Università degli Studi di Bologna — A.A. 2011/2012
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I
Prova scritta — 8. 1. 2013

1. In $\mathbb{R}^4$ siano

$$S = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 1,\ x_2 + 2x_3 = 0,\ 2x_1 - x_4 = 0\}, \qquad V = Span\, S.$$

Sia $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare tale che

$$Ker f = V, \quad f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e sia

$$L = \{g \in End(\mathbb{R}^4) \mid V \subseteq ker\, g, \quad Im\, g \subseteq Im\, f\}.$$

a) Si determinino le equazioni cartesiane di $V$.
b) Si scriva la matrice associata a $f$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$ e si determini un sistema di equazioni cartesiane per $Im\, f$ e una base di $ker\, f$.
c) Si determini un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^4$ di dimensione 3 tale che $f(W) \subset W$.
d) Si determini la dimensione dell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $L$.
e) Si determini una traslazione di $\mathbb{R}^4$ diversa dall'identitá che porta $S$ in sé.

2. Si stabilisca se le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sono simili e se ne determinino le forme canoniche di Jordan.

3. Si consideri la forma bilineare simmetrica $b_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$b_1((x, y, z), (x', y', z')) = -xx' - x'z - xz' + zz',$$

e sia $q_1$ la forma quadratica associata.

a) Si determinino il rango e il radicale di $b_1$, stabilendo se é un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$.
b) Si determini una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a $b$.

c) Si stabilisca se esiste un cambiamento di coordinate in $\mathbb{R}^3$ attraverso il quale la forma bilineare $b_1$ si trasforma nella forma bilineare

$$b_2((\bar{x},\bar{y},\bar{z}),(\bar{x}',\bar{y}',\bar{z}')) = 2\bar{x}\bar{x}' + \bar{y}\bar{y}' - \bar{z}\bar{z}'.$$

d) Siano

$$Q_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid q_1(x,y,z) = 0\}, \quad H_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}.$$

Si stabilisca se esiste un'affinitá di $\mathbb{R}^3$ che porta la conica $Q_1 \cap H_1$ nella conica di equazioni $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

4. In $\mathbb{R}^3$ si considerino il piano $\alpha$ di equazione $x + y - 3z = 1$ e la retta $r_h$ : $\begin{cases} hx + y = 0 \\ x + y + hz = 2 \end{cases}$ con $h \in \mathbb{R}$.

a) Si determinino tutti i piani di $\mathbb{R}^3$ che incontrano $\alpha$ in una retta.

b) Si stabilisca se esistono piani di $\mathbb{R}^3$ che incontrano $\alpha$ in un solo punto.

c) Si stabilisca se esistono valori di $h$ per i quali la retta $r_h$ giace sul piano $\alpha$ e valori di $h$ per i quali la retta $r_h$ é parallela al piano $\alpha$.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2011/2012

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I

Prova scritta A — 12. 2. 2013

1. In $\mathbb{R}^4$ siano

$$S = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 1,\ x_2 + x_3 = 0,\ x_4 = 0\},$$

$$V = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 = 0,\ x_3 = 0\},$$
$$W = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 = 0,\ x_4 = 0\}.$$

Sia
$$T = \{F \in End(\mathbb{R}^4) \mid F(S) \subseteq W, \quad V \subseteq KerF\}.$$

a) Si determini $SpanS$.

b) Si determini la dimensione dell'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $T$.

2. Sia $k$ un parametro reale e sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che

$$f_k(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_k(\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_k(\begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

a) Si stabilisca per quali valori del parametro reale $k$ l'applicazione lineare $f_k$ esiste ed é univocamente determinata e per tali valori di $k$ si determinino la matrice associata canonicamente a $f_k$, le dimensioni, una base e le equazioni di $Imf_k$ e di $Kerf_k$.

b) Posto $k = 1$ si stabilisca se $f_1$ esiste ed é univocamente determinata.

3. Si stabilisca se la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

é diagonalizzabile e in caso negativo si determini la sua forma canonica di Jordan.

4. In $\mathbb{R}^3$ in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $0xyz$ si considerino i piani
$\pi_1 : x + y + 2z = -1, \quad \pi_2 : y - z + h - 2 = 0, \quad \pi_3 : 2x + (h-3)y = h + 4$
con $h$ parametro reale.

a) Si stabilisca se esistono valori di $h$ per i quali i tre piani formano fascio e valori di $h$ per i quali la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ é parallela al piano $\pi_3$, valori di $h$ per i quali i tre piani hanno in comune un solo punto.

b) Per quali valori di $h$ esiste un piano $\alpha$ ortogonale sia alla retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ sia al piano $\pi_3$?

5. Siano $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare simmetrica e la forma quadratica associate canonicamente alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

a) Si stabilisca se $b$ é un prodotto scalare su $\mathbb{R}^3$ e si determini un vettore di $\mathbb{R}^3$ ortogonale contemporaneamente ai vettori $v = (0, 2, 0)$ e $w = (2, 0, 1)$ rispetto a $b$.

b) Si stabilisca se esiste un'affinitá di $\mathbb{R}^3$che manda la conica

$$Q_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x, y, z) = 1, x = 0\}$$

nella conica

$$Q_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x, y, z) - z - 2 = 0, y = 0\}.$$