

ESERCIZI (19 NOVEMBRE 2004)

1. Dire in quali intervalli le seguenti funzioni sono crescenti o decrescenti e stabilirne gli eventuali punti di massimo o di minimo relativo.

$$f(x) = (x - 2)^2, \quad f(x) = (x + 4)^3, \quad f(x) = (x - 3)\sqrt{x}, \quad f(x) = e^{-x^2},$$

$$f(x) = x \log x, \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 8}}, \quad f(x) = \frac{1}{x + 3}.$$

2. Dire per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$  la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x + \alpha e^{-x}$  e' crescente su tutto  $\mathbb{R}$ .

3. Siano  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$ ,  $A, B, C \subset \mathbb{R}$ . Se  $f$  e  $g$  sono crescenti nei loro domini provare che la funzione composta  $g \circ f$  e' crescente.

Provare poi che date le funzioni  $f : A \rightarrow B$  e  $g : B \rightarrow C$ , se  $x_0 \in A$  e' un punto di massimo relativo per  $f$  e  $g$  e' monotona crescente su  $B$ , allora  $g \circ f$  ha un punto di massimo relativo in  $x_0$ .

4. Provare usando il teorema di Lagrange, che se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e' derivabile in ogni punto e soddisfa  $|f'(x)| \leq 1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ , allora vale

$$|f(x) - f(x')| \leq |x - x'|, \quad \forall x, x' \in \mathbb{R}^n$$