Università degli Studi di Bologna — A.A. 2017/2018

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA IA

Test di autovalutazione — 15. 11. 2017

Esercizio 1.

a) Si studi la risolubilitá del sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + (h+1)x_3 + x_4 = h^2 + 2 \\ x_2 - 5x_3 + x_4 = -7 \end{cases}$$

al variare del parametro reale h, stabilendo quando le soluzioni sono infinite.

b) Esistono valori di h per i quali l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato al sistema precedente è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione due?

Esercizio 2.

Sono date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & h & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

con h parametro reale.

a) Si stabilisca per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ esiste una matrice $X \in M_3(\mathbb{R})$ tale che $A \cdot X = B$ e se per tali valori X é univocamente determinata.

b) Si stabilisca per quali valori di $h \in \mathbb{R}$ esiste una matrice $X \in M_3(\mathbb{R})$ invertibile tale che $A \cdot X = B$.

c) Al variare del parametro reale h si determini esplicitamente l'insieme V dei vettori di $\mathbb{R}^3$ che si possono scrivere come combinazione lineare dei vettori colonna di A, stabilendo se costituiscono un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$. In caso di risposta positiva si determini la dimensione del sottospazio.

Esercizio 3.

Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 e si considerino i suoi sottospazi vettoriali

$$U_1 = Span(x^2 + 3x, x - 2), \quad U_2 = \{ax^2 + b \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Si calcoli la dimensione e si determini una base di U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$, $U_1 + U_2$.

Esercizio 4.

Si provino o si confutino (con un controesempio) le seguenti affermazioni.

a) Dati due vettori $u, v \in \mathbb{R}^4$, è sempre possibile completarli ad una base di $\mathbb{R}^4$.

b) Se $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ non formano una base di $\mathbb{R}^4$, allora almeno due tra i vettori dati sono proporzionali.

c) Siano u, v due vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{R}^3$, e sia $T =< u, v >$ il piano generato. Allora due combinazioni lineari qualsiasi $au + bv$ e $cu + dv$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, generano T.

d) Consideriamo l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$, e sia $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Allora $\{X \in M_2(\mathbb{R}), AX = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.

e) FACOLTATIVO Se due vettori $u, v \in \mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti, allora $\{u, v, u \wedge v\}$ è un sistema libero di vettori di $\mathbb{R}^3$.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2016/2017

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA IA

Prova scritta — 9. 01. 2018 A

Esercizio 1.
Si consideri il sistema lineare

$$S : \begin{cases} x + y + z = a \\ x + hy + z = b \\ hx + y + z = c, \end{cases}$$

con h parametro reale e a, b, c numeri reali.

a) Si determinino i valori del parametro reale h per i quali il sistema S ammette una sola soluzione.

b) Per i valori del parametro reale h per i quali la soluzione del sistema non é unica, si determini una condizione necessaria e sufficiente su a, b, c affinché il sistema abbia soluzioni.

c) Esistono valori di a, b, c per i quali il sistema S ammette infinite soluzioni dipendenti da un solo parametro?

Esercizio 2.
Sia $V = M_{2,3}(\mathbb{R})$ l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale delle matrici 2×3 a coefficienti reali, siano

$$W_1 = \{\begin{pmatrix} a & b & a \\ a-b & b & b-a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad W_2 = \{\begin{pmatrix} c & e & d \\ 0 & d & c-d \end{pmatrix} \mid c, d, e \in \mathbb{R}\}.$$

Si determini una base per ciascuno dei sottospazi W_1, W_2, $W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$, stabilendo se la somma é diretta.

Esercizio 3.
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare canonicamente associata alla matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}),$$

sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2x\}$.

a) Si determini una base e un sistema di equazioni per $Kerf$ e Imf.

b) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f, stabilendo se l'endomorfismo f é diagonalizzabile. In caso f sia diagonalizzabile si determini una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di f.

c) Si stabilisca se esiste un'applicazione lineare suriettiva $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $h|_V = f|_V$.

Esercizio 4.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) Se $A \in M_{2,3}$ é una matrice di rango 2, allora la si puó scrivere come somma di due matrici di $M_{2,3}$ di rango 1.

b) Se v_1, v_2, v_3 sono tre vettori linearmente indipendenti di un K−spazio vettoriale V, allora anche i vettori $v_1, av_1 + v_2, v_1 + bv_2 + v_3$ sono vettori linearmente indipendenti di V, qualunque siano $a, b \in K$.

c) Due piani distinti π e π' dello spazio tridimensionale possono avere un solo punto in comune.

Esercizio 5.

Si consideri lo spazio tridimensionale ordinario con un fissato sistema di coordinate cartesiane x, y, z.

a) Si scrivano equazioni cartesiane per la generica retta parallela al piano

$$\alpha : \quad 2x - y + 3z - 11 = 0$$

e passante per il punto $P = (1, -1, 2)$.

b) Si chiede se tra le rette descritte in a) ne esistono che siano parallele al piano $\beta : \;\; x - y + z + 1 = 0$, e se sì, quante.

c) Si chiede se tra le rette descritte in a) ne esistono che siano parallele alla retta

$$r : \quad \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -t - 2 \\ z = t, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2017/2018

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA IA

Prova scritta — 22. 01. 2018 A

Esercizio 1.
Si consideri il sistema lineare

$$S: \begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ (h-1)x + y + z = 0 \\ 2x + (h+1)y + 2z = 2 \\ (h-2)y = 0 \end{cases}$$

con h parametro reale.

a) Si studi la risolubilità del sistema al variare di h, stabilendo se le soluzioni formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

b) Esistono valori del parametro reale h per i quali il sistema S é equivalente al sistema formato dalle prime due equazioni?

c) Si consideri il caso $h = 2$. Qual è la dimensione del più piccolo sottospazio che contiene tutte le soluzioni del sistema?

Esercizio 2.
Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nella variabile x, siano

$$W_1 = L(1 + x^2 + x^3, x^2 - x^3, x^2), \quad W_2 = L(1 + x^2, x + x^3, 1 + x^3).$$

a) Si determini una base di $W_1 \cap W_2$ e una base di $W_1 + W_2$, stabilendo se la somma è diretta.

b) Si stabilisca se esistono valori del parametro reale h per i quali il vettore $w = x^2 + hx^3$ appartiene a $W_1 \cap W_2$.

Esercizio 3.

Al variare di $k \in \mathbb{R}$, sia $f_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$f_k(x, y, z) = (kx + (k-1)y, y, x + ky + (k+1)z).$$

a) Al variare di k, si determini la matrice A_k associata ad f_k rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e si calcolino una base di $Im(f_k)$ e $Ker(f_k)$.

b) Si determinino gli autovalori di f_k, stabilendo se l'endomorfismo f_k é diagonalizzabile.

Esercizio 4.

Siano V, T K-spazi vettoriali finitamente generati, siano U, W sottospazi di V, e sia $f : V \to T$ una applicazione lineare. Dimostrare o confutare (con un controesempio) le seguenti affermazioni:

a) $U + W$ è una somma diretta $\implies$ $f(U) + f(W)$ è una somma diretta.

b) $f(U) \subseteq f(W)$ $\implies$ $U \subseteq W$.

Esercizio 5.

Si consideri lo spazio tridimensionale ordinario con un fissato sistema di coordinate cartesiane x, y, z.

a) Si determinino equazioni cartesiane per il piano α individuato dai tre punti $P = (1, -1, 1)$, $Q = (0, 2, 2)$, $R = (3, 1, -2)$.

b) Tra tutte le rette che giacciono su α, determinare equazioni parametriche per quelle incidenti alla retta $r : \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + z - 6 = 0 \end{cases}$.

Si chiede inoltre quante sono tali rette.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2017/2018

C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA IA

Prova scritta — 12. 02. 2018 B

Esercizio 1.

Si considerino le matrici

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & h+1 & 0 \\ h & 1 & 0 \\ h & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

con h parametro reale.

a) Si determini per quali h esiste una matrice X tale che $A_hX = B$ e si dica se tale matrice è unica.

b) Per $h = -1$ si dica se matrici X del punto a) formano uno spazio vettoriale.

c) Si dica se esista un valore di h tale che, data la matrice $Y = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, si abbia $A_hY = B$.

Esercizio 2.

Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ l' $\mathbb{R}$-spazio vettoriale dei polinomi di grado minore uguale di 4 nella variabile x e siano

$$W_1 := \{a+(b+c)x+ax^2+(b-c)x^4 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\} \qquad W_2 := \{dx+ex^2+ex^3+fx^4 \mid d, e, f \in \mathbb{R}\}.$$

a) Si determini una base di $W_1 \cap W_2$ e una base di $W_1 + W_2$, stabilendo se la somma è diretta.

b) Si stabilisca se, con alcuni dei seguenti vettori, sia possibile costruire un sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ tale che $U \oplus W_1 = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$.

$$p_1 = 1 + x^2, \quad p_2 = x^3, \quad p_3 = 1 + x^3, \quad p_4 = x^4.$$

Esercizio 3.

Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione tale che

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Si determini la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e si calcolino una base di $Im(f)$ e $Ker(f)$.

b) Si determinino gli autovalori di f, stabilendo se l'endomorfismo f é diagonalizzabile.

c) Si stabilisca se esistono valori di h per i quali la matrice A sia simile alla matrice

$$B_h = \begin{pmatrix} h & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

d) Si stabilisca se esistono valori di h per i quali le applicazioni definite rispettivamente dalle matrici A e B_h coincidono su un sottospazio vettoriale di dimensione 1.

Esercizio 4.
Sia V l' $\mathbb{R}$-spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado al più 3. Dimostrare o confutare:

a) Se $f_1, f_2, f_3 \in V$ hanno grado al più 1, allora uno dei tre è combinazione lineare degli altri.

b) L'insieme dei polinomi di V che hanno 2 come radice è un sottospazio vettoriale di V.

Esercizio 5.
Si consideri lo spazio tridimensionale ordinario con un fissato sistema di coordinate cartesiane x, y, z, e si consideri la famiglia di rette

$$r_h : \begin{cases} hx + y - z + 3 = 0 \\ 2y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

a) Si determinino, e si dica quante sono, le rette della famiglia sghembe con la retta $s : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t - 1 \\ z = -t \end{cases}$

b) Si determinino, e si dica quante sono, le rette della famiglia incidenti il piano $\alpha : 3x - y + 4z - 1 = 0$.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2017/2018
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA IA
Prova scritta — 29. 05. 2018 A

Esercizio 1.
Si consideri il sistema lineare

$$S: \begin{cases} x + hy = 0 \\ x + y + (h-1)z = 1 \\ y - z = -1 \\ 2x + (h+2)y = 0 \end{cases}$$

con h parametro reale.

a) Si studi la risolubilità del sistema al variare di h, stabilendo se le soluzioni formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

b) Si dica se esistono valori di h per cui il sistema è equivalente a quello formato dalle prime due equazioni.

c) Per $h = 2$ si calcoli la dimensione dello spazio generato dalle soluzioni del sistema.

Esercizio 2.
Sia $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ l' $\mathbb{R}$-spazio vettoriale dei polinomi di grado minore uguale di 4 nella variabile x e siano

$$W_1 := \{(a+b)+2bx^2+cx^4 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} \qquad W_2 := \{(d-e)+(d+e+f)x^3+fx^4 \mid d,e,f \in \mathbb{R}\}.$$

a) Si determini una base di $W_1 \cap W_2$ e una base di $W_1 + W_2$, stabilendo se la somma è diretta.

b) Si stabilisca se, con alcuni dei seguenti vettori, sia possibile costruire un sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ tale che $U \oplus (W_1 \cap W_2) = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$.

$$p_1 = 1 + x^3, \quad p_2 = x^2, \quad p_3 = 1 + x^4, \quad p_4 = x^4.$$

Esercizio 3.
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione tale che

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}.$$

a) Si determini la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e si calcolino una base di $Im(f)$ e $Ker(f)$.

b) Si determinino gli autovalori di f, stabilendo se l'endomorfismo f é diagonalizzabile.

c) Si stabilisca se esista un'applicazione lineare iniettiva con gli stessi autovalori di f.

d) Sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = y\}$. Si dica se esista un'applicazione lineare suriettiva $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f_{|V} = g_{|V}$.

Esercizio 4.
Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:

a) Siano A e B due matrici quadrate tali che $AB = 0$ e $A \neq 0$. Allora $B = 0$.

b) Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Se $A^2 = 0$ allora $A + I$ è invertibile.

c) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare tra K-spazi vettoriali e sia W' un sottospazio vettoriale di W. Allora vale

$$\dim_K f^{-1}(W') \geq \dim_K W'.$$

Esercizio 5.
Si consideri lo spazio tridimensionale ordinario con un fissato sistema di coordinate cartesiane x, y, z.

a) Si determinino le equazioni paramatriche della generica retta del piano

$$\pi : x + 2y + z - 1 = 0$$

passante per il punto $P = (1, 0, 0)$.

b) Se esistono, si determinino, e si dica quante sono, le rette della famiglia di cui al punto a) incidenti con la retta

$$r : \quad \begin{cases} x - z + 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

c) Esistono rette della famiglia di cui al punto a) che siano parallele ad r? Se sì, si determinino.