Università degli Studi di Bologna — A.A. 2015/2016
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I
Test di autovalutazione — 3. 11. 2015

Esercizio 1.

Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & h-1 & 1 \\ 1 & h+1 & 2(h-1) & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -h \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

con h parametro reale.

a) Si determinino le soluzioni del sistema lineare $AX = B$ al variare di h.

b) Per $h = -1$ si determinino le soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$, stabilendo se tra esse si possono trovare tre vettori linearmente indipendenti.

Esercizio 2.

Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e siano v_1, v_2, v_3, v_4 i vettori colonna di A.

a) Si riduca la matrice A per righe e se ne calcoli il rango.

b) Si determinino i sottoinsiemi massimali di $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ costituiti da vettori linearmente indipendenti.

c) Si determini l'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ che si possono scrivere come combinazione lineare dei vettori colonna della matrice A.

Esercizio 3.

Siano

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X \in M_3((\mathbb{R})).$$

Si stabilisca per quali valori del parametro reale k é possibile risolvere l'equazione matriciale

$$XA + kX = B$$

e se per tali valori di k la matrice X é univocamente determinata.

Esercizio 4.

Si provino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) Date due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ risulta $(AB)^t = B^t A^t$ (dove A^t indica la matrice trasposta di A).

b) Date due matrici $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, i sistemi lineari omogenei $AX = 0$ e $BX = 0$ sono equivalenti se e solo se le matrici A e B hanno lo stesso rango.

c) Dati due vettori u, v dello spazio tridimensionale applicati in un punto O e aventi direzioni diverse, tutti i vettori applicati in O e ortogonali contemporaneamente a u e v sono tra loro proporzionali.

Esercizio 5.

Nello spazio tridimensionale, in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ di versori i, j, k, si considerino i vettori $u_a = 2i + aj - k$, $v = i - j + 2k$, $w = i + j - 2k$, con $a \in \mathbb{R}$.

a) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che u_a sia ortogonale ai vettori v e w?

b) Esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che i vettori $i, v, u_a \wedge w$ siano complanari?

Università degli Studi di Bologna | A.A. 2015/2016
C.d.L. in Matematica | Corso di GEOMETRIA I
Argomenti del I semestre | 13. 1. 2016 A

1. Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3h \\ -3 & h-4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ h+2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

con h parametro reale.

Sia U il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne della matrice A e sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dalle righe della matrice A.

a) Si determinino i valori del parametro reale h per i quali il sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni.

b) Per i valori del parametro reale h per i quali il sistema ammette infinite soluzioni, si scrivano le equazioni del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dalle soluzioni del sistema lineare $AX = B$.

c) Si ponga $h = -2$ e si determini un sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^3$ di dimensione due tale che $U \cap W = V \cap W$.

2. In $\mathbb{R}^3$ in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $0xyz$ si considerino le rette

$$r: \begin{cases} x + (h-2)y - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = t \\ y = t - (h+1) \\ z = t \end{cases},$$

con h parametro reale, il punto $A = (1, 0, 1)$, il piano $\alpha : x - 3z + 2 = 0$.

a) Al variare del parametro h si stabilisca quante sono le rette ortogonali e incidenti le rette r e s.

b) Si stabilisca se esistono valori di h per i quali il piano α contiene una retta parallela ad r.

c) Si scrivano le equazioni dei piani ortogonali alla retta s e aventi distanza 2 dal punto A.

3. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di 2 a coefficienti reali, siano

$$p_1 = 2 + x + x^2, \quad p_2 = 1 + x^2, \quad p_3 = 3 + 2x + x^2 \in V,$$

e siano

$$U_1 = Span(p_1, p_2, p_3) \subset V, \quad U_2 := \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 \in V \mid a_0 + 2a_1 - 3a_2 = 0\} \subset V.$$

a) Si stabilisca se $1 + x \in U_1$ e se $1 + x \in U_2$.

b) Si determini una base per ciascuno dei sottospazi vettoriali U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$, $U_1 + U_2$.

c) Si stabilisca se il polinomio $p(x) = x + x^2$ puó essere scritto come somma di un polinomio di U_1 e di un polinomio di U_2 e se ció é possibile in un unico modo.

4. Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni.

   a) Se U, W, Z sono sottospazi vettoriali di un K-spazio vettoriale V tali che $U \bigoplus W = U \bigoplus Z$, allora $W = Z$.

   b) Data una qualunque matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$, la matrice $A + {}^t A$ é una matrice simmetrica.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2015/2016
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I
Argomenti del I semestre — 26. 1. 2016 A

1. Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h & -1 \\ 2 & h & -h \\ h & h & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con h parametro reale.

a) Si determinino i valori del parametro reale h per i quali il sistema lineare $AX = B$ ammette soluzioni, precisando per quali valori le soluzioni sono infinite.

b) Per $h = 1$ si scrivano le equazioni del piú piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ che contiene le soluzioni del sistema lineare $AX = B$.

c) Si stabilisca per quali h esiste una matrice $M \in M_{3,2}(\mathbb{R})$ tale che $A \cdot M = C$ e se tale matrice é univocamente determinata.

2. In $\mathbb{R}^3$ in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $0xyz$ si considerino i punti

$$A = (2, 1, -2),\ B = (0, -1, 0),\ C = (3, 2 - h, h - 3),\ D = (1, 0, 1),$$

con h parametro reale.

a) Al variare del parametro h si determinino tutti i piani che contengono i punti A, B, C.

b) Si determinino i valori di h per i quali esiste un piano per l'origine parallelo contemporaneamente alle rette AB e CD.

c) Si determinino i valori di h per i quali le rette AB e CD sono sghembe.

3. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale delle matrici 2×2 a elementi reali, siano

$$U_1 = \{ \begin{pmatrix} a & -a + b \\ 2a - b & a - b + c \end{pmatrix} \in V \mid a, b, c \in \mathbb{R} \},$$

$$U_2 = Span(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) \subset V.$$

a) Si calcoli la dimensione e si determini una base dei sottospazi vettoriali U_1 e U_2 di V.

b) Si determini una base dei sottospazi $U_1 \cap U_2$ e $U_1 + U_2$, stabilendo se la somma é diretta.

c) Si determini, se esiste, un sottospazio vettoriale W di V tale ca $W \bigoplus U_1 = M_2(\mathbb{R})$.

4. Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) Se $U \subsetneq W$ sono sottospazi vettoriali di un K-spazio vettoriale V tali che U é strettamente contenuto in W e U', W' sono due sottospazi vettoriali di V tali che $U \bigoplus U' = W \bigoplus W'$, allora $U' \supsetneq W'$ (cioé U' contiene propriamente W').

b) Se una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ é invertibile, allora anche la matrice $A^2 - 2A$ é invertibile.

Università degli Studi di Bologna | A.A. 2015/2016
C.d.L. in Matematica | Corso di GEOMETRIA I
Argomenti del I semestre | 15. 2. 2016 B

1. Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} h & -1 & 1 \\ 0 & 1 & h-1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix},$$

con h parametro reale.

a) Al variare del parametro reale h si determinino la dimensione e una base del sottospazio vettoriale U_h di $\mathbb{R}^3$ costituito delle soluzioni sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

b) Per $h = 1$ si scrivano le equazioni del piú piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ che contiene le soluzioni del sistema lineare $AX = B$.

2. In $\mathbb{R}^3$ in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $0xyz$ si considerino i piani

$$\alpha : y + z = 2, \quad \beta : x + y - z = 0$$

e sia

$$\pi : ax + by + cz + d = 0, \; a, b, c, d \in \mathbb{R}, \; (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

un generico piano dello spazio.

a) Sotto quali condizioni sui coefficienti a, b, c, d il piano π appartiene al fascio di piani individuato da α e β? Sotto quali condizioni sui coefficienti a, b, c, d i tre piani α, β, π hanno un solo punto in comune?

b) Esistono valori di a, b, c, d per i quali i tre piani si incontrano a due a due in una retta tale che le tre rette che restano individuate siano tra loro parallele?

c) Esistono valori di a, b, c, d per i quali il piano π passa per il punto $P = (-1, 0, 1)$ e contiene la retta $\alpha \cap \beta$?

3. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di 3 a coefficienti reali, siano

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 1 + x^2 + hx^3, \quad p_3 = x^2 - 2x^3 \in V,$$

con h parametro reale e siano

$$U_1 = Span(p_1, p_2, p_3) \subset V,$$

$$U_2 := \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in V \mid a_0 + a_2 - a_3 = 0, a_0 = a_1\} \subset V.$$

a) Si determini la dimensione e una base di U_1 al variare del parametro h, la dimensione e una base di U_2 .

b) Al variare del parametro h si determini una base per ciascuno dei sottospazi vettoriali $U_1 \cap U_2$, $U_1 + U_2$, stabilendo se vi sono valori di h per i quali $V = U_1 \bigoplus U_2$.

c) Si determini un sottospazio vettoriale W di V che contenga il polinomio $p(x) = x + x^2$ e tutti i vettori di U_2.

4. Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) Se v_1, v_2, v_3 sono tre vettori non nulli di $\mathbb{R}^3$ tali che $v_3 = v_1 \wedge v_2$, allora essi sono linearmente indipendenti.

b) Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, allora esiste una matrice $X \in M_n(\mathbb{R})$ tale che $A \cdot X = B$ se e solo se A é una matrice invertibile.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2015/2016
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I
Argomenti del I semestre — 31. 5. 2016 A

1. Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 1 & 1 & -k & k-1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \\ k^2+k-1 \end{pmatrix},$$

con h parametro reale.

a) Al variare del parametro reale k si determinino le soluzioni del sistema lineare $AX = B$.

b) Per $k = 1$ si scrivano le equazioni del piú piccolo sottospazio vettoriale U_1 di $\mathbb{R}^4$ che contiene le soluzioni del sistema lineare $AX = B$.

c) Per $k = 1$ si stabilisca se il vettore ${}^t(1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$ appartiene al sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ generato dalle prime tre colonne della matrice A.

2. In $\mathbb{R}^3$ in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $0xyz$ si considerino i punti $A = (1, 2, -1), B = (2, 1, k)$, con k parametro reale, e i piani

$$\alpha : x + y = 1, \quad \beta : 2y + z + 3 = 0.$$

a) Si scrivano le equazioni cartesiane della retta r per il punto A e parallela ai piani α e β.

b) Esistono valori di k per i quali la retta AB e la retta $\alpha \cap \beta$ sono ortogonali?

c) Si determinino la rette per A e complanari con la retta $\alpha \cap \beta$.

3. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale delle matrici 2×2 a elementi reali, siano

$$U_1 = Span(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}), \quad U_2 = Span(\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}) \subset V.$$

a) Si determini una base dei sottospazi $U_1 \cap U_2$ e $U_1 + U_2$, stabilendo se la somma é diretta.

b) Si determini, se esiste, un sottospazio vettoriale W di V tale che

$$W \oplus U_1 = M_2(\mathbb{R}).$$

c) Si stabilisca se esistono $k \in \mathbb{R}$ tali che la matrice $\begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio vittoriale U_2.

4. Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) Se S_1 e S_2 sono due sottoinsiemi di uno spazio vettoriale V, allora

$Span(S_1 \cup S_2) \subset (Span\, S_1) \cup (Span\, S_2)$, e $(Span S_1) \cap (Span S_2) = Span(S_1 \cap S_2)$.

b) Sia $A \in M_{(m,n)}(\mathbb{R})$ di rango r. Se il sistema lineare $AX = b$ ammette soluzione per ogni $b \in \mathbb{R}^m$, allora $r = m$.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2015/2016
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I
Argomenti del I semestre — 24. 6. 2016 A

1. Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & k-1 \\ 2 & 5 & -1 \\ k & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

con k parametro reale.

a) Si stabilisca per quali valori del parametro reale k le colonne della matrice A sono linearmente indipendenti.

b) Al variare del parametro reale k si determinino le soluzioni del sistema lineare $AX = B$.

c) Per $k = 1$ si scrivano le equazioni del piú piccolo sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^3$ che contiene le soluzioni del sistema lineare $AX = B$.

d) Per $k = 1$ si scrivano le equazioni del sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne della matrice A.

2. In $\mathbb{R}^3$ in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $0xyz$ si considerino i punti $A = (1, -1, 2), B = (1, -, 3, 0)$ e il vettore $u = (1, 1, -2)$.

a) Si scrivano le equazioni cartesiane della retta r per i punti A e B e della retta s per A e parallela al vettore u.

b) Si scrivano le equazioni di tutti i piani paralleli sia a r sia a s.

c) Esistono piani per il punto A ortogonali sia a r sia a s?

d) Si calcoli la distanza del punto $P = (1, 1, 1)$ dalla retta r.

3. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale di 3 a coefficienti reali, siano

$$p_1 = -x^3 + 1, \quad p_2 = 2x^2 + x, \quad p_3 = 2x^3 - x^2, \quad p_4 = x^2 + x + 2 \in V,$$

e siano

$$U_1 = Span(p_1, p_2), \quad U_2 = Span(p_3, p_4) \subset V,$$
$$S := \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in V \mid p(0) = 1, p(-1) = 0\} \subset V.$$

a) Si determini una base per ciascuno dei sottospazi $U_1, U_2, U_1 + U_2, U_1 \cap U_2$.

b) Si stabilisca per quale valore del parametro reale h il polinomio

$$p = x^3 - hx^2 + (1-h)x + 3 \in U_1 + U_2$$

e per tale valore di h lo si scriva come somma di un polinomio di U_1 e di uno di U_2, stabilendo se tale espressione é unica.

c) Si stabilisca se S é un sottospazio vettoriale di V e in caso negativo si determini il sottospazio $Span(S)$.

4. Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) Se S_1 e S_2 sono due sottospazi di uno spazio vettoriale V tali che

$$\dim S_1 + \dim S_2 = \dim V,$$

allora $V = S_1 \oplus S_2$.

b) Siano $A \in M_{(m,n)}(\mathbb{R})$, $\tilde{A} \in M_{(l,n)}(\mathbb{R})$, $B \in M_{(m,1)}(\mathbb{R})$, $\tilde{B} \in M_{(l,1)}(\mathbb{R})$. Allora i due sistemi lineari $AX = B$, $\tilde{A}X = \tilde{B}$ hanno le stesse soluzioni se e solo se $l = m$, rango $A =$ rango $\tilde{A}$ e rango $B =$ rango $\tilde{B}$.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2015/2016
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA I
Argomenti del I semestre — 12. 7. 2016 A

1. Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & k \\ 3 & -3 & 3k \\ k & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -1 \end{pmatrix},$$

con k parametro reale.

a) Al variare del parametro reale k si discuta la risolubilitá del sistema lineare $AX = B$.

b) Per $k = -1$ si scrivano le equazioni del piú piccolo sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^3$ che contiene le soluzioni del sistema lineare $AX = B$.

c) Per $k = -1$ si stabilisca se il vettore ${}^t(2,1,-1) \in \mathbb{R}^3$ appartiene al sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ generato dalle colonne della matrice A.

d) Si stabilisca se esistono valori di k per i quali il vettore ${}^t(2,1,-1)$ appartiene allo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$.

2. In $\mathbb{R}^3$ in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $0xyz$ sono date le rette

$$r_1 : \frac{x-1}{2k} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4k}, \quad r_2 : \begin{cases} x - ky = 0 \\ z = 0 \end{cases}, \quad r_3 : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = (1-k)t \end{cases},$$

con k parametro reale.

a) Si stabilisca se esistono valori di k per i quali le tre rette r_1, r_2, r_3 si incontrano in un punto.

b) Si stabilisca se esistono valori di k per i quali le tre rette r_1, r_2, r_3 giacciono su uno stesso piano.

c) Si determinino i piani per r_3 e paralleli al vettore $v = (1,1,0)$.

d) Al variare del parametro reale k si determini il piú piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ che contiene $r_1 \cup r_2$.

3. Sia $V = \mathbb{R}^4$, siano

$$v_1 = (1,1,1,0),\ v_2 = (0,-1,1,1),\ v_3 = (3,3,0,2), v_4 = (1,0,-1,3), v_5 = (1,2,0,-1),$$

e sia $U = Span(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$.

a) Si determini la dimensione di W.

b) Partendo dall'insieme di generatori $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ si utilizzi il metodo degli scarti successivi per determinare una base B di W.

c) Si verifichi che il vettore $v = (2, 2, -1, 2) \in W$ e se ne determinino le componenti rispetto a B.

d) Si determini, se esiste, un sottospazio vettoriale U di V tale che

$$W \cap U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x_1 - 2x_4 = x_3,\ x_2 = x_3\}.$$

4. Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) Dati i sottoinsiemi

$$S_1 = \{(a, b, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}, \quad S_1 = \{(a, 0, 0, b) \mid a, b, \in \mathbb{R}\},$$

allora $S_1 \cap S_2$ é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensone 2 e $S_1 \cup S_2$ contiene quattro vettori linearmente indipendenti.

b) Esiste una $A \in M_2(\mathbb{R})$ tale che

$$^t(A^{-1} - 3I_2) = 2\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

(dove I_2 é la matrice identitá 2×2), ma tale matrice non é univocamente determinata.

c) Per ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ non invertibile esiste una matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ diversa dalla matrice nulla $n \times n$ tale che AB sia la matrice nulla $n \times n$.

Università degli Studi di Bologna
C.d.L. in Matematica
Argomenti del I semestre

A.A. 2015/2016
Corso di GEOMETRIA I
15. 9. 2016

1. Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ k & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ k+4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

con k parametro reale.

a) Al variare del parametro reale k si stabilisca se lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX = 0$ contiene due vettori linearmente indipendenti.

b) Al variare del parametro reale k si discuta la risolubilitá del sistema lineare $AX = B$.

c) Per $k = -1$ si scrivano le equazioni del piú piccolo sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^3$ che contiene le soluzioni del sistema lineare $AX = B$.

d) Per $k = -1$ si stabilisca se il vettore $(2, 1, 2) \in \mathbb{R}^3$ appartiene al sottospazio V di $\mathbb{R}^3$ generato dalle righe della matrice A.

2. In $\mathbb{R}^3$ in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali $0xyz$ sono dati il piano α di equazione $x - y + z = 0$ e su di esso la retta r_1 passante per il punto $A = (1, 1, 0)$ e per il punto $B = (0, 1, 1)$ e la retta

$$r_2 : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + (1-k)z + 1 = 0 \end{cases}$$

con k parametro reale.

a) Si stabilisca se esistono valori di k per i quali le rette r_1, r_2 si incontrano in un punto.

b) Si stabilisca se esistono valori di k per i quali la retta r_2 é contenuta in infiniti piani ortogonali al piano $\beta : x = 2y$.

c) Si determinino tutti i piani paralleli alla retta r_1.

d) Al variare del parametro reale k si determinino (se esistono) tutte le rette per il punto $O = (0, 0, 0)$ sghembe sia con r_1 sia con r_2.

e) Al variare del parametro reale k si determini il piú piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ che contiene $r_1 \cup r_2$.

3. Sia $V = M_2(\mathbb{R})$, siano

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}, \ M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ M_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

e sia $W = Span(M_1, M_2, M_3, M_4, M_5)$.

a) Si determini una base B di W tale che $B \subset \{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5\}$.

b) Si verifichi che la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in W$ e se ne determinino le componenti rispetto a B.

c) Si determini, se esiste, un sottospazio vettoriale U di V tale che

$$W \oplus U = V.$$

4. Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) Non esiste alcun sottospazio vettoriale proprio dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore o uguale a due che contenga l'insieme

$$S = \{ax^2 + bx + c \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \mid a^2 = c^2\}.$$

b) L'insieme V delle matrici $A \in M_3(\mathbb{R})$ che hanno una riga nulla costituisce un sottospazio vettoriale di $M_3(\mathbb{R})$ di dimensione 6 e lo stesso vale per l'insieme W delle matrici $B \in M_3(\mathbb{R})$ che hanno la prima colonna nulla.