Università degli Studi di Bologna — A.A. 2016/2017
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA IA
Prova scritta — 9. 01. 2017 A

Esercizio 1.
Si consideri il sistema lineare

$$S : \begin{cases} y + (h+1)z = 0 \\ x + y - z = h \\ hx + hy = -1, \end{cases}$$

con h parametro reale.

a) Esistono valori del parametro reale h per i quali il sistema S é equivalente al sistema formato dalle prime due equazioni?

b) Si studi la risolubilitá del sistema al variare di h, stabilendo se le soluzioni formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

c) Esistono valori del parametro reale h per i quali il sistema lineare omogeneo associato a S ammette infinite soluzioni?

Esercizio 2.
Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nella variabile x, siano

$$W_1 = L(1 + x - x^2, 1 + x + x^2), \quad W_2 = L(x, x + x^2, x + x^3).$$

Si determini una base di $W_1 \cap W_2$ e una base di $W_1 + W_2$, stabilendo se la somma é diretta.

Esercizio 3.
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e sia $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2x\}$.

a) Si giustifichi l'esistenza e l'unicitá di f e si determini la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, una base e un sistema di equazioni per $Kerf$ e Imf.

b) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f, stabilendo se l'endomorfismo f é diagonalizzabile.

c) Si stabilisca se esiste un'applicazione lineare iniettiva $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $h|_V = f|_V$.

Esercizio 4.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) L'insieme dei vettori di un K-spazio vettoriale V che hanno le stesse coordinate rispetto a due basi B e B' di V é un sottospazio vettoriale di V.

b) Se $A \in M_2(K)$ é una matrice invertibile, allora anche la matrice $A + {}^tA$ é invertibile.

Esercizio 5.

Si consideri lo spazio tridimensionale ordinario con un fissato sistema di coordinate cartesiane x, y, z.

a) Si scrivano equazioni cartesiane per la generica retta parallela alla retta

$$r : \begin{cases} 2x - y + z + 1 = 0 \\ 3x + y - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

b) Fra le rette parallele ad r ne esiste una parallela al piano $\alpha : \; x - y + 8z + 1 = 0$?

c) Fra le rette parallele ad r ne esiste una incidente alla retta $s : \begin{cases} -y + 3z + 1 = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$?

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2016/2017
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA IA
Prova scritta — 27. 01. 2017 A

Esercizio 1.
Si consideri il sistema lineare

$$S: \begin{cases} x - y + z = h \\ hx + 2y - hz = 0 \\ x + y + (1-h)z = 0, \end{cases}$$

con h parametro reale.

a) Si studi la risolubilitá del sistema al variare di h.

b) Per $h = 2$ si determinino le soluzioni del sistema e la dimensione del piú piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ che le contiene.

c) Per $h = 0$ si stabilisca se tra le soluzioni del sistema vi sono due vettori linearmente indipendenti.

Esercizio 2.
Sia $V = M_2(\mathbb{R})$ l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti reali, siano

$$W_1 = \{\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b-a & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad W_2 = \{\begin{pmatrix} 0 & c+d & e+c \\ d & 0 & c+d \end{pmatrix} \mid c, d, e \in \mathbb{R}\}.$$

a) Si determini una base per ognuno dei sottospazi vettoriali

$$W_1,\ W_2,\ W_1 \cap W_2,\ W_1 + W_2,$$

stabilendo se la somma é diretta.

b) Si stabilisca se la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartiene al sottospazio W_2.

Esercizio 3.
Si considerino le matrici a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

e gli endomorfismi lineari $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiti rispettivamente da

$$f(x,y,z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad g(x,y,z) = B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Si si stabilisca se le due matrici A e B sono simili.

b) Si derminino una base e un sistema di equazioni per $Ker f$ e $Im f$.

c) Si stabilisca se gli endomorfismi f e g sono diagonalizzabili e in caso positivo si determini una base diagonalizzante.

d) Si calcoli la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = g(x, y, z)\}.$$

Esercizio 4.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) Se una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ ha un autovalore, allora anche la matrice A^2 ammette un autovalore.

b) Fissati due sottospazi vettoriali V e W di $\mathbb{R}^3$ di dimensioni 1 e 2 rispettivamente, esiste una e una sola applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ha V come nucleo e W come immagine.

Esercizio 5.

Si consideri lo spazio tridimensionale ordinario con un fissato sistema di coordinate cartesiane x, y, z e sia π il piano di equazione cartesiana

$$\pi : \quad x - y + 3z - 1 = 0.$$

a) Si scrivano le equazioni parametriche della generica retta del piano π passante per il punto $P = (1, 0, 0)$.

b) Si stabilisca se tra le rette di cui al punto a) ne esiste una parallela alla retta

$$r : \quad \begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

c) Fra le rette del piano π passanti per il punto P esistono rette sghembe con r?

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2016/2017
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA IA
Prova scritta — 12. 07. 2017 A

Esercizio 1.
Si considerino le matrici

$$A_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & h & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A'_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2+h \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & h & 1 & 1 & 1-h \end{pmatrix},$$

a) Si calcolino i ranghi di A_h e A'_h al variare del parametro h.

b) Al variare di h si studi la risolubilitá del sistema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+h \\ 0 \\ 1-h \end{pmatrix}.$$

c) Per $h = 0$ si determinino le soluzioni del sistema.

d) Si stabilisca se esistono valori di h per i quali l'insieme delle soluzioni del sistema é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.

Esercizio 2.
Sia $V = \mathbb{R}^5$ e siano

$$W_1 = \{(0, a, b, b, a+b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad W_2 = \{(d, e, d, c, 0) \mid c, d, e \in \mathbb{R}\},$$

sia $W_3 = \{(0, a, 1+b, b, a+b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

a) Si determini una base e un sistema di equazioni di $W_1 \cap W_2$ e una base di $W_1 + W_2$, stabilendo se la somma é diretta.

b) Si mostri che W_3 non é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^5$ e si provi che contiene tre vettori linearmente indipendenti.

Esercizio 3.
Si consideri l'applicazione $f_h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f_h(x, y, z, w) = (3x + z + w, x + 2y + z + 5w, hz + 3w, w)$ al variare del parametro reale h.

a) Si determinino una base e un sistema di equazioni per $Kerf_h$ e Imf_h al variare del parametro h.

b) Si discuta la diagonalizzabilitá di f_h al variare del parametro reale h.

c) Per $h = 2$ si determini (nel caso esista) una base di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di f_2.

Esercizio 4.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) L'insieme S:=$\{A \in M_{2,3}(\mathbb{R}) \mid \text{rango}(A) < 2\}$ é un sottospazio vettoriale di $M_{2,3}(\mathbb{R})$.

b) Tre piani dello spazio tridimensionale a due a due incidenti o passano per una stessa retta (ossia formano fascio) oppure si incontrano a due a due in tre rette parallele.

Esercizio 5.

Si consideri lo spazio tridimensionale ordinario con un fissato sistema di coordinate cartesiane x, y, z e sia P il punto di coordinate $(1, 0, 1)$ e r la retta di equazioni

$$r : \begin{cases} y - 2x - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

a) Si scrivano l'equazione di tutti i piani passanti per P e paralleli alla retta r e si stabilisca se passano tutti per una stessa retta, ossia se formano fascio.

b) Si scrivano le equazioni di tutte le rette per P e incidenti la retta r.

c) Esistono rette per P che giacciono sul piano $z = 1$ e sono sghembe con r?

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2016/2017
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA IA
Prova scritta — 06. 06. 2017 A

Esercizio 1.
Si consideri il sistema lineare

$$S : \begin{cases} -hx + y = 0 \\ y + z = h - 1 \\ -2x + (h+1)y = h - 1, \end{cases}$$

con h parametro reale.

a) Si studi la risolubilitá del sistema al variare di h, stabilendo se le soluzioni formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

b) Esistono valori del parametro reale h per i quali il sistema S é equivalente al sistema formato dalle prime due equazioni?

c) Si consideri il caso $h = 0$. Qual la dimensione del piú piccolo sottospazio che contiene tutte le soluzioni del sistema?

Esercizio 2.
Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 3 nella variabile x, siano

$$W_1 = L(1 - x + x^2, x + x^2, x), \quad W_2 = L(1 + x + x^2, x + x^3).$$

Si determini una base di $W_1 \cap W_2$ e una base di $W_1 + W_2$, stabilendo se la somma é diretta.

Esercizio 3.
Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare tale che

$$f(x, y, z) = (x - y, -x + 2y - z, -y + z).$$

a) Si determini la matrice A associata ad f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ e si calcolino una base di $Im(f)$ e $Ker(f)$.

b) Si determinino gli autovalori e gli autospazi di f, stabilendo se l'endomorfismo f é diagonalizzabile.

c) Sia $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$. Si stabilisca se esiste un'applicazione lineare iniettiva $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $h|_V = f|_V$.

Esercizio 4.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) Se A, B sono due matrici quadrate reali invertibili con $A^{-1} = B^{-1}$, allora $A = B$.

b) Ogni combinazione lineare di due soluzioni di un sistema lineare è una soluzione del medesimo sistema lineare.

Esercizio 5.

Si consideri lo spazio tridimensionale ordinario con un fissato sistema di coordinate cartesiane x, y, z.

a) Si scrivano equazioni cartesiane per la generica retta parallela alla retta

$$r : \quad \begin{cases} x - y + z + 2 = 0 \\ 2x - 2z + 4 = 0 \end{cases}$$

b) Fra le rette parallele ad r ne esiste una parallela al piano $\alpha : \quad x - y + z + 2 = 0$?

c) Fra le rette parallele ad r ne esiste una incidente alla retta $s : \quad \begin{cases} x = t + 3 \\ y = -2t + 5 \\ z = t + 1 \end{cases}$?

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2016/2017
C.d.L. in Matematica — Corso di GEOMETRIA IA
Prova scritta — 10. 02. 2017 A

Esercizio 1.
Si consideri il sistema lineare

$$S : \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = h \\ hx_2 + 2x_3 + (1-h)x_4 = 0 \\ hx_1 - x_3 + (1+h)x_4 = h, \end{cases}$$

con h parametro reale.

a) Si studi la risolubilitá del sistema al variare di h.

b) Per $h = 0$ si determini lo spazio delle soluzioni del sistema, esplicitandone una base.

c) Per $h = 1$ si determini la dimensione del piú piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ che contiene le soluzioni del sistema.

Esercizio 2.
Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 4 nella variabile x, siano

$$W_1 = L(1, x, 1 + x + x^3), \quad W_2 = L(x, 1 + x^3, x + x^4).$$

a) Si determini una base di $W_1 \cap W_2$ e una base di $W_1 + W_2$, stabilendo se la somma é diretta.

b) Si stabilisca se esistono valori del parametro reale h per i quali il polinomio $3h + hx^2 - x^4$ sta in $W_1 + W_2$

Esercizio 3.
Si consideri l'applicazione $f_h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_h(x, y, z) = (x - y, -x + y, x + y + hz)$ al variare del parametro reale h.

a) Si discuta la diagonalizzabilitá di f_h al variare del parametro reale h.

b) Per $h = 0$ si determinino una base e un sistema di equazioni per $Ker f_0$ e $Im f_0$.

c) Per $h = 2$ si scriva una base o un sistema di equazioni per il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$

$$f_2{}^{-1}(span(1, 1, 2)).$$

Esercizio 4.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni.

a) L'insieme S:=$\{A \in M_3(\mathbb{R}) \mid tr(A) = 0\}$ (dove $tr(A)$ indica la traccia di A) é un sottospazio vettoriale di $M_3(\mathbb{R})$ di dimensione 8.

b) Sia $A \in M_2(\mathbb{R})$. Allora A e A^2 hanno lo stesso rango.

Esercizio 5.

Si consideri lo spazio tridimensionale ordinario con un fissato sistema di coordinate cartesiane x, y, z e sia π il piano di equazione cartesiana

$$\pi : \quad x - y + hz - 1 = 0.$$

a) Si stabilisca se esistono valori del parametro h per i quali la retta

$$r : \begin{cases} y - 2x - 1 = 0 \\ x - z - 1 = 0 \end{cases}$$

giace sul piano π.

b) Si stabilisca per quali valori di h il piano π contiene rette parallele alla retta r.

c) Si stabilisca se per $h = 2$ sul piano π esistono rette sghembe con r.