Esercizi (1 ottobre 2004)

1. Risolvere le seguenti disequazioni

$$(x+1)^2 < 3, \qquad \sqrt{x^2-1} > a \quad \text{al variare di } a \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{1+|x|} > \frac{1}{2}.$$

$$\frac{x}{x+1} > -1, \qquad |x-3| \leq x.$$

2. Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $(1,2)$ e $(3,5)$.
3. Ricordiamo che una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *pari* se

$$f(x) = f(-x) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice *dispari* se

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Dire quali tra le seguenti funzioni sono pari e quali dispari.

$$f(x) = |x|, \quad f(x) = x^3, \quad f(x) = 1 + x + x^2, \quad f(x) = |x^3|, \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

4. Si fissi un numero naturale n e un numero $p \in\,]0,1[$. Sia data la funzione (chiamata *distribuzione binomiale* in probabilità) $f : \{0,1,\ldots,n\} \to \mathbb{R}$,

$$f(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0,1,,\ldots,n.$$

Verificare, utilizzando la formula per lo sviluppo della potenza di un binomio, che $\sum_{k=0}^n f(k) = 1$. Verificare poi la formula seguente

$$\sum_{k=0}^n k f(k) = pn.$$