Esercizi (5 dicembre 2003)

1. Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con derivata seconda continua, la formula di Taylor di f di ordine 2 e di punto iniziale x_0 e'

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2} + o\big((x - x_0)^2\big),$$

dove il termine di resto soddisfa $\lim_{x \to x_0} \dfrac{o\big((x - x_0)^2\big)}{(x - x_0)^2} = 0$. [2] Si scrivano le formula di Taylor per la funzione $(1 + x^2)^{3/2}$ nei punti iniziali $x_0 = 0$ e $x_0 = 3$.

Si scrivano poi le formule di Taylor del secondo ordine per la funzione coseno nei punti iniziali $x_0 = 0$ e $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

2. Stabilire in quali intervalli sono convesse le funzioni

$$f(x) = x^3 - x, \quad f(x) = \frac{1 + x}{1 - x}, \quad f(x) = x^3 - 3x^2,$$

$$f(x) = x^2 + \frac{2}{x}, \quad f(x) = \frac{1}{(x - 2)^2}, \quad f(x) = xe^{x-1}, \quad f(x) = \sqrt{x^3 - 3x}$$

[2] Alternativamente

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + o(h^2),$$

dove il termine di resto soddisfa $\dfrac{o(h^2)}{h^2} = 0$.