Esercizi (17 ottobre 2003)

1. Come discusso in classe, la serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ converge se e solo se $|q| < 1$. La sua somma, definita dal limite seguente, $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k$, vale $\frac{1}{1-q}$. Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ le serie geometriche
$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-|x|)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(1+x^2)^n}$$
sono convergenti. Dire poi qual'è la loro somma (ricordare che $\sum_{n=p}^{\infty} q^n = q^p \sum_{n=0}^{\infty} q^n$).
2. Ricordando quanto detto in classe sul confronto tra i vari tipi di successioni divergenti (se $q > 1$ e se $k > 0$, allora vale $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^k} = +\infty$ e $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{q^n} = +\infty$), si calcolino i seguenti limiti:
$$\lim_{n\to\infty} q^n n^3, \quad \text{al variare di } q \geq 0;$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n + n}{1 + 3^n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-n} + n!}{(n+1)! - 3^{n+1}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2^n n! + (n+1)^3}{3^n + n^5}$$