1. Esercizi (7 dicembre 2005)

(1) Se g e' una funzione derivabile e positiva e α e' un numeri reale fissato, dire quanto vale la derivata

$$\frac{d}{dx}(g(x))^{\alpha}.$$

Utilizzare questo calcolo per calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}dx, \quad \int_0^{\pi/2} \cos x \ \sin^2 x dx, \quad \int_1^2 \frac{\log^2 x}{x} dx.$$

$$\int_2^3 \frac{(1+\sqrt{x})^{1/3}}{\sqrt{x}} dx,$$

(2) Una successione $(a_n)_n$, definita da

$$a_n = \alpha + \beta n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

dove α e β sono numeri reali fissati, si chiama *successione aritmetica.* Se $(a_n)_n$ e' una successione aritmetica, per ogni fissato valore di $n \geq 1$, dire quanto vale la media aritmetica tra i due numeri a_n ed a_{n+2}.

Una successione del tipo $b_n = C\lambda^n$, $n = 1, 2, \ldots$, dove C e λ sono numeri positivi fissati, si chiama *successione geometrica.* Il numero λ si chiama *ragione* della successione.

Quanto vale, fissato un qualsiasi $n \in \mathbb{N}$, la media geometrica dei due numeri b_n e b_{n+2}? [1]

Verificare Se $(a_n)_n$ e' una successione aritmetica, allora la successione (b_n), definita come $b_n = e^{a_n}$ per ogni $n = 1, 2, \ldots$, e' una successione geometrica.

(3) Calcolare integrando per parti gli integrali

$$\int_a^b x^2 \log x dx, \quad \int_0^1 x e^{-2x} dx, \quad \int_a^b x^2 e^x dx.$$

(4) Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 x e^{\sqrt{x}} dx.$$

Suggerimento. Usare il cambio di variabile $\sqrt{x} = t$ per ottenere un integrale calcolabile integrando per parti.

[1] Ricordiamo la definizione dalla statistica: data una famiglia di n numeri $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, la media geometrica $\bar{x}_{geom}$ dei numeri suddetti e' il numero

$$\bar{x}_{geom} = (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n)^{1/n} = (\prod_{k=1}^{n} x_k)^{1/n}.$$

2. Esercizi (2 dicembre 2005)

(1) Calcolare, usando la tavola delle primitive delle funzioni elementari e la formula di Torricelli, gli integrali seguenti.

$$\int_1^3 (2x^3 + x^{3/2})dx, \qquad \int_{-1}^{-1/2} \frac{dx}{x}.$$

(2) Sia g una funzione derivabile su $\mathbb{R}$. Dire quanto vale la derivata della funzione composta $h(x) = e^{g(x)}$. Usando questo calcolo (assieme al Teorema di Torricelli) dire quanto vale l'integrale

$$\int_a^b e^{g(x)} g'(x) dx.$$

Calcolare, usando le considerazioni appena fatte e scegliendo di volta in volta una $g(x)$ opportuna, gli integrali

$$\int_1^2 2xe^{x^2} dx, \quad \int_0^5 e^{-x} dx, \quad \int_3^5 x^2 e^{-x^3} dx, \quad \int_0^3 e^{\sin x} \cos x dx, \quad \int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin x \, dx.$$

(3) Nello stesso spirito dell'esercizio precedente, scrivere la derivata della funzione composta $h(x) = \log(g(x))$, dove $g(x)$ e' una funzione positiva. Usare questo risultato per calcolare gli integrali

$$\int_1^2 \frac{2x}{1+x^2} dx, \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

(4) Ancora ragionando come sopra, ma usando l'espressione della derivata della funzione composta $h(x) = \sin(g(x))$, calcolare

$$\int_0^{\pi^{1/3}} x^2 \cos(x^3) dx, \qquad \int_{-\sqrt{\pi}}^0 x \cos x^2 dx.$$

Sostituendo la funzione seno con la funzione coseno, calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx, \qquad \int_0^{\pi^2/4} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

(5) Consideriamo, data una funzione f continua, la sua funzione integrale di estremo inferiore $c = 0$ e la indichiamo con I. $I(x) = \int_0^x f(t)dt$. Il Teorema fondamentale del calcolo (v. appunti) afferma che $I'(x) = f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se g e' una funzione qualsiasi, quanto vale la derivata della funzione composta $x \mapsto I(g(x))$?

Usare la risposta alla domanda appena posta per calcolare le derivate

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(t) dt, \qquad \frac{d}{dx} \int_0^{x^2+x} e^{-t^2} dt.$$

(6) Se X e' una varibile aleatoria con densita' continua $f_X : [0, 1] \to [0, +\infty[$, seguire il percorso dell'ultimo esempio svolto in classe (riportato anche negli appunti in rete) per trovare la fuzione di ripartizione della variabile $Y = X^2$. Usare poi l'esercizio precedente per stabilire qual e' la densita' di Y.