell'applicazione f_h al variare del parametro h e si stabilisca per quali valori di h il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 6-h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \in Im\, f_h$.

c) Si determinino le equazioni del sottospazio $f_h(V)$, dove V é il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazioni $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 - 2x_1 = 0 \end{cases}$.

d) Si stabilisca se per $h = 3$ l'applicazione f_3 ha almeno un autospazio di dimensione 1.

2. Siano

$$r = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\},$$
$$s_h = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2t + 1, x_2 = ht, x_3 = 7t - 2h\},$$

con h parametro reale.

a) Si studi la posizione reciproca delle rette r, s_h al variare di h e quando sono parallele si determini il piano che le contiene.

b) Si stabilisca se esistono valori di h per i quali le due rette coincidono.

c) Si stabilisca se nel fascio di piani di sostegno la retta r esistono piani ortogonali al piano di equazione $x_3 = 0$

3. Siano

$$S = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0\},$$

$$V = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \subset \mathbb{R}^4,\ W = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_2 = 0\}.$$

a) Si determini la dimensione del seguente sottospazio vettoriale dello spazio degli endomorfismi lineari di $\mathbb{R}^3$:

$$L = \{F \in End(\mathbb{R}^4) \,|\, F(V) \subseteq W,\ F(S) \subseteq V\}.$$

b) Si stabilisca se esiste un'affinitá ψ di $\mathbb{R}^4$ che trasforma la conica S nella conica

$$D = \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ {x_1}^2 - (x_3 - 1)^2 = 0 \end{cases}.$$

4. Sia $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare associata canonicamente alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$$ e siano $b_s : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ rispettivamente la parte simmetrica di b e la forma quadratica definita da $q(v) = b_s(v, v)$.

a) Si determini la matrice associata canonicamente a b_s.

b) Si determini una base $v_1, \cdots, v_4$ di $\mathbb{R}^4$ ortogonale rispetto a b_s e si calcoli $b_s(v_i, v_i)$ per ogni $i = 1, \cdots, 4$.

c) Si determini l'insieme Q dei vettori isotropi di b_s e si calcoli la segnatura di q.

d) Si mostri che esistono sottospazi vettoriali V di $\mathbb{R}^4$ di dimensione due tali che $b_s|_{V \times V}$ é la forma nulla.

e) Si determini una forma quadratica q' su $\mathbb{R}^4$ di segnatura diversa dalla segnatura di q e tale che $q|_V = q'|_V$ dove $V = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = x_2 = 0\}$.

5. Si determini la forma di Jordan della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R}),$$

stabilendo se é diagonalizzabile.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2012/2013

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I

Seconda prova scritta parziale — 16. 7. 2013

1. In $\mathbb{R}^4$ si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x_1 = t-1 \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \\ x_4 = 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(con t parametro reale) e i sottospazi vettoriali

$$V = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

$$W = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0\}.$$

Sia $\quad L := \{F \in End(\mathbb{R}^4) \,|\, F(r) \subset V, F(s) \subset W\}.$

a) Si calcoli la dimensione dell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale L.

b) Si determini il piú piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ che contiene entrambe le rette r, s.

2. Sia $S = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, x_3 = 0\}$. Si risponda alle seguenti domande motivando la risposta.

a) Esiste un'applicazione lineare suriettiva $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Ker f = S$? In caso di risposta positiva se ne fornisca un esempio.

b) Si stabilisca se esiste ed é univocamente determinata un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Ker f = S$? Se tale applicazione esiste si determini $f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

3. Si considerino le matrici

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R}).$$

a) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di A e B e si stabilisca se le due matrici sono diagonalizzabili e se sono simili.

b) Si determini una matrice invertibile $P \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1}BP$ sia in forma di Jordan.

c) Si stabilisca se esiste un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^4$, $V \neq \{0\}$ su cui le due applicazioni $f_A, g_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ (canonicamente associate ad A e B rispettivamente) coincidono.

4. Sia $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica associata canonicamente alla matrice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$$ e sia $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da $q(v) = b(v, v)$.

a) Si stabilisca se b é degenere o non degenere.

b) Posto $V = Span((0, 0, 1, 0), (1, 1, 0, 0))$ si determinino le equazioni cartesiane del sottospazio vettoriale W ortogonale di V rispetto a b e si verifichi che $V \cap W = \{0\}$.

c) Si determini l'insieme dei vettori isotropi di b che stanno in W. Se tale insieme é una conica, si stabilisca di quale conica si tratta.

d) Si determini una forma quadratica q' su $\mathbb{R}^4$ di rango minore di 4 tale che $q|_V = q'|_V$ dove $V = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 0\}$.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2012/2013

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I

Prova scritta — 16. 7. 2013

1. Si considerino i sistemi lineari

$$S_1: \begin{cases} x-2y+z+3=0 \\ 3x+y-z=0 \\ 6x-5y+2z+9=0 \end{cases}, \quad S_2: \begin{cases} x-2y+z+3=0 \\ 3x+y-z=0 \\ 7x-z+h=0 \end{cases}$$

dove h é un parametro reale.

a) Si stabilisca per quali valori di h i due sistemi lineari sono equivalenti.

b) Nello spazio tridimensionale, dove é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$, che cosa rappresenta il sistema S_1?

2. In $\mathbb{R}^4$ si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x_1 = t-1 \\ x_2 = t \\ x_3 = -t \\ x_4 = 2t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

(con t parametro reale) e i sottospazi vettoriali

$$V = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

$$W = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - x_3 = 0, x_2 + x_4 = 0\}.$$

Sia $\quad L := \{F \in End(\mathbb{R}^4) \,|\, F(r) \subset V, F(s) \subset W\}$.

a) Si calcoli la dimensione dell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale L.

b) Si determini il piú piccolo sottospazio affine di $\mathbb{R}^4$ che contiene entrambe le rette r, s.

3. Sia $S = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, x_3 = 0\}$. Si risponda alle seguenti domande motivando la risposta.

a) Esiste un'applicazione lineare suriettiva $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $Ker f = S$? In caso di risposta positiva se ne fornisca un esempio.

b) Si stabilisca se esiste ed é univocamente determinata un'applicazione lineare $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $Ker f = S$? Se tale applicazione esiste si determini $f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

4. Si considerino le matrici

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R}).$$

a) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di A e B e si stabilisca se le due matrici sono diagonalizzabili e se sono simili.

b) Si determini una matrice invertibile $P \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ tale che $P^{-1}BP$ sia in forma di Jordan.

c) Si stabilisca se esiste un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^4$, $V \neq \{0\}$ su cui le due applicazioni $f_A, g_B : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ (canonicamente associate ad A e B rispettivamente) coincidono.

5. Sia $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica associata canonicamente alla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$$ e sia $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma quadratica definita da $q(v) = b(v, v)$.

a) Si stabilisca se b é degenere o non degenere.

b) Posto $V = Span((0,0,1,0),(1,1,0,0))$ si determinino le equazioni cartesiane del sottospazio vettoriale W ortogonale di V rispetto a b e si verifichi che $V \cap W = \{0\}$.

c) Si determini l'insieme dei vettori isotropi di b che stanno in W. Se tale insieme é una conica, si stabilisca di quale conica si tratta.

d) Si determini una forma quadratica q' su $\mathbb{R}^4$ di rango minore di 4 tale che $q|_V = q'|_V$ dove $V = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 0\}$.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2012/2013
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I
Prova scritta — 10. 9. 2013

1. Sia h un parametro reale e sia

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$$

e sia $f_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare canonicamente associata ad A_h.

   a) si determinino le equazioni cartesiane dell'immagine e del nucleo di f_h al variare di h, indicando le rispettive dimensioni.

   b) Si stabilisca per quali valori di h l'applicazione lineare f_h é diagonalizzabile e per tali h si determinino gli autovalori di f_h e le dimensioni dei relativi autospazi.

   c) Si ponga $h = 1$ e si determini la forma canonica di Jordan di f_1.

   d) Si stabilisca per quali valori del parametro h il sistema

$$A_h \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 0 \\ h-2 \\ h \end{pmatrix}$$

   ammette soluzioni e se esistono valori di h per i quali esiste una e una sola soluzione.

2. Siano

$$r_a = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_3 = 0, x_1 = 1 + ax_2\},$$
$$s_a = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 - x_2 = a, x_1 + x_3 = 0\},$$

con a parametro reale.

   a) Si stabilisca per quali valori di a le rette r_a, s_a sono complanari e per quali sono sono sghembe.

   b) Al variare di a si determini il piú piccolo sottospazio affine L_a di $\mathbb{R}^3$ che contiene le rette r_a, s_a.

   c) Al variare di a si determinino tutte le rette di $\mathbb{R}^3$ che sono incidenti e ortogonali ad entrambe le rette r_a, s_a.

   d) Si ponga $a = 2$ e si stabilisca se esiste un'affinitá ψ di $\mathbb{R}^4$ che trasforma le rette

   $r' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_1 = 1, x_3 = 2\}$, $s' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x_2 = x_1, x_3 = 1\}$

   rispettivamente nelle rette r_2 e s_2 .

e) Sia $a = 1$,

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0\}, \; W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}.$$

Si determini la dimensione del seguente sottospazio vettoriale dello spazio degli endomorfismi lineari di $\mathbb{R}^3$:

$$L = \{F \in End(\mathbb{R}^3) \mid F(V) \subseteq W, \; F(r_1 \cup s_1) \subseteq V\}.$$

3. Sia $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ e siano $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rispettivamente la forma bilineare simmetrica e la forma quadratica associate canonicamente a M.

a) Si stabilisca se b é un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

b) Si determini una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a b.

c) Si determini il sottospazio ortogonale $V^\perp$ di

$$V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; 2y - z = 0\}$$

rispetto a b.

d) Si determini una trasformazione di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ con $P \in O(3)$ che porti la forma quadratica q nella sua forma canonica.

4. Sia $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ una matrice assegnata.

a) Si provi che se $X \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ é tale che $X^2 = A$, allora X commuta con la matrice A.

b) Si determinino tutte le matrici $X \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ tali che $X^2 = A$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2012/2013

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I

Prova scritta — 9. 1. 2014

1. Siano r, s le rette di $\mathbb{R}^4$ definite da:

$$r : \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases},$$

siano $V = Span\,(r \cup s)$, $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 = 0, x_3 - 2x_1 = 0\}$,

$$L := \{f \in End(\mathbb{R}^4) \mid f(V) \subset W\}.$$

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che

$$f_{|V} = id_V, \quad f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Si determinino le equazioni cartesiane di V.

b) Si determini la dimensione dell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale L.

c) Si scriva la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e si determinino le equazioni cartesiane e una base di $Im\, f$ e di $ker\, f$.

d) Si determini un sottospazio vettoriale $T \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione 3 tale che $f(T) \subset T$ (inclusione stretta).

e) Si determini una traslazione di $\mathbb{R}^4$ diversa dall'identitá che porta V in sé.

2. Si stabilisca se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

é diagonalizzabile e in caso negativo si determini la sua forma canonica di Jordan, i suoi autospazi e i suoi autospazi generalizzati.

3. Si consideri la forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$b((x, y, z), (x', y', z')) = 2xx' - ax'y - axy' + 2yy' + xz' + x'z + zz',$$

con a parametro reale e sia q la forma quadratica associata.

a) Si determini una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a b.

b) Si stabilisca se esistono valori del parametro reale a per i quali il vettore $(1,0,1)$ é ortogonale rispetto a b al piano di equazione $y = z$.

c) Si determinino i valori del parametro reale a per i quali b é un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.

c) Posto $a = \sqrt{2}$ si calcoli il rango e la segnatura della forma quadratica q e si stabilisca se esiste una trasformazione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ in sé che porta q nella forma quadratica

$$q'((x,y,z)) = 2x^2 + y^2 - z^2,$$

d) Posto $a = 1$, siano

$$Q = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x,y,z) = 0\}, \quad H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2\}.$$

Si stabilisca se esiste un'affinitá di $\mathbb{R}^3$ che porta la conica $Q \cap H$ nella conica di equazioni $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

4. Nello spazio tridimensionale si considerino le rette $r : \begin{cases} x + z = 2 \\ x + hy - 1 = 0 \end{cases}$, $s : \begin{cases} y + z - h = 0 \\ z = 1 \end{cases}$, e il piano $\alpha : x - 3y + 2h = 0$, con h parametro reale.

   a) Si studi la posizione reciproca delle due rette, stabilendo per quali valori di h le due rette incidenti, parallele, sghembe. Per i valori di h per cui le rette sono complanari si determini il piano che le contiene.

   b) Si stabilisca per quali valori del parametro le rette sono contenute nel piano α, per quali valori sono parallele ad α, per quali valori intersecano il piano in un punto.

   c) Posto $h = 0$, si stabilisca se é vero che ogni retta complanare con r é anche complanare con s.

   d) Posto $h = 0$, si stabilisca se esistono piani contenenti la retta r e che non incontrano la retta s.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2012/2013

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I

Prova scritta — 28. 1. 2014

1. In $\mathbb{R}^4$ siano

$$V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 - x_4 = 0\},$$
$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 1 = 0,\ x_2 - x_4 = 0\},$$
$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0\},$$
$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 = 0,\ 3x_2 - x_4 = 0\},$$
$$L := \{f \in End(\mathbb{R}^4) \mid f(V_1) \subset W_1,\ f(S) \subset W_2\}.$$

   a) Si determinino le equazioni cartesiane di $V_2 = Span\, S$.

   b) Si determini la dimensione dell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale L.

2. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Si trovino gli autovalori e i relativi autospazi delle due matrici, stabilendo se sono diagonalizzabili. Nel caso non siano diagonalizzabili, si determinino gli autospazi generalizzati, stabilendo se A e B sono tra loro simili.

   b) Si considerino le applicazione lineari $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ associate canonicamente alle due matrici. Si determini il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare $f - g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ stabilendo anche se vi sono vettori di $\mathbb{R}^4$ che sono mandati da $f - g$ nel vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Sia consideri la forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da

$$b((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_3y_3 + x_4y_4,$$

   e sia q la forma quadratica associata.

   a) Si stabilisca se b é un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$.

   b) Si determini una base ortogonale rispetto a b del sottospazio

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 = 0, x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

c) Si determini una matrice ortogonale che porta la forma quadratica q in forma canonica.

d) Sia $\quad Q = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1\}$,

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 = 2x_3,\ x_2 = 1 - x_1\}.$$

Qualora esista, si determini esplicitamente un'affinitá di $\mathbb{R}^4$ che porta la conica $Q \cap H$ nella conica di equazioni $\begin{cases} x_1^2 - x_3^2 = 0 \\ x_2 = 0, x_4 = 0 \end{cases}$.

4. Nello spazio tridimensionale in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ si considerino i punti $A = (1,1,0)$, $B = (-1,-1,2)$, $C = (1,1,3), D = (2h, 2, -h)$ con h un parametro reale e il piano $\alpha : x + z = h$. Sia r la retta per i punti A, B, s la retta per i punti B, C e t la retta per i punti C, D.

a) Si stabilisca per quali h esiste un piano che contiene i punti A, B, C, D.

b) Si discuta, al variare di h, quanti sono i piani che contengono i punti A, B, D.

c) Esistono valori di h per cui il piano α é ortogonale contemporaneamente alle due rette r e s?

d) Esistono valori di h per i quali le rette r, s, t hanno a due a due un punto in comune?

e) Si stabilisca per quali valori di h esiste un'affinitá che porta la retta r nella retta s e la retta t in sé stessa.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2012/2013
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I
Prova scritta — 12. 2. 2014

1. In $\mathbb{R}^4$ siano

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0\},$$

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 + 1 = 0,\ x_2 - x_4 - 1 = 0\},$$

$$L := \{f \in End(\mathbb{R}^4) \mid f(V) \subset V,\ f_{|S} = 0\}$$

(ove $f_{|S} = 0$ indica che la restrizione di f ad S é l'applicazione nulla.

a) Si determinino le equazioni cartesiane di del piú piccolo sottospazio di $\mathbb{R}^4$ contenente S.

b) Si determini la dimensione dell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale L.

c) Si stabilisca se esistono endomorfismi di L che trasformano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 in un sottospazio della stessa dimensione.

2. Si considerino le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 6 & -3 \\ 9 & 0 & 9 & -4 \end{pmatrix}.$$

a) Si trovino gli autovalori di A e B e i relativi autospazi, stabilendo se le due matrici sono diagonalizzabili e se sono simili. Nel caso non siano diagonalizzabili, si determinino gli autospazi generalizzati delle due matrici e la forma canonica di Jordan di almeno una di esse.

b) Si stabilisca se é possibile scrivere A e B come somma di una matrice diagonale e di una matrice nilpotente. In caso positivo si determinino tali matrici.

c) Indicato con f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ canonicamente associato alla matrice A, si stabilisca se esistono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^4$ di dimensione tre f-invarianti.

d) Indicato con g l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ canonicamente associato alla matrice $B - 2I$ (con I matrice identitá), si determinino il nucleo e l'immagine dell'applicazione lineare g, esplicitandone le equazioni cartesiane e una base.

3. Sia consideri la forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definita da

$$b((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

e sia q la forma quadratica associata.

a) Si determini l'insieme dei vettori isotropi rispetto a b e il radicale di b.

b) Si determini il sottospazio ortogonale rispetto a b del sottospazio

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_4 = 0, x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^4.$$

d) Sia $Q = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid q(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0\}$,

$$H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = x_3,\ x_2 = x_4 - 1\}.$$

Si determini un'affinitá di $\mathbb{R}^4$ che porta la conica $Q \cap H$ in forma canonica, classificando la conica ottenuta.

4. Nello spazio tridimensionale in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ si considerino i punti $A = (1, 2, -1)$, $B = (3, 0, 1)$, $C = (-1, 2, 3)$ e il piano $\alpha : x + 2y + hz + 1 = 0$, con h un parametro reale.

a) Si determinino il piano che contiene i punti A, B, C e si stabilisca se esistono valori di h per i quali tale piano é parallelo al piano α.

b) Si stabilisca se la retta AB e la retta per C e parallela all'asse x sono complanari e in caso affermativo si determini il piano che le contiene.

c) Si determini il luogo dei punti dello spazio equidistanti dai punti A, B, C.