Università degli Studi di Bologna A.A. 2017/18
C.d.L. Magistrale in Matematica Corso di Elementi di Algebra
Prova scritta del 9.1.2018

Esercizio 1.

Si consideri l'anello $\mathbb{Q}[x]$ dei polinomi a coefficienti nel campo dei numeri razionali e siano

$$a(x) = (x-1)^3(x-2),\ b(x) = x^2 + x - 2,\ c(x) = x^2 - 4x + 3 \in \mathbb{Q}[x].$$

a) Si stabilisca se esistono, e in caso positivo si determinino, due polinomi $f, g \in \mathbb{Q}[x]$ tali che valga la relazione

$$a(x)f(x) + b(x)g(x) = c(x).$$

b) Si stabilisca se esiste un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ di grado ≤ 3 avente -1 come radice di molteplicitá 2 e tale che $f(0) = -2$. Tale polinomio é unico?

Esercizio 2.

Siano $\alpha = \frac{(2+i)^3}{1+i}$, $\beta = 1 - i\sqrt{3} \in \mathbb{C}$.

a) Determinare parte reale e coefficiente dell'immaginario di α.

b) Determinare modulo e argomento di β.

c) Disegnare nel piano complesso $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| \leq |z-3|\}$.

Esercizio 3.

a) Sia $6,0\bar{5}$ un numero razionale scritto in base 7. Scrivere il numero in forma di frazione in base 7 e poi in forma posizionale e di frazione in base 10.

b) Verificare che il numero reale $\sqrt{2} + \sqrt[3]{7}$ é algebrico, trovando esplicitamente un polinomio a coefficienti razionali di cui é radice.

Esercizio 4.

Rispondere ai seguenti quesiti

a) Quanti sono gli interi positivi ≤ 10000 non divisibili né per 3 né per 5?

b) Dato il numero $k = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$, stabilire quanti sono i divisori di k in $\mathbb{N}$.

c) Stabilire quanti sono i divisori di k in $\mathbb{N}$ che hanno esattamente tre fattori primi.

Esercizio 5.

Siano $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ rispettivamente il campo dei numeri razionali, il campo dei numeri reali e il campo di numeri complessi, sia u il numero complesso tale che $u^2 = 2 + 2\sqrt{3}i$ e $\operatorname{Re} u > 0$.

a) Si scriva u nella forma canonica $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Si mostri che $i \in \mathbb{Q}(u)$.

c) Si determini un campo K tale che valgano le inclusioni strette $Q \subset K \subset \mathbb{Q}(u)$.

Esercizio 6.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni, motivando adeguatamente la risposta.

a) Il gruppo $(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, +)$ contiene esattamente un sottogruppo ciclico di ordine n per ogni intero positivo n.

b) Se $u \in \mathbb{C}$ é un numero algebrico, allora anche $\bar{u}$, $\operatorname{Re} u$, $\operatorname{Im} u$ sono numeri algebrici.

c) Nell'anello Z_{12} ogni equazione polinomiale di grado d puó aver al piú d soluzioni distinte.

d) Nessun polinomio $p \in \mathbb{Q}$ di grado d puó avere esattamente $d - 1$ radici, contando ciascuna con la sua molteplicitá.

e) I gruppi delle isometrie di due figure piane sono isomorfi se e solo se le due figure sono congruenti.

Università degli Studi di Bologna — A.A. 2017/18

C.d.L. Magistrale in Matematica — Corso di Elementi di Algebra

Prova scritta del 22.1.2018

Esercizio 1.

Siano $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ rispettivamente il campo dei numeri razionali, il campo dei numeri reali e il campo di numeri complessi, sia

$$p(x) = x^6 - x^5 - 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 \in \mathbb{Q}[x]$$

e sia T l'insieme delle radici complesse di p.

a) Si determini la molteplicitá di -1 come radice di p.

b) Si stabilisca quanti sono gli elementi di T, di $T \cap \mathbb{R}$ e di $T \cap \mathbb{Q}$.

c) Si provi che esiste un sottocampo di $\mathbb{C}$ che contiene tutte le radici di p e si stabilisca se tale campo contiene $\mathbb{R}$ e se é isomorfo al campo $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Esercizio 2.

Siano $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{C}$ rispettivamente il campo dei numeri razionali e il campo di numeri complessi, sia

$$S := \{x + iy \in \mathbb{C} \mid x, y \in \mathbb{Q}\}.$$

a) Si domanda se S é un campo.

b) Determinare tutte le radici complesse del polinomio $p = x^3 - 8$, stabilendo quante di esse stanno in S.

c) Disegnare nel piano complesso $\{(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Esercizio 3.

Nel seguito A denoti rispettivamente $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ e R_A denoti la relazione sull'insieme A cosí definita:

$$n\, R_A\, m \quad \text{se e solo se} \quad n \text{ divide } m \text{ in } A,$$

ossia esiste $k \in A$ tale che $m = kn$.

a) Si provi che se $A = \mathbb{Z}$, allora $R_{\mathbb{Z}}$ non é né una relazione d'ordine, né una relazione di equivalenza.

b) Si provi che se $A = \mathbb{N}$, allora $R_{\mathbb{N}}$ é una relazione d'ordine, si stabilisca se é un ordine totale e se in $(\mathbb{N}, R_{\mathbb{N}})$ esistono un minimo e un massimo.

Esercizio 4.

a) Si provi che se A é un dominio di integritá , gli unici elementi $a \in A$ tali che $a^2 = a$ sono 0_A e 1_A.

b) Si determinino tutti gli elementi $a \in \mathbb{Z}_{26}$ tali che $a^2 = a$.

Esercizio 5.

Siano

$$X_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\},$$

$$X_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -6 \leq z \leq 6\},$$

e sia X_3 la piramide di base $\tilde{X}_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ e vertice $V = (0, 0, 6)$.

Siano G_1, G_2, G_3 i gruppi delle isometrie di X_1, X_2, X_3 rispettivamente.

a) Per ogni $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$, stabilisca se G_i e G_j sono isomorfi.

b) Si stabilisca se esiste un omomorfismo iniettivo di gruppi da G_1 a G_2.

c) Si stabilisca se per qualche i il gruppo G_i contiene un sottogruppo isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Esercizio 6.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni, motivando adeguatamente la risposta.

a) Ogni campo ordinato ha caratteristica zero.

b) L'elemento $\frac{\pi^2+1}{\sqrt{2}}$ di $\mathbb{Q}(\pi, \sqrt{2})$ non puó essere scritto come polinomio in π e $\sqrt{2}$ a coefficienti in $\mathbb{Q}$.

c) Esiste un polinomio f a coefficienti reali che ha le stesse radici del polinomio $g(x) = x^3 - i \in \mathbb{C}$.

d) 2 puó essere scritto nella forma $1872a + 1950b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$.

e) Se $p \in \mathbb{N}$ é un numero primo, il numero $log_{10} p$ é irrazionale.

f) Se α é un numero reale positivo tale che $log_{10}\alpha = 3,3$, allora la rappresentazione decimale della parte intera di α^2 ha piú di 8 cifre.

Università degli Studi di Bologna **A.A. 2017/18**
C.d.L. Magistrale in Matematica **Corso di Elementi di Algebra**
Prova scritta del 12.2.2018

Nel seguito $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ indicheranno rispettivamente il campo dei numeri razionali, il campo dei numeri reali e il campo di numeri complessi, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ rispettivamente l'insieme dei numeri naturali e l'anello dei numeri interi.

Esercizio 1.
Sia $c \in \mathbb{Q}$ e sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio di grado $d > 0$ tale che $f(c) \neq 0$.

a) Si provi che esiste un polinomio $g \in \mathbb{Q}[x]$ tale che il polinomio $(x-c)g(x) - 1$ sia divisibile per $f(x)$.

b) Si provi che esiste uno e un solo polinomio $g \in \mathbb{Q}[x]$ di grado minore di d tale che il polinomio $(x-c)g(x) - 1$ sia divisibile per $f(x)$.

Esercizio 2.
Sia $u = \epsilon\sqrt[3]{5}$, dove $\epsilon \neq 1$ é una radice cubica primitiva dell'unitá, cioé $\epsilon^3 = 1$

a) Si determini il polinomio minimo p_ϵ di ϵ su $\mathbb{Q}$.

b) Si provi che u é algebrico su $\mathbb{Q}$ e si determini il suo polinomio minimo p_u.

c) Si determini il piú piccolo sottocampo F di $\mathbb{C}$ che contiene tutte le radici di p_u e si calcoli $[F : \mathbb{Q}]$. [Suggerimento: si veda se $\epsilon \in \mathbb{Q}(u)$.]

Esercizio 3.
Sia $(G, \cdot)$ un gruppo di ordine 8 e sia R la relazione di equivalenza su $G \times Z$ definita, per ogni coppia (g, z), (h, w), da

$$(g, z)\, R\, (h, w) \quad \text{se e solo se} \quad g^z = h^w.$$

a) Si stabilisca se esiste $g \in G$, $g \neq 1_G$ tale che $(g, 3) \in [(1_G, 0)]_R$.

b) Si provi che l'insieme quoziente $G \times \mathbb{Z}/R$ ha 8 elementi.

Esercizio 4.

a) Si determinino le ultime due cifre di tutti i numeri interi $x \geq 0$ tali che $\begin{cases} 3x \equiv 1 \pmod 4 \\ 2x \equiv 3 \pmod{25} \end{cases}$.

b) Si stabilisca quali dei seguenti numeri reali sono razionali, scrivendoli sotto forma di frazione:

$$0,1111111111\cdots,\ 4,10100100010000\cdots,\ 0,101010101010101\cdots,$$

$$6,745746745746745\cdots,\ 0,010011000111\cdots.$$

Esercizio 5.

Nello spazio tridimensionale, in cui é fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali, sia X il cubo di centro l'origine e lato 1 e sia G il gruppo delle isometrie di X.

a) Si descrivano le possibili rotazioni contenute in G determinandone il numero.

b) Si descrivano le possibili simmetrie rispetto a un piano contenute in G, determinandone il numero.

Esercizio 6.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni, motivando adeguatamente la risposta.

a) In ogni campo finito esiste una radice quadrata di -1.

b) Se m, n sono due numeri naturali di cui almeno uno non sia un quadrato perfetto, allora la somma delle loro radici quadrate positive é un numero irrazionale algebrico.

c) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, allora anche $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$, $1/\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

d) Se u é un qualsiasi numero complesso allora $\mathbb{Q}(u) = \mathbb{Q}(1/u)$

e) L'anello quoziente $\mathbb{Z}[i]/(17+6i, 5+i)$, dove $\mathbb{Z}[i]$ é l'anello degli interi gaussiani, ha caratteristica 11.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2017/18
C.d.L. Magistrale in Matematica Corso di Elementi di Algebra
Prova scritta del 29.5.2018

Esercizio 1.

a) Sia n un numero naturale non nullo.
Individuare il valore della somma

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)},$$

osservando che:

$$\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2},\quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3},\quad \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4},\cdots$$

e verificare la correttezza della risposta con il principio di induzione.

b) Si provi che nella seguente successione di numeri interi positivi (scritti in forma decimale)

$$11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\cdots,111\cdots 1111,\cdots$$

non esistono quadrati. (Suggerimento: questi numeri sono tutti dispari.)

c) E' possibile scrivere il numero 2 come combinazione lineare a coefficienti interi di 88 e 34? Se é possibile, si determinino i coefficienti della combinazione.

Esercizio 2.

Sia $u=\frac{a}{b}$ un numero razionale con $0<a<b$ e $MCD(a,b)=1$.

a) Si dimostri che u ammette una rappresentazione decimale finita se e solo se b é un divisore di 10^k con $k\in\mathbb{N}^*$.

b) Si determini la scrittura decimale dei seguenti numeri razionali: $\frac{3}{5}, \frac{7}{16}, \frac{4}{7}$.

c) Se u non ha scrittura decimale finita, é vero che u ha una rappresentazione decimale illimitata e periodica con periodo di al piú $b-1$ cifre? Giustificare la risposta.

Esercizio 3.

a) Si scrivano in forma trigonometrica i seguenti elementi numeri complessi:

$$-15,\quad i\sqrt{2},\quad 4-4\sqrt{3}i.$$

b) Determinare parte reale e parte immaginaria e scrittura trigonometrica del numero complesso $z=(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i})^8$.

Esercizio 4.

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$f(x, y) = (\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 1, \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - 2).$$

a) Si provi che f é un'isometria, individuandone i punti fissi e stabilendo di quale tipo di applicazione si tratta.

b) Esiste una figura piana che sia mutata in sé da f?

c) Sia $G =< f >$ il sottogruppo del gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^2$ generato da f. Si determini la cardinalitá di G.

Esercizio 5.

Sia $\mathbb{Q}$ il campo dei numeri razionali, sia K un campo estensione algebrica di $\mathbb{Q}$ e sia A un sottoanello di K che contiene $\mathbb{Q}$.

a) Si dimostri che A é necessariamente un campo.

b) Il risultato di cui al punto a) rimane vero se K é un'estensione trascendente di $\mathbb{Q}$?

Esercizio 6.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni, motivando adeguatamente la risposta.

a) Ogni campo di caratteristica 7 contiene un sottocampo isomorfo a $\mathbb{Z}_7$.

b) Se α e β sono due numeri complessi trascendenti su $\mathbb{Q}$ non puó esistere un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x, y]$ tale che $f(\alpha, \beta) = 0$.

c) Tutti gli elementi del campo $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ sono algebrici su $\mathbb{Q}$.

d) Se $S \subset \mathbb{R}^3$ é un solido compatto, il suo gruppo G delle isometrie non puó contenere alcun sottogruppo infinito.

e) Per ogni intero positivo n risulta $MCD(n, 0) = n$.

Università degli Studi di Bologna A.A. 2017/18
C.d.L. Magistrale in Matematica Corso di Elementi di Algebra
Prova scritta del 11.9.2018

Esercizio 1.

a) Sia n un numero naturale non nullo. Se la rappresentazione decimale di n é formata da $s \geq 2$ cifre, quali sono i numeri formati dalle ultime due cifre di n affinché n sia divisibie per 25?

b) I numeri di patente in Florida sono codificati nel modo seguente: $SSS-FFF-YY-DDD$, dove nei gruppi con S e con F ci sono informazioni relative a nome e cognome, mentre YY indicano le due cifre dell'anno di nascita e DDD codificano il mese m e il giorno b di nascita secondo la seguente espressione: $40(m-1)+b$ nel caso di maschi, $40(m-1)+b+500$ nel caso di femmine. Si determinino la data di nascita e il sesso dei titolari di patente aventi un numero di patente le cui ultime 5 cifre del codice sono rispettivamente 86252, 68789.

Esercizio 2.

Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi.

a) Si scriva in forma trigonometrica il numero complesso $\frac{(1+i)^4}{(3-3i)^3}$.

b) Determinare parte reale e parte immaginaria dei numero complessi

$$z_1 = \frac{-1+4i}{-1+2i}, \quad z_2 = i^{-5} + i^{-6} + i^{-7} + \cdots + i^{-43} + i^{-44}.$$

c) Siano $u_1 = -\sqrt{3} + i, \quad u_2 = 1 - i \in \mathbb{C}$. Determinare

$$|u_1 + u_2|, \quad |u_1 \cdot u_2|, \quad |\frac{u_1}{u_2}|.$$

Esercizio 3.
Sia $u = \frac{a}{b}$ un numero razionale con $0 < a < b$ e $MCD(a,b) = 1$.

a) Si dimostri che se $MCD(b,10) = 1$, allora u ammette una rappresentazione decimale priva di antiperiodo.

b) Si scriva sotto forma di frazione il numero razionale $v = 4,123\overline{45}$.

Esercizio 5.

Sia $\mathbb{Q}$ il campo dei numeri razionali e siano $u = 1 + \sqrt[3]{2}, \quad v = 1 + \sqrt[3]{-2}$.

a) Si stabilisca se i campi $\mathbb{Q}(u)$ e $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ sono uguali o se esiste solo una relazione di inclusione tra essi.

b) Si stabilisca se esiste un isomorfismo di campi tra i campi $\mathbb{Q}(u)$ e $\mathbb{Q}(v)$.

c) Si spieghi perché ogni elemento di $\mathbb{Q}(u)$ é algebrico e si determini il suo possibile grado su $\mathbb{Q}$.

d) Si stabilisca se il polinomio $x^2 - 2$ é riducibile o irriducibile su $\mathbb{Q}(u)$.

Esercizio 6.

Si risponda ai seguenti quesiti:

a) Uno studente per risolvere l'equazione polinomiale $x^2+2x = x$ scrive i seguenti passaggi:

$$x^2+2x = x \Longrightarrow x^2+2x+1 = x+1 \iff (x+1)^2 = x+1 \Longrightarrow x+1 = 1 \Longrightarrow x = 0,$$

poi gli sorge il dubbio di avere sbagliato qualcosa. Cosa ha sbagliato? É possibile che un polinomio reale di grado due abbia una sola radice reale?

b) Scrivendo in rappresentazione decimale l'uguaglianza $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$, cosa si puó dedurre?

c) Si scriva un'isometria del piano che muta in sé un esagono regolare di centro il punto $(1, 2)$ e lato 2.

d) Indicato con U_6 il gruppo moltiplicativo delle radici seste complesse dell'unitá, per ogni $u \in U_6$ si calcoli il grado dell'estensione $Q(u)$ di Q.

Esercizio 7.

Si dimostrino o si confutino le seguenti affermazioni, motivando adeguatamente la risposta.

a) Due figure piane congruenti hanno gruppi delle isometrie isomorfi.

b) La composizione di una simmetria del piano rispetto a una retta r con una simmetria del piano rispetto a una retta $s \neq r$ é una simmetria del piano rispetto a una retta t.

c) Il numero reale $\sqrt{8 - \sqrt{48}}$ appartiene al campo $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ed é algebrico di grado 4 su $\mathbb{Q}$.

d) Non esistono numeri reali non nulli a per i quali il polinomio $x^6 - a$ ha radici immaginarie pure.

e) L'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ non é un dominio a fattorizzazione unica.