Esercizi (15 ottobre 2004)

1. Utilizzando la definizione di limite si provi che se vale
$$\lim_{x \to c} f(x) = L,$$
dove $c \in \mathbb{R}$, mentre L e' strettamente positivo, allora esiste un numero $\delta > 0$ tale che $f(x) > 0$ per tutti gli $x \neq c$ che soddisfano $|x - c| < \delta$.
2. Si verifichi, usando il risultato dell'esercizio precedente, che, se f e' una funzione non negativa, cioe' $f(x) \geq 0$ $\forall x \in A$, allora, se esiste il limoite di f per x che tende a c, vale anche
$$\lim_{x \to c} f(x) \geq 0.$$
Conseguenza immediata: se f e g sono due funzioni che soddisfano $f(x) \leq g(x)$ per ogni x allora vale anche
$$\lim_{x \to c} f(x) \leq \lim_{x \to c} g(x),$$
qualora i limiti esistano.
3. Si verifichi che se $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ sono tre funzioni che soddisfano $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in A$, allora, se esistono (e sono uguali) i limiti
$$\lim_{x \to c} f(x) = L = \lim_{x \to c} g(x),$$
allora anche la funzione h ha limite e vale [1]
$$\lim_{x \to c} h(x) = L.$$

[1] Il risultato del punto 3 permette con l'aiuto di una figura appropriata di capire che
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$