Università degli Studi di Bologna — A.A. 2016/17
C.d.L. Magistrale in Matematica — Corso di Elementi di Algebra
Esercitazione scritta del 19.12.2016

Esercizio 1.

Data la superficie $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, si stabilisca:

a) se il gruppo G delle isometrie di S é finito o infinito e se contiene rotosimmetrie.

b) se il gruppo G ha un sottogruppo isomorfo al gruppo $Z_2 \times Z_2$.

Esercizio 2.

Sia $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 1 + 2 + \cdots + n = \frac{(n+3)(n-2)}{2}\}$.

a) Provare che se $n \in A$, allora anche $n + 1 \in A$.

b) É vero che $A = \mathbb{N}$? Perché?

Esercizio 3.

Sia considerino le equazioni

$$9x + 12y = 6, \quad 4x + my = 2,$$

dove m é un intero e x, y sono incognite.

a) Si determinino tutte le soluzione intere della prima equazione.

b) Si stabilisca se esiste una soluzione intera (x_0, y_0) della prima equazione con x_0 divisibile per 125.

c) Mostrare che se la seconda equazione ha soluzioni intere, allora m é dispari o é il doppio di un dispari

d) Per $m = 5$ si determinino, se estono, le soluzioni intere comuni alle due equazioni.

Esercizio 4.

Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi gaussiani e per ogni $t \in \mathbb{N}$ sia $w_t \in \mathbb{Z}[i]$ l'elemento definito da $w_t = t + 6 + (3t - 2)i$.

a) Verificare che per ogni $t \in \mathbb{N}$, $\quad w_t \in (3 - i)$

b) Calcolare il massimo comun divisore tra w_1 e w_3.

Esercizio 5.

É possibile che due espressioni del tipo

$$0, a_1a_2a_3\cdots \quad \text{e} \quad 0, b_1b_2b_3\cdots,$$

con $a_i, b_i \in \mathbb{N}$, $\quad 0 \leq a_i,\ b_i \leq 9$ rapresentino lo stesso numero reale? Se sí, fornirne un esempio.

Esercizio 6.

Siano u e v due numeri complessi che soddisfano le condizioni

$$u^2 - 6u = -1, \quad v^2 - v = u.$$

Si dia una dimostrazione diretta del fatto che v é algebrico.

Esercizio 7.

Sia $u \in \mathbb{C}$ una delle radici complesse del polinomio $f = x^3 + 3x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Scrivere gli elementi u^3 e $\frac{1}{u+1}$ di $\mathbb{Q}(u)$ nella forma $au^2 + bu + c$ con $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

b) Provare che $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(u^2)$.

Esercizio 8.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni, motivando adeguatamente la risposta.

a) Il campo $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ é denso in $\mathbb{R}$.

b) Tutte le estensioni semplici di un dato sottocampo K di $\mathbb{C}$ sono tra loro isomorfe.

c) Tutte le estensioni trascendenti semplici di un dato sottocampo K di $\mathbb{C}$ sono tra loro isomorfe.

d) Ogni sottoanello di $\mathbb{C}$ é un sottocampo di $\mathbb{C}$.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2016/17
C.d.L. Magistrale in Matematica Corso di Elementi di Algebra
Prova scritta del 9.1.2017

Esercizio 1.

Data la piramide di base $Q := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ e altezza il segmento $OH = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 0,\ 0 \leq z \leq 3\}$

a) si stabilisca se il gruppo G delle isometrie di S é finito o infinito;

b) si stabilisca se il gruppo G ha un sottogruppo isomorfo al gruppo D_4.

Esercizio 2.
Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali e $\sqsubseteq$ la relazione d'ordine in $\mathbb{N}$ cosí definita:
per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, $m \sqsubseteq n \iff [(m = n) \vee (m \leq 50 \text{ e } m \leq n)]$.

a) Si stabilisca se l'ordine $\sqsubseteq$ é totale.

b) Trovare, se esiste, il minimo di $(\mathbb{N}, \sqsubseteq)$.

c) Elencare gli elementi dell'insieme $\{a \in \mathbb{N} \mid 48 \sqsubseteq a,\ a \sqsubseteq 60\}$.

Esercizio 3.
Sia $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ l'applicazione definita da $f(x, y) = 144x + 60y$.
Si determinino l'immagine e il nucleo di f.

Esercizio 4.

Sia n il numero naturale 487305.

a) Si stabilisca se n é somma di due quadrati e in caso positivo determinarli.

b) Si stabilisca se n é contenuto nell'ideale di $\mathbb{Z}[i]$ generato da $8 - i$.

Esercizio 5.

Qual é il valore corretto da attribuire alla somma infinita

$$9 + 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + 0,00009 + 0,000009 + \cdots?$$

Esercizio 6.

Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da $f(z) = z^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

a) Determinare tutti i numeri complessi z tali che $f(z) = 0$, stabilendo se sono algebrici.

b) Determinare tutti i numeri complessi z tali che $f(z) = z$.

Esercizio 7.

Sia u il numero reale $1+\sqrt{\sqrt{6}-1}$.

a) Provare che u é algebrico su $\mathbb{Q}$.

b) É vero che se $f \in \mathbb{Q}[x]$ é un qualunque polinomio di cui u é radice, allora vale anche $f(1-\sqrt{\sqrt{6}-1})=0$?

c) Esistono campi K tali che $\mathbb{Q} \subset K \subset \mathbb{Q}(u)$ (con $\subset$ inclusione stretta)?

Esercizio 8.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni, motivando adeguatamente la risposta.

a) Sia $f \in \mathbb{Z}[x]$, $n \in \mathbb{N}$. Se $\alpha \in \mathbb{C}$ é un numero complesso tale che $f(\alpha)=f(n)$, allora α é un numero algebrico.

b) Esistono omomorfismi di anelli da $\mathbb{Z}[i]$ a $\mathbb{Z}$.

c) Ogni sottocampo ordinato di $\mathbb{R}$ é archimedeo.

d) $\mathbb{Q}[\sqrt{6}]$ é un sottocampo di $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2016/17
C.d.L. Magistrale in Matematica Corso di Elementi di Algebra
Prova scritta del 27.1.2017

Esercizio 1.

Data la superficie $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, -3 \leq z \leq 3\}$, sia G il suo gruppo delle isometrie.

a) Si elenchino i tipi di isometrie dello spazio contenute in G.

b) Si stabilisca se per ogni n intero positivo esiste un elemento g di G di periodo n.

c) Si stabilisca per quali n esiste un sottogruppo di G isomorfo al gruppo diedrale D_n.

Esercizio 2.

a) Trovare il MCD di 3975 e di 546 ed esplicitare l'identitá di Bezout.

b) Determinare un numero $a \in \mathbb{Z}$ tale che

$$\{3975x + 546y \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = \{at \mid t \in \mathbb{Z}\}.$$

Esercizio 3.

Nell'anello degli interi gaussiani $\mathbb{Z}[i]$

a) si decompongano 1221 e $5 + 7i$ in prodotto di elementi irriducibili,

b) si stabilisca se l'deale $(1221, 5 + 7i)$ é massimale.

Esercizio 4.

a) Determinare la scrittura posizionale in base 7 del numero $(4581)_{10}$.

b) Determinare la scrittura posizionale in base 10 del numero $(110101)_7$.

Esercizio 5.

Sia u il numero complesso non nullo $u = cos\frac{5}{6}\pi + isen\frac{5}{6}\pi$.
Si determini l'ordine dei sottogruppi $< u^2 >$ e $< u^5 >$ del gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^*$.

Esercizio 6.

Sia $u \in \mathbb{C}$ una delle radici complesse del polinomio $f = x^3 - x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, sia $v = u^2$.

a) Provare che v é radice del polinomio a coefficienti razionali $x^3 - 2x^2 + x - 1$ e stabilire se $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(v)$.

b) Stabilire se esiste $z \in \mathbb{Q}(u) \setminus \mathbb{Q}$ tale che $z^2 \in \mathbb{Q}$.

c) Scrivere u^4 e $\frac{1}{2+u}$ nella forma $au^2 + bu + c$ con $a, b, c \in \mathbb{Q}$

Esercizio 7.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni, motivando adeguatamente la risposta.

a) Gli unici omomorfismi di anelli $\mathbb{Z}[i] \to \mathbb{Z}[i]$ sono l'identitá e il coniugio.

b) L'insieme $X = \{\frac{n}{n^2+1} \mid n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Q}$ ha massimo e minimo.

c) L'insieme T dei numeri reali della forma $a + b\sqrt{2}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$ coincide con $\mathbb{R}$.

d) Sul campo $\mathbb{Z}_3$ non esiste alcun ordinamento totale che lo renda un campo ordinato.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2016/17
C.d.L. Magistrale in Matematica Corso di Elementi di Algebra
Prova scritta del 10.2.2017

Esercizio 1.

Dato il solido $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -3 \leq x \leq 3,\ -1 \leq y \leq 1,\ 0 \leq z \leq 10\}$, sia G il suo gruppo delle isometrie.

a) Si stabilisca se G contiene rotosimmetrie.

b) Si stabilisca per quali interi positivi n esiste un omomorfismo di gruppi iniettivo da G al gruppo delle permutazioni S_n. (Giustificare la risposta)

c) Si stabilisca per quali n esiste un omomorfismo di gruppi iniettivo da G al gruppo diedrale D_n. (Giustificare la risposta)

Esercizio 2.

Si consideri l'anello $A = \mathbb{Z}_{24}$.

a) Si determinino tutti gli elementi invertibili e tutti gli zero divisori di A.

b) Si provi che $[5^k]_{24}$ é invertibile in A per ogni k naturale. Questo significa che gli elementi invertibili di A sono infiniti?

Esercizio 3.

Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi gaussiani e siano $\alpha = 2 + 11i$, $\beta = 7 + 6i \in \mathbb{Z}[i]$ due suoi elementi

Determinare due elementi γ e δ di $\mathbb{Z}[i]$ tali che $\alpha = \beta\gamma + \delta$ con $|\delta| < |\beta|$, stabilendo se sono univocamente determinati.

Esercizio 4.

Descrivere il numero reale $3^{\frac{3}{4}}$ come sezione di Dedekind.

Esercizio 5.

Sia ω il numero complesso $\omega = cos\frac{2}{3}\pi + isen\frac{2}{3}\pi$.

a) Si provi che vale $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ e che $\omega + 1 = cos\frac{\pi}{3} + isen\frac{\pi}{3}$.

b) Si provi che l'insieme $\mathbb{Z}[\omega]$ é un sottoanello di $\mathbb{C}$ che contiene $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$.

c) Si provi che l'anello $\mathbb{Z}[\omega]$ contiene esattamente sei elementi invertibili, che sono le radici seste dell'unitá. [Suggerimento: scrivere la condizione affinché un elemento $a + b\omega \in \mathbb{Z}[\omega]$ sia invertibile.]

Esercizio 6.

Sia $\mathbb{Q}$ il campo dei numeri razionali, sia u il numero reale $\sqrt{3+\sqrt{3}}$ e p_u il suo polinomio minimo su $\mathbb{Q}$.

a) Si scriva una base di $\mathbb{Q}(u)$ come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale.

b) Si stabilisca se $\sqrt{6}$ appartiene a $\mathbb{Q}(u)$. [Suggerimento: ci si chieda se $\sqrt{3-\sqrt{3}} \in \mathbb{Q}(u)$.]

c) Si scriva l'elemento $\frac{1}{u^2}$ di $\mathbb{Q}(u)$ come polinomio a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

d) Si stabilisca se $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(u^2)$.

Esercizio 7.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni, motivando adeguatamente la risposta.

a) Gli anelli $\mathbb{Z}[i]$ e $\mathbb{Z}[x]$ sono isomorfi.

b) L'elemento $\frac{1}{\pi+1}$ di $\mathbb{Q}(\pi)$ puó essere scritto come polinomio in π a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

c) Se A é un anello commutativo, $\mathbb{R}$ il campo dei numeri reali, $f : A \to \mathbb{R}$ un omomorfismo di anelli suriettivi, l'anello A non é necessariamente un campo.

d) Le radici n-esime del numero complesso $1+i$ formano un sottogruppo del gruppo moltiplicativo $\mathbb{C}^*$.

e) Esistono campi finiti con $4, 13, 14, 25$ elementi. In caso di risposta positiva se ne fornisca un esempio.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2016/17
C.d.L. Magistrale in Matematica — Corso di Elementi di Algebra
Prova scritta del 6.6.2017

Esercizio 1.
Data la superficie S ottenuta dalla rotazione intorno all'asse z del poligono di vertici

$$A = (0,0,3),\ B = (0,2,3),\ C = (0,4,0),\ D = (0,2,-3),\ E = (0,0,-3),$$

sia G il suo gruppo delle isometrie.

a) Si stabilisca se G contiene rotosimmetrie e rototraslazioni.

b) Si stabilisca se esistono interi positivi n per i quali esiste un omomorfismo di gruppi iniettivo da G al gruppo delle permutazioni S_n. (Giustificare la risposta)

c) Si stabilisca per quali n esiste un omomorfismo di gruppi iniettivo dal gruppo diedrale D_n a G. (Giustificare la risposta)

Esercizio 2.
Si consideri l'anello prodotto diretto $A = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$.

a) Si determinino tutti gli elementi invertibili e tutti gli zero divisori di A.

b) Si stabilisca se il gruppo A^* degli elementi invertibili di A é ciclico.

Esercizio 3.
Sia $\mathbb{Z}[i]$ l'anello degli interi gaussiani e siano $\alpha = 8 + i,\ \beta = 4 + 13i \in \mathbb{Z}[i]$ due suoi elementi

a) Determinare un massimo comun divisore di α e β.

b) Mostrare che un intero gaussiano $a + ib$ appartiene all'ideale $I = (\alpha, \beta)$ se e solo se $2a \equiv b\,(mod\,5)$.

c) Stabilire se l'anello $\mathbb{Z}[i]/I$ é un campo.

Esercizio 4.

a) Descrivere il numero reale $2^{\frac{5}{6}}$ come sezione di Dedekind.

b) Si determini una base rispetto alla quale il numero $x = \frac{1}{4}$ ha una scrittura posizionale finita e una base rispetto alla quale ha scrittura posizione periodica e si esprima x rispetto a tali basi.

Esercizio 5.

Sia $\alpha = a + ib$ un numero complesso $|\alpha| = 1$.

a) Si stabilisca quanti sono i numeri complessi $\omega = u + iv$ tali che $|\omega| = 1$ e che $\alpha\bar{\omega} = \omega$.

b) Si determinino esplicitamente gli ω quando $\alpha = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Esercizio 6.

Sia $\mathbb{Q}$ il campo dei numeri razionali, sia $\mathbb{C}$ il campo di numeri complessi, sia u il numero reale $\sqrt[3]{-5}$, sia $\sigma_u : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{C}$ l'omomorfismo sostituzione definito da $\sigma_u(p(x)) = p(u)$ per ogni $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Si stabilisca se $u \in \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$.

b) Si stabilisca se $\mathbb{Q}(\sqrt{-5}) \subset \mathbb{Q}(u)$.

c) Per quali $a, b, c \in \mathbb{Q}$ risulta $ax^3 + bx^2 + c \in \ker \sigma_u$?

d) É vero che gli elementi di $\mathrm{Im}(\sigma_u)$ sono tutti del tipo $a + bu$ con $a, b \in \mathbb{Q}$?

Esercizio 7.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni, motivando adeguatamente la risposta.

a) Gli anelli $\mathbb{Z}[x]$ e $\mathbb{Q}[x]$ sono isomorfi.

b) Se un polinomio a coefficienti reali di grado positivo non ammette radici, allora é sicuramente irriducibile.

c) La somma e il prodotto di due radici n-esime di un numero complesso u sono ancora radici n-esime di u.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2016/17
C.L. Magistrale in Matematica Corso di Elementi di Algebra
Prova scritta del 12.7.2017

Esercizio 1.
Nello spazio ordinario é fissato un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$. Sul piano di equazione $z = 0$ sia A la regione delimitata da un esagono regolare di centro $(0, 0, 0)$, sia $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, 0) \in A\}$ e sia G il gruppo delle isometrie di S.

a) Si stabilisca quali tipi di isometrie contiene G.

b) Si stabilisca se G contiene sottogruppi isomorfi rispettivamente a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e a D_4. (Giustificare la risposta)

c) Si stabilisca se G contiene sottogruppi ciclici infiniti.

Esercizio 2.
Siano $\mathbb{Z}$ l'anello degli interi, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ rispettivamente i campi dei numeri razionali e dei numeri reali. Sia

$$\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{z_1 + z_2\sqrt{3} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

a) Si mostri che $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ é un sottoanello di $\mathbb{R}$.

b) Si mostri che $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ é un dominio e se ne calcoli la caratteristica.

c) Si stabilisca se l'insieme $\{3z_1 + z_2\sqrt{3} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$ é un ideale di $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

d) Si stabilisca se $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ é il campo dei quozienti di $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$.

Esercizio 3.
Trovare esplicitamente sottoinsiemi di $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, che rispetto all'usuale ordinamento $\leq$,

a) non ammettono né minimo né massimo,

b) non ammettono minimo, ma hanno massimo,

c) ammettono minimo e massimo.

Esercizio 4.

a) Descrivere il numero reale $3^{-\frac{2}{3}}$ come sezione di Dedekind.

b) Si scriva sotto forma di frazione il numero $-2,11\bar{7}$ (scritto in forma posizionale in base 10) .

Esercizio 5.
Siano $\alpha = \frac{1-2i}{1+i}$, $\beta = -1 - i \in \mathbb{C}$.

a) Determinare parte reale e coefficiente dell'immaginario di α.

b) Determinare modulo e argomento di β.

c) Disegnare nel piano complesso $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - 2i - 1| \leq 3\}$.

Esercizio 6.

Sia $\mathbb{Q}$ il campo dei numeri razionali, sia $\mathbb{R}$ il campo di numeri reali, sia u il numero reale $\sqrt{6+2\sqrt{5}}$, sia $\sigma_u : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{R}$ l'omomorfismo sostituzione definito da $\sigma_u(p(x)) = p(u)$ per ogni $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$.

a) Si stabilisca se $u \in \mathbb{Z}[\sqrt{5}]$.

b) Si provi che $\sqrt{5} \in \operatorname{Im} \sigma_u$ e si stabilisca se $\operatorname{Im} \sigma_u = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Esercizio 7.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni, motivando adeguatamente la risposta.

a) Il gruppo $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ contiene infiniti elementi di periodo finito e infiniti elementi di periodo infinito.

b) Se $u \in \mathbb{C}$ é un numero algebrico, allora ogni radice quinta di u é un numero algebrico.

c) L'applicazione $f : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definita da $f(x, y) = 12x+25y$ é un omomorfismo di anelli suriettivo ma non iniettivo.