Universitá degli Studi di Bologna A.A. 2013/2014

C.d.L. in Matematica Corso di GEOMETRIA I

Esercitazione scritta 5. 11. 2013 A

Esercizio 1.

a) Si determinino le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ ax_1 + x_3 + ax_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2ax_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$$

al variare del parametro reale a.

b) Fissato un valore di a per cui il sistema é risolubile, un multiplo di una soluzione del sistema é ancora una soluzione del sistema?

Esercizio 2.

Siano $A_h = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & h \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$, con h parametro reale.

a) Si stabilisca se esistono valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione matriciale $A_hX - B + hI = 0$ ha soluzioni in $M_3(\mathbb{R})$.

b) Si determini l'inversa della matrice $C = B + I$.

c) Si determinino i valori di $h \in \mathbb{R}$ per i quali il vettore $\begin{pmatrix} 1-h \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ si puó scrivere come combinazione lineare dei vettori colonna della matrice A_h.

d) Si determini l'insieme dei vettori $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^3$ che si possono scrivere come combinazione lineare dei vettori colonna della matrice A_h.

Esercizio 3.

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. Sapendo che $detA = 1$, calcolare il determinante della matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 3a+3 & 3b & 3c+2 \\ a+1 & b+1 & c+1 \end{pmatrix}$ e il rango della matrice $N = \begin{pmatrix} a-1 & b-1 & c-1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 4.

Dimostrare o confutare (con un controesempio) almeno tre delle seguenti affermazioni.

a) Se per $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ risulta $AB = AC$ allora $B = C$.

b) Se per $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ risulta $AB = A$ allora $det\, A = 0$ oppure $det\, B = 1$.

c) Se per $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ risulta $AB = A$ e $BA = B$ allora $det\, A = det\, B = 0$, oppure $A = B = I$ (matrice identitá).

d) Per ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ risulta $rkA = rkA^2$ (dove rk denota il rango della matrice).

e) Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$, $A \neq 0$ (matrice nulla), tale che ${}^tA = -A$. Allora A é invertibile.

f) Siano $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $B \neq 0$ (matrice nulla), tali che $AB = 0$. Allora A non é invertibile.