Università desli Studi di Bologna A.A. 2001/2002

C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica Informatico-Computazionale

Corso di GEOMETRIA II Compito B 24. 5. 2002

1. a) Si determini l'endomorfismo lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f(0,1,-1) = (2,0,0)$ e il piano $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y - z = 0\}$ sia autospazio di $f$ relativo all'autovalore 2.

   b) Si determinino Ker$f$ e Im$f$ esplicitandone una base e se ne calcolino le dimensioni.

   c) Si determinino gli autovalori di $f$ e i relativi autospazi.

   d) L'endomorfismo $f$ è semplice? Se si, si determini una base di autovettori di $f$.

   e) Esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $f$?

   f) Determinare, se esiste, una applicazione lineare $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f$ sia iniettiva.

2. Si consideri la matrice $A_k = \begin{pmatrix} 0 & 2k & 0 \\ 2k & 3k & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}$ siano $\sigma_k : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ e $q_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ rispettivamente la forma bilineare simmetrica canonicamente associata ad $A_k$ e la forma quadratica associata a $\sigma_k$.

   a) Studiare la segnatura di $q_k$ al variare di $k \in \mathbb{R}$.

   b) Si ponga $k = -1$ e si trovi una forma bilineare $\tau$ su $\mathbb{R}^3$ non definita tale che $\tau$ coincida con $\sigma_{-1}$ su $U = \mathcal{L}((0,1,0),(0,0,1))$.

   c) Si ponga $k = -1$ e si consideri la quadrica $\mathcal{Q}$ di equazione

$$q_{-1}(x,y,z) - y + 2z + 1 = 0.$$

   Si trovino la forma canonica euclidea e la forma canonica affine di $\mathcal{Q}$.

   d) Sia $\mathcal{C}$ la conica intersezione di $\mathcal{Q}$ con il piano di equazione $x = 1$. Si stabilisca se esiste un'affinità di $\mathbb{R}^3$ che trasformi $\mathcal{C}$ nella conica di equazioni $\begin{cases} z^2 - y^2 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ e in caso affermativo se ne scrivano le equazioni.

Università desli Studi di Bologna A.A. 2001/2002

C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica Informatico-Computazionale

Corso di GEOMETRIA II

Compito A

10. 6. 2002

1. Si scrivano le equazioni dell'endomorfismo lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ha come nucleo il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $(0, 1, 1)$ e tale che tutti i vettori del sottospazio vettoriale $W$ di equazione $x = 2y$ sono lasciati fissi da $f$.

   a) Si determinino equazioni cartesiane ed equazioni parametriche per $\mathrm{Im} f$.

   b) Si stabilisca se $f$ è semplice e in caso positivo determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $f$.

   c) Si stabilisca se esiste un prodotto scalare $\sigma$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto al quale la base di autovettori determinata nel punto b) sia ortonormale.

   d) Si determinino tutti i sottospazi $W$ di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tali che $\mathrm{Ker} f \subseteq W$ e $f(W) \subseteq W$.

2. Si consideri l'affinità $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di equazioni:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

   ove $a$ è un parametro reale diverso da zero.

   a) Si determini per quali valori del parametro reale $a$ $\Phi$ è una isometria.

   b) Posto $a = 2$, si determinino tutti i piani $\alpha$ di $\mathbb{R}^3$ passanti per la retta $r : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ e tali che $\alpha$ sia perpendicolare a $\Phi(\alpha)$.

   c) Posto $a = 2$, si determini il luogo dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che sono lasciati fissi da $\Phi$.

   d) Posto $a = 2$, si scriva l'equazione di una retta $r$ tale che $\Phi(r) = r$.

   e) Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2\sqrt{2}x - 4az + 4a - 1 = 0.$$

   Al variare del parametro reale $a$ diverso da zero, si determinino la forma canonica affine e la forma canonica euclidea di $\mathcal{Q}$ e si classifichi $\mathcal{Q}$.

Università desli Studi di Bologna A.A. 2001/2002

C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica Informatico-Computazionale

Corso di GEOMETRIA II

Compito B

10. 6. 2002

1. Si scrivano le equazioni dell'endomorfismo lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ che ha come nucleo il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dal vettore $(1, 1, 0)$ e tale che tutti i vettori del sottospazio vettoriale $W$ di equazione $y = 2z$ sono lasciati fissi da $f$.

   a) Si determinino equazioni cartesiane ed equazioni parametriche per $\mathrm{Im} f$.

   b) Si stabilisca se $f$ è semplice e in caso positivo determinare una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $f$.

   c) Si stabilisca se esiste un prodotto scalare $\sigma$ di $\mathbb{R}^3$ rispetto al quale la base di autovettori determinata nel punto b) sia ortonormale.

   d) Si determinino tutti i sottospazi $W$ di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tali che $\mathrm{Ker} f \subseteq W$ e $f(W) \subseteq W$.

2. Si consideri l'affinità $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di equazioni:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

ove $a$ è un parametro reale diverso da zero.

   a) Si determini per quali valori del parametro reale $a$ $\Phi$ è una isometria.

   b) Posto $a = 2$, si determinino tutti i piani $\alpha$ di $\mathbb{R}^3$ passanti per la retta $r : \begin{cases} z - y = 0 \\ x = 3 \end{cases}$ e tali che $\alpha$ sia perpendicolare a $\Phi(\alpha)$.

   c) Posto $a = 2$, si determini il luogo dei punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che sono lasciati fissi da $\Phi$.

   d) Posto $a = 2$, si scriva l'equazione di una retta $r$ tale che $\Phi(r) = r$.

   e) Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione

$$(x, y, z) \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 4ax + 2\sqrt{2}z + 4a - 1 = 0.$$

   Al variare del parametro reale $a$ diverso da zero, si determinino la forma canonica affine e la forma canonica euclidea di $\mathcal{Q}$ e si classifichi $\mathcal{Q}$.

Università desli Studi di Bologna A.A. 2001/2002
C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica
Informatico-Computazionale

Corso di GEOMETRIA II

Compito A
15. 7. 2002

1. Si consideril'endomorfismo lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito da: $f(x, y, z) = (\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y, -z)$.
   a) Si determinino gli autovalori di $f$ e i relativi autospazi.
   b) Si stabilisca se $f$ è autoaggiunta rispetto al prodotto scalare euclideo. Si stabilisca se $f$ è semplice e in caso positivo si determini una base di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di $f$.
   c) Si determinino tutti i sottospazi $U$ di $\mathbb{R}^3$ tali che $f(U) \subseteq U$ e $f_{|U}$ è semplice, motivando la risposta.
   d) Sia $V = \mathcal{L}((0, 0, 1), (0, 1, 1))$. Si determinino, se esistono, tutti gli endomorfismi lineari $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con le seguenti due proprietà: $g_{|V} = f_{|V}$ e $\mathbb{R}^3$ ammette una base ortonormale formata da autovettori di $g$.
   e) Si determini un sottospazio $W$ di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tale che $f(W)$ sia parallelo al vettore $\underline{u} = (0, 1, 1)$. Tale $W$ è univocamente determinato?
   f) Si consideri l'affinità $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ di equazioni:
   $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$
   e si determinino tutte le rette $r$ di $\mathbb{R}^3$ passanti per $P = (1, 0, 0)$ e tali che $\Phi(r)$ è parallela ad $r$.
   g) Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione
   $$-x^2 + \frac{3}{2}y^2 + \frac{3}{2}z^2 + yz + 2x + \sqrt{2}y - \sqrt{2}z + 1 = 0.$$
   Si determinino la forma canonica affine e la forma canonica euclidea di $\mathcal{Q}$ e si classifichi $\mathcal{Q}$.

2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 2a & -a & b \\ -a & a & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.
   a) Si determinino le condizioni che devono soddisfare i parametri reali $a, b$ e $c$ in modo che $A$ sia la matrice associata ad una forma quadratica $q$ di $\mathbb{R}^3$, e per tali valori si dica quando $q$ è definita positiva (risp. negativa), semidefinita positiva (risp. negativa), non definita, al variare dei parametri.
   b) Posto $b = 0$ si determinino $a$ e $c$ in modo che il vettore $\underline{u} = (1, 1, 0)$ abbia modulo 1 e che i vettori $\underline{v} = (0, 1, 1)$ e $\underline{u} = (3, 1, 1)$ siano ortogonali, rispetto al prodotto scalare associato ad $A$ .

Università desli Studi di Bologna A.A. 2001/2002
C.d.L. in Matematica – C.d.L. in Matematica
Informatico-Computazionale
Corso di GEOMETRIA II 6. 9. 2002

1. Si consideril'endomorfismo lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da: $f(x, y, z) = (x + y, -x + 3y, -z)$.

   a) Si determinino gli autovalori di $f$ e i relativi autospazi e si dica se $f$ è semplice.

   b) Si determinino tutti i sottospazi $W$ di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tali che $f(W) = W$.

   c) Sia $V = \mathcal{L}((1, 1, 0), (0, 0, 1))$. Si determinino, se esistono, tutti gli endomorfismi lineari $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che $g$ è semplice $g_{|V} = f_{|V}$ e $\mathbb{R}^3$ ammette una base ortogonale (rispettivamente: ortonormale) formata da autovettori di $g$.

   d) Si determini un endomorfismo lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $h$ è semplice $h_{|V} = f_{|V}$ e $\mathbb{R}^3$ non ammette una base ortogonale formata da autovettori di $h$.

   e) Si determini, se esiste, un endomorfismo lineare ortogonale $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $t_{|V} = f_{|V}$.

   Si consideri l'affinità $\Phi = t_a \circ f$, ove $\underline{a}$ è il vettore $\underline{a} = (0, 4, 0)$.

   f) Si determinino tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ che vengono lasciati fissi da $\Phi$.

   g) Si determini una retta $r$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $\Phi(r) = r$.

2. Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} -5 & 3\sqrt{3} & a \\ 3\sqrt{3} & 1 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$.

   a) Si determinino le condizioni che devono soddisfare i parametri reali $a, b$ e $c$ in modo che il vettore $\underline{v} = (1, 0, 1)$ sia ortogonale al piano di equazione $y = 0$ rispetto alla forma quadratica $\sigma$ associata ad $A$.

   b) Sia $\mathcal{Q}$ la quadrica di equazione

   $$(x, \quad y, \quad z) \begin{pmatrix} -5 & 3\sqrt{3} & 0 \\ 3\sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1.$$

   Si determinino la forma canonica affine e la forma canonica euclidea di $\mathcal{Q}$ e si classifichi $\mathcal{Q}$.

   c) Si dica a quali delle seguenti coniche è affinemente equivalente $\mathcal{Q}$:

   - $\mathcal{Q}_1 : x^2 - (y + 2)^2 + z^2 = 1;$
   - $\mathcal{Q}_2 : (x - 2)^2 + 3y^2 - 4z^2 = -2;$
   - $\mathcal{Q}_3 : x^2 + 2y^2 - 3z + 3 = 0.$

Università degli Studi di Bologna A.A. 2009/2010
C.d.L. in Matematica
Corso di GEOMETRIA II (Programma prof. Menichetti) 3. 6. 2010

1. Si consideri l'endomorfismo lineare $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definito da: $f(x, y, z) = (-x, 3y - z, -x)$.

   a) Si determinino gli autovalori di $f$ e i relativi autospazi e si dica se $f$ è semplice.

   b) Si determinino tutti i sottospazi $W$ di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2 tali che $f(W) = W$.

   c) Sia $V = \mathcal{L}((1,0,0),(0,1,1))$. Si determinino, se esistono, tutti gli endomorfismi lineari $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che $g$ è semplice $g_{|V} = f_{|V}$ e $\mathbb{R}^3$ ammette una base ortonormale formata da autovettori di $g$.

   d) Si determini un endomorfismo lineare $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $h$ è semplice $h_{|V} = f_{|V}$ e $\mathbb{R}^3$ non ammette una base ortogonale formata da autovettori di $h$.

   e) Si determini, se esiste, un endomorfismo lineare ortogonale $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $t_{|V} = f_{|V}$.

2. Si consideri l'affinità $\Phi = t_a \circ f$, ove $\underline{a}$ è il vettore $\underline{a} = (0, 4, 0)$.

   f) Si determinino tutti i punti di $\mathbb{R}^3$ che vengono lasciati fissi da $\Phi$.

   g) Si determini una retta $r$ di $\mathbb{R}^3$ tale che $\Phi(r) = r$.