Università degli Studi di Bologna
C.d.L. in Matematica
Prova scritta parziale

A.A. 2011/2012
Corso di GEOMETRIA I
12. 2. 2013

1. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 a coefficienti reali e siano
$$p_1(x) = x^3 + hx^2, \quad p_2(x) = x^2 + x + 3, \quad p_3(x) = x^3 + (h+1)x^2 + x + h,$$
tre elementi di V.
   a) Al variare del parametro reale h si determini la dimensione del sottospazio vettoriale $V_h = Span(p_1, p_2, p_3) \subset V$.
   b) Per $h = 1$ si stabilisca se il polinomio $p(x) = x^3 + 2 \in V$ e in caso affermativo si scriva come combinazione lineare di p_1, p_2, p_3.

2. Date le matrici
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$
si stabilisca quanti elementi hanno gli insiemi
$$X = \{A^n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}, \quad Y = \{B^n \,|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

3. In $\mathbb{R}^3$ in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $0xyz$ si considerino i piani
$\pi_1 : x + y + 2z = -1, \quad \pi_2 : y - z + h - 2 = 0, \quad \pi_3 : 2x + (h-3)y = h + 4$
con h parametro reale.
   a) Si stabilisca se esistono valori di h per i quali i tre piani formano fascio e valori di h per i quali la retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ é parallela al piano π_3, valori di h per i quali i tre piani hanno in comune un solo punto.
   b) Per quali valori di h esiste un piano α ortogonale sia alla retta $r = \pi_1 \cap \pi_2$ sia al piano π_3?
   c) Si determini il piano di $\mathbb{R}^3$ contenente la retta r e il punto $A = (0, 1, 1)$.

4. Come possono essere interpretati i risultati ottenuti nell'esercizio 3a) in termini di soluzioni del sistema lineare costituito dall'equazioni dei tre piani?

5. Si stabilisca per quali valori del parametro reale k esiste ed é univocamente determinata un'applicazione lineare $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che
$$f_k(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_k(\begin{pmatrix} k \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_k(\begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ k-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
e per tali valori di k si determinino la matrice associata canonicamente a f_k, le dimensioni, una base e le equazioni di Imf_k e di $Kerf_k$.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2012/2013

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I

Seconda prova scritta parziale — 4. 6. 2013

1. Sia h un parametro reale e sia

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 2h & 0 & h+3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & h-2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$$

e sia $f_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare canonicamente associata ad A_h.

a) Si stabilisca per quali valori di h l'applicazione lineare f_h ha almeno un autospazio di dimensione 2 e per tali valori si determinino le equazioni dell'autospazio.

b) Si determini la forma canonica di Jordan al variare $h \geq 1$.

c) Si stabilisca se esistono valori di h per i quali l'applicazione f_h coincide su un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ con l'applicazione

$$g(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_2 - 2x_4, x_2 - x_4, 2x_4, x_2 - x_4).$$

2. Siano

$$r = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0, x_2 + 2x_3 = 1\},$$
$$s = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_3 = 1, x_2 = 0\},$$
$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 = 0\},\ W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}.$$

a) Si stabilisca se le rette r, s sono complanari o se sono sghembe.

b) Si determini la dimensione del seguente sottospazio vettoriale dello spazio degli endomorfismi lineari di $\mathbb{R}^3$:

$$L = \{F \in End(\mathbb{R}^3) \mid F(V) \subseteq V,\ F(r \cup s) \subseteq W\}.$$

c) FACOLTATIVO Si determini (se esiste) un'affinitá ψ di $\mathbb{R}^4$ che trasforma le rette r e s rispettivamente nelle rette

$$r' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1, x_3 = 2\},\ s' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0, x_3 = 1\}.$$

3. Sia $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ e siano $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rispettivamente la forma bilineare simmetrica e la forma quadratica associate canonicamente a M.

a) Si calcoli il rango r, il radicale R e l'insieme Q dei vettori isotropi di b.

b) Si determini una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a b.

c) Si determini un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^3$ tale che $b|_{V\times V}$ é un prodotto scalare su V.

d) Si determini una trasformazione di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ con $P \in Gl(3, \mathbb{R})$ che porta la forma quadratica q nella sua forma canonica.

4. Esistono due matrici 4×4 a coefficienti reali A_1 e A_2 che non sono tra loro simili, ma sono associate canonicamente a due endomorfismi f_1 e f_2 di $\mathbb{R}^4$ che hanno solo l'autovalore nullo e sono tali che

$$\dim_{\mathbb{R}} ker f_1 = \dim_{\mathbb{R}} ker f_2 = 1\,?$$

In caso di risposta positiva le si determinino, in caso di risposta negativa si spieghi perché non esistono.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2012/2013

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I

Seconda prova scritta parziale — 4. 6. 2013

1. Sia h un parametro reale e sia

$$A_h = \begin{pmatrix} 1 & 2h & 0 & h+3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & h-2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$$

e sia $f_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare canonicamente associata ad A_h.

a) Si stabilisca per quali valori di h l'applicazione lineare f_h ha almeno un autospazio di dimensione 2 e per tali valori si determinino le equazioni dell'autospazio.

b) Si determini la forma canonica di Jordan al variare $h \geq 1$.

c) Si stabilisca se esistono valori di h per i quali l'applicazione f_h coincide su un sottospazio vettoriale di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ con l'applicazione

$$g(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_2 - 2x_4, x_2 - x_4, 2x_4, x_2 - x_4).$$

2. Siano

$$r = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 = 0, x_2 + 2x_3 = 1\},$$

$$s = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_3 = 1, x_2 = 0\},$$

$$V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 = 0\},\ W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 + x_3 = 0\}.$$

a) Si stabilisca se le rette r, s sono complanari o se sono sghembe.

b) Si determini la dimensione del seguente sottospazio vettoriale dello spazio degli endomorfismi lineari di $\mathbb{R}^3$:

$$L = \{F \in End(\mathbb{R}^3) \mid F(V) \subseteq V,\ F(r \cup s) \subseteq W\}.$$

c) FACOLTATIVO Si determini (se esiste) un'affinitá ψ di $\mathbb{R}^4$ che trasforma le rette r e s rispettivamente nelle rette

$$r' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 1, x_3 = 2\},\ s' = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0, x_3 = 1\}.$$

3. Sia $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ e siano $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rispettivamente la forma bilineare simmetrica e la forma quadratica associate canonicamente a M.

a) Si calcoli il rango r, il radicale R e l'insieme Q dei vettori isotropi di b.

b) Si determini una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ rispetto a b.

c) Si determini un sottospazio vettoriale $V \subset \mathbb{R}^3$ tale che $b|_{V\times V}$ é un prodotto scalare su V.

d) Si determini una trasformazione di coordinate $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ con $P \in Gl(3, \mathbb{R})$ che porta la forma quadratica q nella sua forma canonica.

4. Esistono due matrici 4×4 a coefficienti reali A_1 e A_2 che non sono tra loro simili, ma sono associate canonicamente a due endomorfismi f_1 e f_2 di $\mathbb{R}^4$ che hanno solo l'autovalore nullo e sono tali che

$$\dim_{\mathbb{R}} ker f_1 = \dim_{\mathbb{R}} ker f_2 = 1\,?$$

In caso di risposta positiva le si determinino, in caso di risposta negativa si spieghi perché non esistono.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2012/2013
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I
Seconda prova scritta parziale — 24. 6. 2013

1. Sia $f_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ l'applicazione lineare definita da

$$f_h(x_1, \ldots, x_4) = (2x_1 + x_2, hx_1 + x_3 + 2x_4, 3x_1 + x_3 + x_4, 2x_1 + x_2 + x_4),$$

dove h é un parametro reale.

a) Si determinino le equazioni cartesiane dell'immagine dell'applicazione f_h al variare del parametro h e si stabilisca per quali valori di h il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 6-h \\ h \\ 0 \end{pmatrix} \in Im\, f_h$.

b) Si determinino le equazioni del sottospazio $f_h(V)$, dove V é il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di equazioni $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_4 - 2x_1 = 0 \end{cases}$.

c) Si stabilisca se per $h = 3$ l'applicazione f_3 ha almeno un autospazio di dimensione 1.

2. Siano

$$r = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\},$$
$$s_h = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 2t + 1, x_2 = ht, x_3 = 7t - 2h\},$$

con h parametro reale.

Si stabilisca se esistono valori di h per i quali le due rette coincidono.

3. Siano

$$S = \{(x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0\},$$

$$V = Span(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) \subset \mathbb{R}^4,\ W = \{(x_1, \ldots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_2 = 0\}.$$

a) Si determini la dimensione del seguente sottospazio vettoriale dello spazio degli endomorfismi lineari di $\mathbb{R}^3$:

$$L = \{F \in End(\mathbb{R}^4) \mid F(V) \subseteq W,\ F(S) \subseteq V\}.$$

b) Si stabilisca se esiste un'affinitá ψ di $\mathbb{R}^4$ che trasforma la conica S nella conica

$$D = \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ {x_1}^2 - (x_3 - 1)^2 = 0 \end{cases}.$$

4. Sia $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma bilineare associata canonicamente alla matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ e siano $b_s : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ e $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ rispettivamente la parte simmetrica di b e la forma quadratica definita da $q(v) = b_s(v, v)$.

   a) Si determini la matrice associata canonicamente a b_s.

   b) Si determini una base $v_1, \cdots, v_4$ di $\mathbb{R}^4$ ortogonale rispetto a b_s e si calcoli $b_s(v_i, v_i)$ per ogni $i = 1, \cdots, 4$.

   c) Si determini l'insieme Q dei vettori isotropi di b_s e si calcoli la segnatura di q.

   d) Si mostri che esistono sottospazi vettoriali V di $\mathbb{R}^4$ di dimensione due tali che $b_s|_{V\times V}$ é la forma nulla.

   e) Si determini una forma quadratica q' su $\mathbb{R}^4$ di segnatura diversa dalla segnatura di q e tale che $q|_V = q'|_V$ dove $V = \{(x_1, \cdots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 = x_2 = 0\}$.

5. Si determini la forma di Jordan della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{4,4}(\mathbb{R}),$$

stabilendo se é diagonalizzabile.