Esercizi (3 dicembre 2004)

1. Si calcolino i seguenti integrali:
$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3}, \qquad \int_0^{\pi/2} \cos x dx, \qquad \int_1^3 \frac{1}{x} dx, \qquad \int_1^2 (\sqrt{x} + 2e^x) dx$$
2. Calcolare, usando la formula $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$, con f e g di volta in volta scelte opportunamente, gli integrali
$$\int_1^2 e^{2x} dx, \qquad \int_0^{\pi} \sin(x+\pi) dx,$$
$$\int_1^2 \frac{x^2}{x^3+1}, \qquad \int x^2 \cos(x^3) dx, \quad \int_{-\sqrt{\pi}}^0 x \cos x^2 dx$$
$$\int_{-2}^{-1} x e^{-x^2}, \qquad \int_0^{\pi/4} \tan x \, dx, \qquad \int_3^5 \frac{dx}{x \log x}.$$
3. Si tracci il grafico approssimativo della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Si tracci poi il grafico delle rette $x = -1$ e $x = 2$. Restano individuate due regioni di piano limitate $R_1 = \{(x,y) : -1 < x < 0, f(x) < y < 0\}$ e $R_2 = \{(x,y) : 0 < x < 2, 0 < y < f(x)\}$. Si calcoli l'area della parte di piano $R = R_1 \bigcup R_2$ unione di R_1 ed R_2.
4. Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = xe^{x^2}$. Si dica per quali $x \in \mathbb{R}$ risulta $f(x) > 0$. Come nell'esercizio precedente si calcoli l'area della parte di piano R delimitata dal grafico di f e dalle due rette verticali $x = -2$ e $x = 1$.
5. Si calcoli l'area della parte di piano R compresa tra i grafici delle funzioni f e g, dove $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ e delimitata dalle rette verticali $x = 1$ e $x = 3$.
6. Si calcolino, usando il Teorema Fondamentale del Calcolo le derivate delle funzioni
$$f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt, \qquad f(x) = \int_x^3 \sin t^2 dt.$$
7. Usando il Teorema Fondamentale del Calcolo e la formula per la derivata di una funzione composta, si calcolino le derivate delle funzioni
$$f(x) = \int_0^{x^2} te^t dt, \qquad f(x) = \int_x^{x^4} (1+t^2)^{3/2}.$$