1. Esercizi, 7 dicembre 2006

(1) Calcolare, usando la tavola delle primitive delle funzioni elementari e la formula di Torricelli, gli integrali seguenti.

$$\int_1^3 (2x^3 + x^{3/2})dx, \quad \int_{-1}^{-1/2} \frac{dx}{x}, \quad \int_0^\pi \sin x dx, \int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx.$$

(2) Sia g una funzione derivabile su $\mathbb{R}$. Dire quanto vale la derivata della funzione composta $h(x) = e^{g(x)}$. Usando questo calcolo (assieme al Teorema di Torricelli) dire quanto vale l'integrale $\displaystyle\int_a^b e^{g(x)} g'(x) dx$.

Calcolare, usando le considerazioni appena fatte e scegliendo di volta in volta una $g(x)$ opportuna, gli integrali

$$\int_1^2 2xe^{x^2} dx, \quad \int_0^5 e^{-x} dx, \quad \int_3^5 x^2 e^{-x^3} dx, \quad \int_0^3 e^{\sin x} \cos x dx, \quad \int_0^\pi e^{\cos x} \sin x \, dx.$$

(3) Nello stesso spirito dell'esercizio precedente, scrivere la derivata della funzione composta $h(x) = \log(g(x))$, dove $g(x)$ e' una funzione positiva. Usare questo risultato per calcolare gli integrali

$$\int_1^2 \frac{x^2}{1+x^3} dx, \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

(4) Ancora ragionando come sopra, ma usando l'espressione della derivata della funzione composta $h(x) = \sin(g(x))$, calcolare

$$\int_0^{\pi^{1/3}} x^2 \cos(x^3) dx, \quad \int_{-\sqrt{\pi}}^0 x \cos x^2 dx.$$

Sostituendo la funzione seno con la funzione coseno, calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx, \quad \int_0^{\pi^2/4} \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

(5) Consideriamo, data una funzione f continua, la sua funzione integrale di estremo inferiore $c = 0$ e la indichiamo con I. $I(x) = \int_0^x f(t)dt$. Il Teorema fondamentale del calcolo afferma che $I'(x) = f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Se g e' una funzione qualsiasi derivabile, dire quanto vale la derivata della funzione composta $x \mapsto I(g(x))$?

Usare la risposta alla domanda appena posta per calcolare le derivate

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(t) dt, \quad \frac{d}{dx} \int_0^{x^2+x} e^{-t^2} dt, \quad \int_x^{2x} t^2 e^t dt.$$

(per calcolare l'ultima derivata, si provi a scrivere l'integrale come somma di due integrali usando la additivita' $\int_a^b f = \int_a^0 f + \int_0^b f$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$).