Esercizi (27 novembre 2004)

1. Calcolare i limiti
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos x}{x^2}\qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sin(2x-2)}{1-\cos(x-1)},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x},\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log 2x}{x}.$$
2. Sia $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\log x$. Calcolare i limiti di f per x che tende a $0,+\infty$ e calcolare $f'(x)$. Determinare gli intervalli in cui la funzione e'crescente e decrescente. Indicare i punti di massimo o minimo per f. Fare infine un grafico qualitativo per la funzione f.
3. Fare la stessa cosa per la funzione $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$.
4. Data la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, con derivata seconda continua, la formula di Taylor di f di ordine 2 e di punto iniziale x_0 e'
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+f''(x_0)\frac{(x-x_0)^2}{2}+o\big((x-x_0)^2\big),$$
dove il termine di resto soddisfa $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{o\big((x-x_0)^2\big)}{(x-x_0)^2}=0.$ [1] Si scrivano le formula di Taylor per la funzione $(1+x^2)^{3/2}$ nei punti iniziali $x_0=0$ e $x_0=3$.

   Si scrivano poi le formule di Taylor del secondo ordine per la funzione coseno nei punti iniziali $x_0=0$ e $x_0=\frac{\pi}{2}$ e per la funzione esponenziale nel punto $x_0=0$.

[1] Alternativamente
$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+f''(x)\frac{h^2}{2}+o(h^2),$$
dove il termine di resto soddisfa $\dfrac{o(h^2)}{h^2}=0$.