ANALISI MATEMATICA L-B, 2005-06. FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI REALI

1. Limiti e continuità

• Notazioni

Studieremo funzioni

$$f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m, \quad n, m \geq 1.$$

La variabile indipendente nel dominio D verrà denotata con x dove ora

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

e la variabile dipendente con $y \in \mathbf{R}^m$,

$$y = (y_1, \dots, y_m).$$

Ciascuna componente y_j è funzione di $x = (x_1, \dots, x_n)$ e la uguaglianza vettoriale

$$y = f(x)$$

si scrive in maniera equivalente

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases},$$

dove le funzioni $f_j : D \to \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, m$, sono dette le **componenti** di f. Si scrive anche

$$f = (f_1, \dots, f_m).$$

In dimensione fisica $n = 2$ o $n = 3$ del dominio, useremo anche la notazione

$$(x, y) \quad \text{o} \quad (x, y, z),$$

in luogo di (x_1, x_2) o (x_1, x_2, x_3) rispettivamente, per indicare la variabile indipendente che, in questo contesto, non sarà ovviamente denotata con x per non confonderla con la sua prima coordinata.

Per $n = 2$ ed $m = 1$ è importante l'interpretazione geometrica: riferendo lo spazio euclideo tridimensionale ad assi cartesiani x, y, z, il dominio $D \subset \mathbf{R}^2$ di $f : D \to \mathbf{R}$ si rappresenta nel piano x, y. Il **grafico** di f è l'insieme dei punti (x, y, z) tali che

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D,$$

e si rappresenta con una superficie nello spazio, detta **superficie cartesiana**, che si proietta ortogonalmente su D secondo la direzione dell'asse z.
Di questa superficie, il dominio D può essere pensato come la *carta geografica*. Su di esso si possono tracciare le così dette **linee di livello**: ciascuna di esse è l'insieme dei punti $(x, y) \in D$ che soddisfano

$$f(x, y) = k$$

con $k \in \mathbf{R}$ un fissato valore assunto da f. Geometricamente, la linea di livello k si ottiene tagliando la superficie grafico $z = f(x, y)$ con il piano $z = k$, parallelo al piano $z = 0$ del dominio, e proiettando la linea ottenuta sul piano del dominio.

• **Prodotto scalare, norma e distanza euclidei**
Ricordiamo che per $x, y \in \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, il **prodotto scalare** è definito da

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Per ogni $x, y, z \in \mathbf{R}^n$, $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, esso gode delle proprietà

$$\langle x, x\rangle \geq 0$$

$$\langle x, x\rangle = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

$$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$$

$$\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle.$$

La **norma** di $x \in \mathbf{R}^n$ viene poi definita da

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Per ogni $x, y \in \mathbf{R}^n$, $\lambda \in \mathbf{R}$, essa gode delle proprietà

$$\|x\| \geq 0$$

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

dove l'ultima disuguaglianza è nota col nome di disuguaglianza triangolare. In dimensione fisica, $\|x\|$ è la lunghezza o intensità del vettore rappresentato da x e la disuguaglianza triangolare corrisponde al ben noto fato che in un triangolo la lunghezza di un lato non supera la somma delle lunghezze degli altri due.
Vale inoltre la importante disuguaglianza di **Cauchy-Schwarz**

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

dove per vettori non nulli x, y l'uguaglianza vale se e solo se i due vettori sono proporzionali (allineati). In dimensione fisica, tutto questo corrisponde alla uguaglianza

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\| \cos \alpha$$

con α la misura in radianti dell'angolo formato dai due vettori. In ogni dimensione n, si dirà che i vettori x, y sono tra loro **ortogonali** quando $\langle x, y\rangle = 0$.

La **distanza euclidea** $d_n(x, y)$ tra x e y è

$$d_n(x, y) = \|x - y\| = \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Per ogni $x, y, z \in \mathbf{R}^n$, essa gode delle proprietà

$$d_n(x, y) \geq 0$$

$$d_n(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$$

$$d_n(x, y) = d_n(y, x)$$

$$d_n(x, z) \leq d_n(x, y) + d_n(y, z)$$

dove l'ultima è la disuguaglianza triangolare. In dimensione fisica, $d_n(x, y)$ altro non è che la lunghezza del segmento di estremi x, y.

Scriveremo semplicemente $d(x, y)$ quando sarà chiara dal contesto la dimensione dello spazio.

• Topologia

Le definizioni di punto interno, punto aderente, punto di frontiera e punto di accumulazione di un dato insieme $D \subset \mathbf{R}^n$, sono le stesse già viste nel caso di dimensione $n = 1$. Basta ricordare come è definita la distanza euclidea in $\mathbf{R}^n$ e, di conseguenza, come sono definiti gli intorni di un dato punto. L'intorno circolare di centro $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ e raggio $r > 0$ è l'insieme degli $x = (x_1, \ldots, x_n)$ che verificano

$$d(x, \bar{x}) < r.$$

In dimensione $n = 2$ o $n = 3$ si tratta dell'usuale cerchio euclideo o sfera euclidei, privati rispettivamente della circonferenza o della superficie sferica che li delimitano.
Per $D \subset \mathbf{R^n}$ ed $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$, diremo che $\bar{x}$ per l'insieme D è punto:

-**interno** quando esiste un intorno U di centro $\bar{x}$ tale che $U \subset D$;

-**aderente** quando per ogni intorno U di centro $\bar{x}$ si ha $U \cap D \neq \emptyset$;

-**di frontiera** quando $\bar{x}$ è aderente sia a D che al suo complementare;

-**di accumulazione** quando $\bar{x}$ è aderente a $D \setminus \{\bar{x}\}$

L'insieme di tutti i punti interni a D si indica D° e si dice **l'interno** di D. L'insieme di tutti i punti aderenti a D si indica $\bar{D}$ e si dice **la chiusura** di D. L'insieme di tutti i punti di frontiera di D si indica ∂D e si dice **la frontiera** di D.

L'insieme D si dice **aperto** quando $D = D^\circ$, **chiuso** quando $D = \bar{D}$. Dal momento che per ogni D si ha $D^\circ = D \setminus \partial D$ e $\bar{D} = D \cup \partial D$, un insieme è aperto quando non vi appartiene alcun punto di frontiera, chiuso quando vi appartengono tutti i punti di frontiera.

Ricordiamo infine che un insieme si dice **limitato** quando è incluso in un opportuno intorno dell'origine (quindi anche in un altro opportuno intorno di un qualunque punto di $\mathbf{R}^n$). Un insieme **limitato e chiuso** di $\mathbf{R}^n$ viene detto **compatto** di $\mathbf{R}^n$.

• Definizioni di limite e di continuità per funzioni di più variabili

La definizione di limite di una funzione f fa uso solo degli intorni quindi si applica in maniera universale, basta aver definito gli intorni dei punti negli spazi del dominio e dei valori di f.

Sia $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ e siano $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ di accumulazione per D, $\ell \in \mathbf{R}^m$. Per definizione, si ha

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell$$

quando per ogni intorno V di ℓ in $\mathbf{R}^m$ esiste un intorno U di $\bar{x}$ in $\mathbf{R}^n$ tale che

$$x \in U \cap D, x \neq \bar{x} \Longrightarrow f(x) \in V.$$

Facendo comparire esplicitamente i raggi ε e δ di V, U rispettivamente, e le distanze euclidee, ciò equivale a

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 : \ 0 < d_n(x, \bar{x}) < \delta_\varepsilon, x \in D \Longrightarrow d_m(f(x), \ell) < \varepsilon.$$

Come già visto per funzioni di una sola variabile reale a valori in $\mathbf{R}$, la funzione f si dice **continua in** $\bar{x} \in D$ di accumulazione per D

quando

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}).$$

Sempre per definizione, f è continua in ogni punto del dominio D che non è di accumulazione per D (punto isolato di D). La funzione f si dice continua nell'insieme D quando è continua in tutti i punti di D.

Verremo tra poco al problema della determinazione dei limiti in più variabili. Qui ci limitiamo ad osservare che per $f = (f_1, \ldots, f_m)$ e $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_m)$ si ha

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell \Longleftrightarrow \forall j = 1, \ldots, m \ \lim_{x \to \bar{x}} f_j(x) = \ell_j.$$

Questo segue dai confronti

$$|y_j - \ell_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} (y_k - \ell_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} (y_k - \ell_k)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{k=1}^{m} |y_k - \ell_k|$$

tra la distanza $d_m(y, \ell)$ in $\mathbf{R}^m$, $y = (y_1, \ldots, \ell_m)$, e le distanze in $\mathbf{R}$ tra le singole componenti.

In particolare, ci si può ricondurre a limiti di funzioni a valori **scalari** esaminando le componenti f_j di f nel caso che f sia a valori vettoriali.

Continuano a valere le ben note proprietà dei limiti e della continuità rispetto alle operazioni algebriche ed alla composizione di funzioni, nel caso di funzioni scalari continua a valere il confronto tra limiti rispetto alla relazione d'ordine su $\mathbf{R}$.
Il confronto tra la distanza in $\mathbf{R}^n$ e le distanze in $\mathbf{R}$ tra le singole componenti mostra che le funzioni $p_j(x) = x_j$, $j = 1, \ldots, n$ (proiezioni sugli assi), sono funzioni continue. Ne segue che tutte le espressioni nelle variabili x_j attraverso somme, prodotti, quozienti, composizioni di funzioni continue in x_j, definiscono nel proprio dominio naturale funzioni continue della variabile $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

• Archi continui, insiemi connessi per archi

Per quanto visto sui limiti di una funzione vettoriale e sui limiti delle singole componenti, il caso su cui possiamo operare con quanto già noto dal primo corso di Analisi, è quello di funzioni $r : I \to \mathbf{R}^n$, I intervallo reale. Denotando con t la variabile indipendente in I e con $x = (x_1, \ldots, x_n)$ la variabile dipendente in $\mathbf{R}^n$, una tale funzione è data da

$$\begin{cases} x_1 = x_1(t) \\ \vdots \\ x_n = x_n(t) \end{cases}$$

dove le componenti $x_j(t)$ sono appunto funzioni di una variabile reale a valori reali.

La funzione r è continua se e solo se lo sono tutte le sue componenti. In questo caso l'insieme dei valori $r(I)$ si dice un **arco continuo** di $\mathbf{R}^n$ e le equazioni precedenti sono dette equazioni parametriche dell'arco. In maniera cinematica, si può pensare alla variabile t come alla variabile di tempo ed alla legge $x = r(t)$ come la legge oraria di un moto in $\mathbf{R}^n$. Ad esempio, le equazioni

$$\begin{cases} x_1 = \bar{x}_1 + tv_1 \\ \vdots \\ x_n = \bar{x}_n + tv_n \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R},$$

sono equazioni parametriche della retta in $\mathbf{R}^n$ passante per il punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ (per $t = 0$) e direzione data dal vettore $v = (v_1, \dots, v_n)$. Le equazioni

$$\begin{cases} x_1 = (1-t)\bar{x}_1 + t\bar{y}_1 \\ \vdots \\ x_n = (1-t)\bar{x}_n + t\bar{y}_n \end{cases}, \quad 0 \le t \le 1,$$

sono equazioni parametriche del segmento in $\mathbf{R}^n$ congiungente il punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ (per $t = 0$) ed il punto $\bar{y} = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ (per $t = 1$). Le equazioni nel piano $\mathbf{R}^2$

$$\begin{cases} x = \bar{x} + r\cos t \\ \\ y = \bar{y} + r\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

sono equazioni parametriche della circonferenza di centro $(\bar{x}, \bar{y})$ e raggio $r > 0$.

Quando, come nell'esempio del segmento e della circonferenza, $I = [a, b]$ è un intervallo chiuso e limitato, i punti $r(a)$ ed $r(b)$ di $\mathbf{R}^n$ si dicono **estremi** dell'arco, $r(a)$ **punto iniziale**, $r(b)$ **punto finale**. Quando gli estremi coincidono, l'arco si dice **chiuso**, altrimenti **aperto**. Se la funzione r ristretta all'inetrvallo aperto (a, b) è iniettiva, allora l'arco si dice **semplice**. Questo significa che, estremi a parte, una stessa posizione non può essere assunta per valori diversi di t. Gli archi semplici si possono **orientare** stabilendo tra i punti dell'arco una

relazione d'ordine (verso di percorrenza) definendo che il punto $r(t_1)$ precede il punto $r(t_2)$ se e solo se $t_1 < t_2$.
Se tutte le componenti $x_j(t)$ sono derivabili, risulta definito il vettore derivata $r'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$, in termini cinematici il vettore velocità. Per $r'(t) \neq 0$, la direzione individuata da $r'(t)$ si dice direzione tangente all'arco nella posizione $r(t)$. La retta passante per $r(t)$ con direzione $r'(t)$ è detta retta tangente in tale punto. Torneremo con maggior dettaglio su queste cose nel capitolo dedicato agli integrali curvilenei.

Usiamo qui gli archi continui per definire una importante proprietà di insiemi in $\mathbf{R}^n$. Diremo che $D \subset \mathbf{R}^n$ è **connesso** (per archi) quando per ogni $x, y \in D$ esiste un arco continuo di estremi x, y completamente contenuto in D. Nel caso che come arco si possa scegliere il segmento per ogni coppia di punti x, y, l'insieme si dice poi **convesso**. Ovviamente un insieme convesso è a maggior ragione connesso. In dimensione $n = 1$, i connessi di $\mathbf{R}$ sono tutti e soli gli intervalli.

• **Teoremi sulle funzioni continue**

Diamo senza dimostrazione i principali teoremi sulle funzioni continue.

Teorema 1.1. (Weierstrass). *Sia $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ continua su D insieme limitato e chiuso di $\mathbf{R}^n$. Allora l'insieme dei valori $f(D)$ è limitato e chiuso in $\mathbf{R}^m$.*

Per funzioni a valori scalari ne segue:

Corollario 1.2. *Sia $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ continua su D insieme limitato e chiuso di $\mathbf{R}^n$. Allora f assume valori minimo e massimo assoluti in D.*

Infatti da $f(D)$ limitato in $\mathbf{R}$ segue che i valori di f hanno estremi inferiore e superiore finiti. Dal fatto poi che $f(D)$ è chiuso segue che tali estremi sono valori assunti, quindi minimo e massimo rispettivamente.

Teorema 1.3. (Bolzano). *Sia $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ continua su D insieme connesso di $\mathbf{R}^n$. Allora l'insieme dei valori $f(D)$ è connesso in $\mathbf{R}^m$.*

Per funzioni a valori scalari ne segue:

Corollario 1.4. *Sia $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ continua su D insieme connesso di $\mathbf{R}^n$. Allora l'insieme dei valori $f(D)$ è un intervallo di $\mathbf{R}$.*

In particolare, se una funzione continua a valori scalari assume due valori in un insieme connesso, allora assume anche tutti i valori tra essi compresi.

Mettendo insieme i due risultati precedenti, abbiamo anche il seguente utile corollario:

Corollario 1.5. *Sia* $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *continua su* D *insieme connesso, limitato e chiuso di* $\mathbf{R}^n$. *Allora l'insieme dei valori* $f(D)$ *è l'intervallo limitato e chiuso* $[m, M]$ *con* $m = \min f$, $M = \max f$.

• Determinazione dei limiti

Veniamo ora al problema di determinare il limite $\lim_{x\to\bar{x}} f(x)$ di una funzione scalare $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ in un punto di accumulazione $\bar{x}$ del dominio D. I procedimenti che illustreremo servono evidentemente anche a decidere, nel caso che $\bar{x} \in D$ non isolato, se la funzione f è continua o meno in D quando f non è assegnata in tutto il suo dominio attraverso una unica espressione ottenibile come somma, prodotto, quoziente, composizione di funzioni continue nelle componenti x_j della variabile $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Una utile condizione necessaria affinchè $\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \ell$, è contenuta nella seguente osservazione.

Osservazione 1.6. Sia
$$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = \ell.$$
Siano poi $r : I \to \mathbf{R}^n$ un arco e t_0 un punto di accumulazione di I in $\mathbf{R}$ tali che $r(t) \in D$ per ogni $t \neq t_0$ con
$$\lim_{t\to t_0} r(t) = \bar{x}.$$
Allora
$$\lim_{t\to t_0} f(r(t)) = \ell.$$

Si tratta di una applicazione immediata del teorema sui limiti di funzioni composte. Abbiamo quindi che, se la funzione f ammette limite per $x \to \bar{x}$, allora lo stesso limite deve valere quando x tende a $\bar{x}$ lungo una qualunque traiettoria parametrizzabile. Il vantaggio è che si ottiene un limite nella sola variabile reale t. Questa condizione necessaria si utilizza per evidenziare quale unico valore può essere il valore limite o per dimostrare che il limite non esiste esibendo una traiettoria lungo la quale non c'è limite o almeno due traiettorie lungo le quali si ottengono due limiti diversi.

Esempio 1.7. La funzione di due variabili reali
$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$
ha per dominio naturale $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. In tutti i punti del suo dominio naturale è in maniera evidente una funzione continua di (x, y).

L'origine è punto di accumulazione del dominio, quindi è naturale studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

per vedere se la funzione si può definire con continuità anche nell'origine. Prendendo come traiettorie le rette per l'origine

$$x = tv_1, \ y = tv_2,$$

veniamo a considerare

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2 v_1 v_2}{t^2(v_1^2+v_2^2)} = \frac{v_1 v_2}{v_1^2+v_2^2},$$

limite di funzione costante. Dal momento che lungo rette di diversa direzione $v = (v_1, v_2)$ si ottengono limiti diversi, il limite dato non esiste.

In particolare, la funzione data è costante lungo ogni retta per l'origine, tali rette, private dell'origine, sono quindi linee di livello. È evidente che se due linee di diverso livello hanno un comune punto di accumulazione, non può esistere il limite della funzione per la variabile che tende a tale punto.

Esempio 1.8. La funzione di due variabili reali

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y}$$

ha per dominio naturale $\mathbf{R}^2 \setminus \{y=0\}$. In tutti i punti del suo dominio naturale è in maniera evidente una funzione continua di (x,y). L'origine è punto di accumulazione del dominio, quindi possiamo studiare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Prendendo come traiettorie le rette per l'origine ammesse dal dominio

$$x = tv_1, \ y = tv_2, \quad v_2 \neq 0,$$

veniamo a considerare

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2(v_1^2+v_2^2)}{tv_2} = 0.$$

Questa volta il limite lungo tutte le rette ammissibili vale 0, quindi se esiste, il limite dato vale necessariamente 0. In realtà il limite non esiste in quanto lungo la parabola

$$x = t, \ y = t^2,$$

si ottiene il limite diverso

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2(1+t^2)}{t^2} = 1.$$

Condizioni sufficienti sono fornite, ad esempio, attraverso il confronto con funzioni elementari.
Nel caso di funzioni di due variabili x, y, un utile strumento nello studio del limite

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x, y)$$

è il passaggio a coordinate polari. Innanzitutto ci si può sempre ricondurre al caso $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ con una traslazione, poi si pone

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta$$

dove, come già detto per la rappresentazione trigonometrica dei punti nel piano complesso, $r \geq 0$ è la distanza di (x, y) da $(0, 0)$, $\vartheta \in [-\pi, \pi)$ è la misura in radianti dell'angolo orientato che il vettore non nullo (x, y) forma con il semiasse positivo dell'asse x secondo l'orientamento antiorario.
L'analisi del limite

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$$

per ϑ fissato è l'analisi del limite lungo una semiretta di inclinazione fissata. Se per un valore di ϑ tale limite non esiste o se per due distinti valori di ϑ si ottengono limiti diversi, allora il limite dato non esiste. Se invece per ogni ϑ si ottiene lo stesso limite ℓ, allora se il limite dato esiste vale necessariamente ℓ. Per concludere, basta ricordare che per definizione il limite è ℓ se e solo se per i punti $(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$ nel dominio vale

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0 :\ r < \delta_\varepsilon \Longrightarrow \forall\vartheta\ |f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) - \ell| \leq \varepsilon.$$

Posto

$$d(r) = \sup_\vartheta |f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) - \ell|,$$

questo equivale a

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_\varepsilon > 0 :\ r < \delta_\varepsilon \Longrightarrow 0 \leq d(r) \leq \varepsilon$$

quindi a

$$\lim_{r\to 0} d(r) = 0.$$

Concludendo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \ell \Longleftrightarrow \lim_{r\to 0} d(r) = 0.$$

Esempio 1.9. Torniamo allo studio di

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{y}$$

che sappiamo già non esistere dall'esempio 1.8. In coordinate polari si ha

$$f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) = \frac{r}{\sin\vartheta}, \quad \sin\vartheta \neq 0.$$

Per ogni ϑ fissato con $\sin\vartheta \neq 0$, si ha

$$\lim_{r\to 0} \frac{r}{\sin\vartheta} = 0$$

e questo dice che lungo ogni semiretta ammissibile per il dominio si ottiene limite $\ell = 0$. Se esiste il limite dato, allora vale 0. In realtà il limite non esiste in quanto, da $\lim_{\vartheta\to 0}\sin\vartheta = 0$, segue

$$d(r) = \sup_{\vartheta} \left|\frac{r}{\sin\vartheta} - 0\right| = \sup_{\vartheta} \frac{r}{|\sin\vartheta|} = +\infty$$

mentre $d(r)$ dovrebbe risultare finito e convergente a 0 per $r \to 0$.
A qualunque distanza fissata r dall'origine, scegliendo inclinazioni ϑ sufficientemente piccole in valore assoluto, quindi scegliendo punti nel dominio sufficientemente vicini al semiasse positivo delle x, si hanno valori $|f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)|$ grandi ad arbitrio. Questo ovviamente esclude che l'unico possibile valore 0, visto lungo le semirette, sia effettivamente valore limite.

Esempio 1.10. Studiamo

$$\lim_{(x,y)\to(0.0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}.$$

Si ha

$$f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) = r\cos^2\vartheta\sin\vartheta$$

e per ogni ϑ fissato vale

$$\lim_{r\to 0} r\cos^2\vartheta\sin\vartheta = 0.$$

Questo dice che lungo ogni semiretta si ottiene limite $\ell = 0$. Se esiste il limite dato, allora vale 0. Questa volta, da $|\sin\vartheta| \leq 1$, $|\cos\vartheta| \leq 1$, abbiamo

$$d(r) = \sup_{\vartheta} \left|r\cos^2\vartheta\sin\vartheta - 0\right| = \sup_{\vartheta} \left|r\cos^2\vartheta\sin\vartheta\right| \leq r,$$

da cui, per confronto,

$$\lim_{r\to 0} d(r) = 0.$$

Il limite dato esiste e vale 0.
La stima ottenuta di $d(r)$ dice che in tutti i punti $(x,y) \neq (0,0)$ dell'intorno di centro l'origine e raggio δ, la funzione assume valori $f(x,y)$ che in valore assoluto non superano δ stesso. Per confronto con $\delta \to 0$, è evidente che $f(x,y) \to 0$ per $(x,y) \to (0,0)$.

2. Differenziabilità

• Derivate direzionali

Sia $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ e sia $\bar{x}$ interno a D. Fissato un versore v, $\|v\| = 1$, di $\mathbf{R}^n$, consideriamo la retta di $\mathbf{R}^n$

$$x = \bar{x} + tv, \; t \in \mathbf{R},$$

passante per $\bar{x}$ a $t = 0$ e direzione data dal versore v. Possiamo pensare a tale retta come ad un asse orientato di origine $\bar{x}$, orientamento dato da v, dove t rappresenta l'ascissa. In un intorno di $t = 0$, risulta definita la funzione composta $f(\bar{x} + tv)$ il cui rapporto incrementale per $t = 0$ vale

$$\frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t}$$

e misura la variazione relativa dei valori di f spostandosi dall'origine $\bar{x}$ nel punto di ascissa t lungo la retta orientata di versore v. Quando esiste finito il limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(\bar{x} + tv) - f(\bar{x})}{t},$$

esso si indica

$$\frac{\partial}{\partial v} f(\bar{x})$$

e si chiama **derivata in $\bar{x}$ secondo la direzione v**.
L'interpretazione geometrica risulta evidente per $n = 2$, dove passiamo alla usuale notazione (x, y) della variabile indipendente. Sia quindi $(\bar{x}, \bar{y})$ un punto interno al dominio della funzione $f(x, y)$ e sia $v = (v_1, v_2)$ un versore del piano x, y. Tracciamo in tale piano la retta ϱ passante per $(\bar{x}, \bar{y})$, orientata da v

$$\varrho : \quad \begin{cases} x = \bar{x} + tv_1 \\ \\ y = \bar{y} + tv_2 \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo, il segmento σ centrato in $(\bar{x}, \bar{y})$

$$\sigma : \quad \begin{cases} x = \bar{x} + tv_1 \\ \\ y = \bar{y} + tv_2 \end{cases}, \quad -\delta \leq t \leq \delta,$$

è contenuto nel dominio di $f(x, y)$. Possiamo quindi definire l'arco γ in $\mathbf{R}^3$ di equazioni parametriche

$$\gamma : \quad \begin{cases} x = \bar{x} + tv_1 \\ \\ y = \bar{y} + tv_2 \\ \\ z = f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2) \end{cases}, \quad -\delta \le t \le \delta.$$

I punti di γ soddisfano l'equazione $z = f(x, y)$, quindi γ è un arco tracciato sulla superficie grafico di f. Detto π il piano individuato dalla retta ϱ nel piano x, y e dalla retta verticale per $(\bar{x}, \bar{y}, 0)$, l'arco γ è contenuto nella intersezione tra la superficie $z = f(x, y)$ ed il piano π. In tale piano, l'arco γ rappresenta il grafico della funzione di una sola variabile reale

$$g : t \mapsto f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2), \quad -\delta \le t \le \delta.$$

Per definizione, la derivata $\frac{\partial}{\partial v} f(\bar{x}, \bar{y})$ è la derivata $g'(0)$. L'arco γ in $\mathbf{R}^3$ ammette quindi retta tangente nel punto $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$, contenuta nel piano π. La derivata $\frac{\partial}{\partial v} f(\bar{x}, \bar{y})$ misura l'inclinazione di tale tangente nel piano π rispetto alla retta orientata ϱ. Derivando le equazioni di γ, il vettore di $\mathbf{R}^3$ che identifica la direzione nello spazio della retta tangente è

$$\left(v_1, v_2, \frac{\partial}{\partial v} f(\bar{x}, \bar{y}) \right).$$

Per $n \ge 2$, l'esistenza di tutte le derivate direzionali non implica la continuità, contrariamente a quanto accade per la derivabilità per funzioni di una sola variabile reale. Si veda in proposito l'esempio seguente.

Esempio 2.1. Consideriamo

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2}{y}, & y \ne 0 \\ \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Dall'esempio 1.8, sappiamo che f non è continua in $(0, 0)$ perchè non ammette limite, eppure ammette tutte le derivate direzionali in tale punto. Infatti, la funzione è identicamente nulla sull'asse x, quindi la derivata secondo la direzione $v = (1, 0)$, versore asse x, esiste nell'origine e vale 0. Per tutti gli altri versori $v = (v_1, v_2)$, $v_1^2 + v_2^2 = 1$ con

$v_2 \neq 0$, la derivata vale

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^2(v_1^2 + v_2^2)}{tv_2} = \frac{1}{v_2}.$$

La mancata regolarità non è certo dovuta al fatto che le derivate dipendono da v, questo è ovvio e naturale anche per funzioni regolari: basti pensare alla funzione lineare non identicamente nulla $g(x,y) = ax+by$, la cui superficie grafico $z = ax+by$ è un piano per l'origine, con derivate

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(tv_1, tv_2) - g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t(av_1 + bv_2)}{t} = av_1 + bv_2.$$

•Derivate parziali

La derivata di $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, nella direzione $v = e_j$,

$$e_j = (0,\ \dots,\ 0,\ \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1},\ 0,\ \dots,\ 0),$$

versore dell'asse x_j, si chiama **derivata parziale** rispetto ad x_j e si indica con uno dei simboli

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f,\ \ \partial_{x_j} f,\ \ f_{x_j}.$$

Applicando la definizione, nel punto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, si ha

$$f_{x_j}(\bar{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_j + t, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_j, \dots, \bar{x}_n)}{t},$$

Si tratta del limite del rapporto incrementale in $\bar{x}_j$ della funzione della sola variabile x_j

$$x_j \mapsto f(\bar{x}_1, \dots, x_j, \dots, \bar{x}_n),$$

quindi la derivata parziale rispetto ad x_j si calcola pensando ad x_j come unica variabile ed alle altre componenti x_k, $k \neq j$, come a delle costanti.

Si ricorre direttamente alla definizione quando non si possono applicare le usuali regole di derivazione, magari perchè la funzione non è definita attraverso una sola espressione elementare in un intorno del punto in questione ma è definita per casi. Per $n = 2$, le derivate parziali in $(\bar{x}, \bar{y})$, quando esistono, sono date da

$$f_x(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x,\bar{y}) - f(\bar{x},\bar{y})}{x - \bar{x}}, \quad f_y(\bar{x}, \bar{y}) = \lim_{y\to\bar{y}} \frac{f(\bar{x},y) - f(\bar{x},\bar{y})}{y - \bar{y}}.$$

Esempio 2.2. La funzione $f(x,y) = x^y$ ammette derivate parziali in tutti i punti (x,y) del suo dominio $x > 0$ con

$$f_x(x,y) = yx^{y-1}, \ f_y = x^y \log x.$$

Infatti, pensando ad y come costante si ha una funzione potenza della variabile x mentre, pensando ad x come costante, si ha una funzione esponenziale di variabile y.

Esempio 2.3. La funzione definita per casi

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

ha derivate parziali nell'origine date da

$$f_x(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^3}{x^2} = 1,$$

$$f_y(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \cdot \frac{y^4}{y^2} = 0.$$

Esempio 2.4. La funzione $f(x,y) = \sqrt{x^4+y^2}$ ha derivate parziali in $(x,y) \neq (0,0)$ ottenute attraverso le usuali regole:

$$f_x(x,y) = \frac{2x^3}{\sqrt{x^4+y^2}}, \ f_y(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^4+y^2}}.$$

Nell'origine le condizioni sufficienti (ma non necessarie!) fornite dalle usuali regole di derivazione non si applicano, usiamo la definizione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = 0,$$

quindi la derivata rispetto ad x esiste e vale

$$f_x(0,0) = 0.$$

Invece

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{y^2}}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{|y|}{y}$$

non esiste in quanto il limite destro è diverso dal limite sinistro. Non esiste la derivata rispetto ad y nell'origine.

In maniera equivalente, la funzione $f(x,0) = x^2$ è derivabile per $x = 0$ con derivata nulla mentre la funzione $f(0,y) = |y|$ non è derivabile per $y = 0$.

• Definizione di differenziale

Nel caso $n = 1$ di una funzione $f(x)$ di una sola variabile reale x a valori reali, la derivabilità in $\bar{x}$ equivale allo sviluppo al primo ordine

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h), \quad h \to 0,$$

che, ponendo $x = \bar{x} + h$, si può anche scrivere

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}), \quad x \to \bar{x}.$$

Questo consente di definire la retta tangente in $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ al grafico,

$$y = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}),$$

come la retta che approssima localmente il grafico al primo ordine.

Prendiamo ora una funzione di due variabili $f(x, y)$ a valori scalari e fissiamo un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ interno al dominio. Lo sviluppo locale al primo ordine significa che la variazione $f(\bar{x}+h, \bar{y}+k)-f(\bar{x}, \bar{y})$ è una funzione lineare $ah + bk$ nell'incremento (h, k) a meno di un errore trascurabile rispetto alla norma $\sqrt{h^2 + k^2}$ dell'incremento stesso:

$$f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) = f(\bar{x}, \bar{y}) + ah + bk + o(\sqrt{h^2 + k^2}), \quad (h, k) \to (0, 0).$$

Determiniamo le costanti a, b. Ponendo $k = 0$ e tenendo conto che $o(|h|) = o(h)$ per $h \to 0$, abbiamo

$$f(\bar{x} + h, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}) + ah + o(h), \quad h \to 0.$$

Per quanto visto per le funzioni di una sola variabile, la costante a vale la derivata in $\bar{x}$ della funzione

$$x \mapsto f(x, \bar{y}),$$

quindi, per definizione di derivata parziale

$$a = f_x(\bar{x}, \bar{y}).$$

Analogamente, ponendo $h = 0$, si ottiene

$$b = f_y(\bar{x}, \bar{y}).$$

Quando $f(x, y)$ si sviluppa al primo ordine di punto iniziale $(\bar{x}, \bar{y})$, lo sviluppo è dato da

$$f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) = f(\bar{x}, \bar{y}) + f_x(\bar{x}, \bar{y})h + f_y(\bar{x}, \bar{y})k + o(\sqrt{h^2 + k^2}),$$

$$(h, k) \to (0, 0).$$

Per definizione del simbolo di Landau, questo equivale a

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(\bar{x} + h, \bar{y} + k) - f(\bar{x}, \bar{y}) - f_x(\bar{x}, \bar{y})h - f_y(\bar{x}, \bar{y})k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Una funzione che soddisfa questa proprietà, si dice **differenziabile** nel punto $(\bar{x}, \bar{y})$ e l'applicazione lineare da $\mathbf{R}^2$ ad $\mathbf{R}$

$$(h, k) \mapsto f_x(\bar{x}, \bar{y})h + f_y(\bar{x}, \bar{y})k$$

che approssima localmente la variazione di $f(x, y)$ al primo ordine si chiama il **differenziale** di f in $(\bar{x}, \bar{y})$. Il differenziale si indica con

$$df(\bar{x}, \bar{y}),$$

quindi, per definizione,

$$df(\bar{x}, \bar{y})(h, k) = f_x(\bar{x}, \bar{y})h + f_y(\bar{x}, \bar{y})k.$$

Con la notazione $x = \bar{x} + h$, $y = \bar{y} + k$, lo sviluppo al primo ordine si scrive

$$\begin{aligned} f(x, y) = \quad & f(\bar{x}, \bar{y}) + f_x(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + f_y(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y}) \\ & + o\left(\sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2}\right), \quad (x, y) \to (\bar{x}, \bar{y}). \end{aligned}$$

Il piano di $\mathbf{R}^3$ di equazione

$$z = f(\bar{x}, \bar{y}) + f_x(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + f_y(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y})$$

è detto il **piano tangente** alla superficie grafico $z = f(x, y)$ nel punto $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$. La funzione affine

$$A(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + f_x(\bar{x}, \bar{y})(x - \bar{x}) + f_y(\bar{x}, \bar{y})(y - \bar{y})$$

che ha per grafico tale piano, fornisce l'approssimazione locale al primo ordine di $f(x, y)$.

In maniera evidente, **se la funzione** $f(x, y)$ **è differenziabile, allora è continua in** $(\bar{x}.\bar{y})$. Infatti, dallo sviluppo al primo ordine si ottiene immediatamente

$$\lim_{(x,y)\to(\bar{x},\bar{y})} f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}).$$

La definizione di differenziale si estende in maniera analoga alle funzioni $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ di variabile $x = (x_1, \ldots, x_n)$ con $n \geq 2$. Per $\bar{x} = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ interno a D, si dice che f è differenziabile in $\bar{x}$ quando esistono tutte le derivate parziali in $\bar{x}$ e, per $h = (h_1, \ldots, h_n)$, vale

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(\bar{x})h_j + o(\|h\|), \quad h \to 0.$$

Questo equivale a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(\bar{x})h_j}{\|h\|} = 0.$$

L'applicazione lineare

$$df(\bar{x}) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \quad df(\bar{x})h = \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(\bar{x})h_j,$$

si chiama il differenziale di f in $\bar{x}$. Tale applicazione lineare approssima localmente la variazione di f al primo ordine. Posto $x = \bar{x} + h$, lo sviluppo al primo ordine si scrive

$$f(x) = f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(\bar{x})(x_j - \bar{x}_j) + o(\|x - \bar{x}\|), \quad x \to \bar{x}.$$

L'iperpiano di $\mathbf{R}^{n+1}$ di equazione

$$x_{n+1} = f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(\bar{x})(x_j - \bar{x}_j)$$

è detto iperpiano tangente alla ipersuperficie grafico $x_{n+1} = f(x_1, \dots, x_n)$ nel punto $(\bar{x}, f(\bar{x}))$. La funzione affine

$$Ax = f(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(\bar{x})(x_j - \bar{x}_j)$$

che ha per grafico tale iperpiano, fornisce l'approssimazione locale al primo ordine di $f(x)$. Evidentemente, se f è differenziabile in $\bar{x}$, allora è continua in $\bar{x}$.

La sommatoria $\sum_{j=1}^{n} f_{x_j}(\bar{x})h_j$ vale il prodotto scalare tra il vettore $h = (h_1, \dots, h_n)$ ed il vettore che ha per componenti le derivate parziali di f in $\bar{x}$. Questo ultimo vettore si chiama **gradiente** di f in $\bar{x}$ e si indica con $\nabla f(\bar{x})$:

$$\nabla f(\bar{x}) = (f_{x_1}(\bar{x}), \dots, f_{x_n}(\bar{x})) .$$

Con questa notazione, lo sviluppo al primo ordine di f differenziabile in $\bar{x}$ si scrive

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + o(\|h\|), \quad h \to 0,$$

oppure, con diversa notazione,

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + o(\|x - \bar{x}\|), \quad x \to \bar{x}.$$

Il differenziale si rappresenta attraverso il prodotto scalare

$$df(\bar{x})h = \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle.$$

Esempio 2.5. Verifichiamo attraverso la definizione che

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$$

è differenziabile in $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 0)$. Per prima cosa, calcoliamo le derivate parziali. In tutti i punti del dominio $\{x \neq y\}$ di f si ha

$$f_x(x, y) = -\frac{2y}{(x-y)^2}, \;\; f_y(x, y) = \frac{2x}{(x-y)^2},$$

quindi

$$f_x(1, 0) = 0, \;\; f_y(1, 0) = 2.$$

Dobbiamo esaminare ora

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(1+h, k) - f(1, 0) - 0 \cdot h - 2 \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}},$$

infatti la funzione è differenziabile in $(1, 0)$ se e solo se tale limite esiste e vale 0. Abbiamo

$$\frac{f(1+h, k) - f(1, 0) - 0 \cdot h - 2 \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \frac{1}{\sqrt{h^2 + k^2}} \cdot \left(\frac{1+h+k}{1+h-k} - 1 - 2k \right)$$

$$= \frac{k(h-k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \cdot \frac{-2}{1+h-k}.$$

Dal momento che il secondo fattore converge a -2 per $(h, k) \to (0, 0)$, resta da esaminare il primo. Passando a coordinate polari

$$h = r\cos\vartheta, \;\; k = r\sin\vartheta,$$

il primo fattore si scrive

$$r\sin\vartheta(\cos\vartheta - \sin\vartheta).$$

Posto

$$d(r) = \sup_{\vartheta} |r\sin\vartheta(\cos\vartheta - \sin\vartheta)|,$$

da $|\sin\vartheta| \leq 1$, $|\cos\vartheta| \leq 1$, abbiamo

$$0 \leq d(r) \leq r|cos\vartheta - \sin\vartheta| \leq r|\cos\vartheta| + r|-\sin\vartheta| \leq 2r$$

quindi

$$d(r) \to 0, \quad r \to 0.$$

Concludendo

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(1+h, k) - f(1, 0) - 0 \cdot h - 2 \cdot k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

quindi la funzione è differenziabile in $(1, 0)$.

In particolare, $f(x, y)$ ammette sviluppo al primo ordine

$$f(x, y) = 1 + 0 \cdot (x-1) + 2 \cdot (y-0) + o\left(\sqrt{(x-1)^2 + (y-0)^2}\right),$$

per $(x,y) \to (1,0)$, cioè

$$f(x,y) = 1 + 2y + o\left(\sqrt{(x-1)^2 + y^2}\right), \quad (x,y) \to (1,0).$$

Il piano di equazione

$$z = 1 + 2y$$

è tangente alla superficie grafico

$$z = \frac{x+y}{x-y}$$

nel punto $(1,0,1)$.

Esempio 2.6. La funzione

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

è continua ovunque. Nell'origine non è però differenziabile in quanto non ammette derivata parziale $f_x(0,0)$: la funzione $f(x,0) = |x|$ non è derivabile per $x = 0$ (non ammette nemmeno la derivata $f_y(0,0)$ in quanto $f(0,y) = |y|$ non è derivabile per $y = 0$).
Il fatto che una funzione continua non sia necessariamente differenziabile era del resto già stato osservato per funzioni di una sola variabile.

La superficie (semicono di vertice l'origine) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ non ammette piano tangente nell'origine. Lo ammette in ogni altro punto, cosa che corrisponde alla differenziabilità in ogni $(x,y) \neq (0,0)$ di $f(x,y)$.

• Relazioni tra differenziabilità e derivabilità

Se una funzione $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è differenziabile in $\bar{x}$, allora esistono tutte le derivate parziali $f_{x_j}(\bar{x})$ ed il gradiente ìl vettore che rappresenta l'applicazione lineare differenziale da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}$. Esistono anche tutte le altre derivate direzionali:

Teorema 2.7. *Se $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è differenziabile in $\bar{x}$, allora esistono tutte le derivate direzionali e per ogni direzione v si ha*

$$\frac{\partial}{\partial v} f(\bar{x}) = \langle \nabla f(\bar{x}), v \rangle.$$

Dimostrazione. La funzione differenziabile f ammette sviluppo al primo ordine

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h \rangle + o(\|h\|), \quad h \to 0.$$

Prendendo $h = tv$ con $t \in \mathbf{R}$ e v un versore di $\mathbf{R}^n$, si ha

$$f(\bar{x} + tv) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), tv \rangle + o(|t|), \quad t \to 0.$$

Tenendo conto che $o(|t|) = o(t)$, ne segue

$$\frac{f(\bar{x}+tv)-f(\bar{x})}{t} = \frac{\langle \nabla f(\bar{x}), tv\rangle + o(t)}{t} = \langle \nabla f(\bar{x}), v\rangle + o(1), \quad t \to 0,$$

quindi

$$\frac{\partial}{\partial v} f(\bar{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\bar{x}+tv)-f(\bar{x})}{t} = \langle \nabla f(\bar{x}), v\rangle.$$

□

Per una funzione differenziabile, l'annullamento del gradiente equivale all'annullamento di tutte le derivate direzionali. Se invece $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$, allora per Cauchy-Schwarz

$$\left|\frac{\partial}{\partial v} f(\bar{x})\right| = |\langle \nabla f(\bar{x}), v\rangle| \leq \|\nabla f(\bar{x})\| \cdot \|v\| = \|\nabla f(\bar{x})\|$$

dove l'uguaglianza vale se e solo se v è versore parallelo a $\nabla f(\bar{x})$, quindi se e solo se

$$v = \pm \frac{\nabla f(\bar{x})}{\|\nabla f(\bar{x})\|}.$$

La derivata direzionale è massima in valore assoluto lungo queste due versori: **il gradiente non nullo identifica la direzione di massima variazione**.

Per $n = 2$ ed $f(x, y)$ differenziabile in $(\bar{x}, \bar{y})$ e $v = (v_1, v_2)$, vediamo l'interpretazione geometrica della relazione

$$\frac{\partial}{\partial v} f(\bar{x}, \bar{y}) = f_x(\bar{x}, \bar{y})v_1 + f_y(\bar{x}, \bar{y})v_2.$$

L'arco

$$x = \bar{x} + tv_1,\ y = \bar{y} + tv_2,\ z = f(\bar{x} + tv_1, \bar{y} + tv_2), \quad -\delta \leq t \leq \delta,$$

tracciato sulla superficie grafico $z = f(x, y)$, ha vettore tangente in $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$ dato da

$$w = \left(v_1, v_2, \frac{\partial}{\partial v} f(\bar{x}, \bar{y})\right).$$

Prendendo i due vettori

$$w_1 = (1, 0, f_x(\bar{x}, \bar{y})),\ w_2 = (0, 1, f_y(\bar{x}, \bar{y})),$$

tangenti agli archi tracciati secondo le direzioni dei versori coordinati del piano x, y, dalla relazione stabilita per $\partial f/\partial v$, ogni altro vettore tangente si scrive come la combinazione lineare

$$w = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

I vettori tangenti in $(\bar{x}, \bar{y}, f(\bar{x}, \bar{y}))$ agli archi tracciati sulla superficie giacciono su uno stesso piano, generato da w_1 e w_2. Questo piano è il piano tangente alla superficie grafico la cui esistenza è assicurata dalla differenziabilità di $f(x, y)$ in $(\bar{x}, \bar{y})$.

Tornando al caso generale di una funzione di n variabili, $n \geq 2$, $f(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, l'implicazione

$$f \text{ differenziabile in } \bar{x} \Longrightarrow f \text{ derivabile in } \bar{x}$$

non si può invertire. Abbiamo già visto che una funzione può essere derivabile lungo ogni direzione senza essere continua, mentre la differenziabilità implica la continuità. L'equivalenza tra derivabilità e differenziabilità vale solo nel caso $n = 1$ di funzioni di una sola variabile reale. Abbiamo comunque il seguente importante risultato:

Teorema 2.8. Differenziale totale. *Se le derivate parziali $f_{x_j}(x)$ di $f(x)$ sono definite per tutti gli x in un intorno di $\bar{x}$ e sono funzioni continue della variabile x nel punto $\bar{x}$, allora f è differenziabile in x.*

Quando in un insieme $D \subset \mathbf{R}^n$, risultano definite e continue tutte le derivate parziali, la funzione f si dice di **classe $\mathcal{C}^1$** su D e si scrive $f \in \mathcal{C}^1(D)$. Il teorema del differenziale totale assicura

$$f \in \mathcal{C}^1(D) \Longrightarrow f \text{ differenziabile in tutti i punti di } D.$$

Esempio 2.9. Esaminiamo la differenziabilità di

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

nei punti di $\mathbf{R}^2$.

In tutto $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, risultano definite e continue le derivate parziali

$$f_x(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, \;\; f_y(x, y) = \frac{y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Per il teorema del differenziale totale, la funzione f è differenziabile in ogni punto $(\bar{x}, \bar{y}) \neq (0, 0)$. In tali punti la funzione è a maggior ragione continua, cosa del resto già evidente, e derivabile secondo ogni direzione.

Nell'origine, usiamo direttamente la definizione. Da $f(x, 0) = x$ e $f(0, y) = y$, segue che esistono le derivate parziali nell'origine e valgono

$$f_x(0, 0) = 1, \;\; f_y(0, 0) = 1.$$

In coordinate polari

$$h = r \cos \vartheta, k = r \sin \vartheta,$$

abbiamo

$$\frac{f(h,k) - f(0,0) - 1 \cdot h - 1 \cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \cos^3\vartheta + \sin^3\vartheta - \cos\vartheta - \sin\vartheta,$$

costante rispetto ad r e dipendente da ϑ. Non esiste

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - 1 \cdot h - 1 \cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

quindi f non è differenziabile nell'origine.

Sempre con l'utilizzo delle coordinate polari, si verifica che f è continua nell'origine:

$$f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) = r(\cos^3\vartheta + \sin^3\vartheta),$$

quindi per ogni inclinazione ϑ fissata si ha limite 0 per $r \to 0$ (limiti lungo le semirette). Poi, posto

$$d(r) = \sup_{\vartheta} |r(\cos^3\vartheta + \sin^3\vartheta)|,$$

si ha

$$0 \le d(r) \le 2r$$

da cui $d(r) \to 0$ per $r \to 0$. Dunque la funzione è continua in$(0,0)$ perchè

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

La funzione ammette anche tutte le derivate direzionali in $(0,0)$, oltre che quelle parziali già determinate. Infatti, per ogni (v_1, v_2), $v_1^2+v_2^2 = 1$, abbiamo

$$\frac{\partial}{\partial v} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t(v_1^3+v_2^3)}{t} = v_1^3 + v_2^3.$$

Si noti che non vale per tutti i v la relazione

$$\frac{\partial}{\partial v} f(0,0) = f_x(0,0)v_1 + f_y(0,0)v_2.$$

Questo è un altro modo di vedere che la funzione f non è differenziabile in $(0,0)$.

• **Derivata della funzione composta**

Sia $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in I$ intervallo di $\mathbf{R}$, la parametrizzazione di una arco tracciato nell'aperto D di $\mathbf{R}^n$ e sia $f : D \to \mathbf{R}$ una funzione della variabile $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Risulta ben definita la funzione composta

$$f \circ x : I \to \mathbf{R},\ t \mapsto f(x(t)),$$

funzione di una variabile reale a valori reali di cui vogliamo esaminare la derivabilità. Vale il seguente risultato:

Teorema 2.10. (Regola della catena). *Se x è derivabile nel punto t ed f differenziabile nel punto corrispondente $x(t)$, allora la funzione composta è derivabile in t con*

$$\frac{d}{dt}f(x(t)) = \langle \nabla f(x(t)), x'(t)\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x(t)) \cdot \frac{dx_j}{dt}(\bar{t}).$$

Dimostrazione. Sviluppando la funzione differenziabile f con punto iniziale $x(t)$, l'approssimazione al primo ordine di $f(x(t+\tau)) - f(x(t))$ vale

$$\langle \nabla f(x(t)), x(t+\tau) - x(t)\rangle,$$

da cui

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{f(x(t+\tau)) - f(x(t))}{\tau} = \lim_{\tau\to 0} \left\langle \nabla f(x(t)), \frac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau} \right\rangle$$

$$= \langle \nabla f(x(t)), x'(t)\rangle.$$

□

Se le funzioni $f(x)$ ed $x(t)$ hanno una espressione semplice nota, invece di utilizzare la regola precedente, si può calcolare la funzione composta $f(x(t))$ e poi derivare direttamente l'espressione ottenuta. La regola precedente consente tuttavia di calcolare la derivata di $f(x(t))$ conoscendo la funzione $x(t)$ e le derivate parziali f_{x_j} senza dover risalire necessariamente alla funzione f. Possiamo interpretare fisicamente questa situazione nel modo seguente, ad esempio per $n = 2$.
Assegnato nel piano un campo vettoriale continuo

$$(x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

di potenziale scalare $U(x, y)$ di classe $\mathcal{C}^1$,

$$U_x = f_1,\ U_y = f_2,$$

possiamo studiare l'andamento del potenziale lungo un arco derivabile $(x(t), y(t))$ calcolando la derivata

$$\frac{d}{dt}U(x(t), y(t)) = U_x(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + U_y(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

$$= f_1(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + f_2(x(t), y(t)) \cdot y'(t)$$

senza dover ricavare necessariamente l'espressione di U.

Vediamo altre proprietà delle funzioni di più variabili collegate alla regola della catena.

Teorema 2.11. *Se una funzione $f : D \to \mathbf{R}$, D insieme aperto e connesso di $\mathbf{R}^n$ ha gradiente nullo in ogni punto di D, allora è costante in D.*

Dimostrazione. Presi due punti arbitrari $x, y \in D$, dal momento che l'insieme è aperto e connesso, esiste una poligonale di segmenti paralleli agli assi con x ed y come estremi e completamente contenuta in D. La funzione f è costante lungo tutti i lati della poligonale dal momento che ogni funzione di una variabile

$$x_j \mapsto f(\bar{x}_1, \dots, x_j, \dots, \bar{x}_n)$$

per $j = 1, \dots, n$, ha derivata identicamente nulla per ipotesi. Ne segue $f(x) = f(y)$, quindi f costante in D per l'arbitrarietà dei punti x, y.

□

Nell'ipotesi più restrittiva che f sia differenziabile con gradiente identicamente nullo, il fatto che $f(x)$ sia costante lungo un qualunque arco derivabile contenuto nel dominio, segue subito dalla regola della catena:

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \langle \nabla f(x(t)), x'(t) \rangle = \langle 0, x'(t) \rangle = 0$$

per ogni t nell'intervallo I in cui è definita la funzione $x(t)$.

Osservazione 2.12. Se la linea di livello passante per $\bar{x}$ di una funzione f differenziabile in $\bar{x}$ ha una parametrizzazione locale

$$x = x(t), \ \bar{t} - \delta \le t \le \bar{t} + \delta, \ x(\bar{t}) = \bar{x},$$

che consente di definire la direzione tangente alla linea in $\bar{x}$ attraverso il vettore $x'(\bar{t}) \neq 0$, allora **il vettore gradiente $\nabla f(\bar{x})$ è ortogonale alla linea di livello** in $\bar{x}$.

Infatti, la funzione $f(x(t))$ è costante per definizione di linea di livello, quindi ha derivata identicamente nulla. Per $t = \bar{t}$ abbiamo

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(\bar{t})) = \langle \nabla f(x(\bar{t})), x'(\bar{t}) \rangle$$

da cui l'ortogonalità del vettore ∇f rispetto alla linea di livello.

Esempio 2.13. Come ulteriore esempio di applicazione della regola della catena, calcoliamo le derivate parziali f_x ed f_y di una funzione $f(x, y)$ assegnata nel piano attraverso una espressione $g(r, \vartheta)$ in coordinate polari.

Da

$$f(x, y) = g(r(x, y), \vartheta(x, y)),$$

segue, pensando ad y come costante,

$$f_x = g_r(r, \vartheta) \cdot r_x + g_\vartheta(r, \vartheta) \cdot \vartheta_x,$$

mentre, pensando ad x come costante,

$$f_y = g_r(r,\vartheta)\cdot r_y + g_\vartheta(r,\vartheta)\cdot \vartheta_y.$$

Procuriamoci le derivate parziali di r e ϑ rispetto ad x, y. Da $r = \sqrt{x^2+y^2}$ segue

$$r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\vartheta, \quad r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\vartheta.$$

Nei vari quadranti, per $x \neq 0$, scegliendo per ϑ la determinazione $\vartheta \in (-\pi,\pi)$, abbiamo

$$\vartheta = \arctan(y/x) + c$$

con la costante $c = 0$ nel I e IV quadrante, $c = \pi$ nel II quadrante, $c = -\pi$ nel III quadrante. Ne segue

$$\vartheta_x = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{1}{r}\sin\vartheta, \quad \vartheta_y = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{r}\cos\vartheta.$$

Sostituendo

$$f_x = \cos\vartheta\cdot g_r(r,\vartheta) - \frac{1}{r}\sin\vartheta\cdot g_\vartheta(r,\vartheta),$$
$$f_y = \sin\vartheta\cdot g_r(r,\vartheta) + \frac{1}{r}\cos\vartheta\cdot g_\vartheta(r,\vartheta).$$

In simboli

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}.$$

• Differenziale per funzioni a valori vettoriali

Il concetto di differenziale si estende a funzioni $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ di variabile $x = (x_1,\ldots,x_n)$ e componenti $f = (f_1,\ldots,f_m)$. Si dice che f è differenziabile nel punto $\bar{x}$ interno a D se esiste una applicazione lineare

$$A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$$

tale che

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + Ah + o(\|h\|), \quad h \to 0,$$

o, con notazione equivalente,

$$f(x) = f(\bar{x}) + A(x-\bar{x}) + o(\|x-\bar{x}\|), \quad x \to \bar{x}.$$

L'applicazione lineare A si chiama differenziale di f in $\bar{x}$ e si indica con $df(\bar{x})$. Localmente, la funzione f si approssima al primo ordine con la trasformazione affine da $\mathbf{R}^n$ ad $\mathbf{R}^m$

$$x \mapsto f(\bar{x}) + df(\bar{x})(x-\bar{x}).$$

Ragionando sulle componenti, si vede che

f differenziabile in $x \Longleftrightarrow f_j$ differenziabile in x per ogni $j = 1, \dots, m$.

La matrice $m \times n$ che rappresenta $df(x)$ ha per righe i vettori gradienti $\nabla f_j(x)$ che rappresentano i differenziali di f_j nel punto x, nell'ordine per $j = 1, \dots, m$ Tale matrice si chiama matrice **jacobiana** di f nel punto x e si indica con $J_f(x)$:

$$J_f(x) = \begin{pmatrix} f_{1x_1}(x) & f_{1x_2}(x) \dots & f_{1x_n}(x) \\ f_{2x_1}(x) & f_{2x_2}(x) \dots & f_{2x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{mx_1}(x) & f_{mx_2}(x) \dots & f_{mx_n}(x) \end{pmatrix}.$$

Quando tutte le funzioni $f_{kx_j}(x)$ sono continue nel dominio D, allora f si dice di classe $\mathcal{C}^1$ in D e si scrive $f \in \mathcal{C}^1(D)$.

La regola della catena si estende nel modo seguente:

Teorema 2.14. (Differenziale della funzione composta). *Siano $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ e $g : f(D) \to \mathbf{R}^k$ differenziabili rispettivamente in $\bar{x}$ interno a D ed in $\bar{y} = f(\bar{x})$ interno a $f(D)$. Allora la funzione composta $g \circ f : D \to \mathbf{R}^k$ è differenziabile in $\bar{x}$ con*

$$d(g \circ f)(\bar{x}) = dg(\bar{y}) \circ df(\bar{x}).$$

In particolare, la matrice jacobiana $J_{g \circ f}(\bar{x})$ è il prodotto righe per colonne

$$J_{g \circ f}(\bar{x}) = J_g(\bar{y}) \cdot J_f(\bar{x}).$$

Per $n = k = 1$ si riottiene la regola della catena.

Nel caso di una funzione $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ differenziabile in $\bar{x}$, la matrice jacobiana che rappresenta $df(\bar{x})$ è una matrice quadrata $n \times n$. Il suo determinante si chiama il **determinante jacobiano**, o semplicemente lo jacobiano, in $\bar{x}$. Sappiamo che una trasformazione lineare da $\mathbf{R}^n$ a $\mathbf{R}^n$ è invertibile se e solo se la matrice che la rappresenta è non singolare. Se lo jacobiano in $\bar{x}$ è diverso da zero, allora la trasformazione affine che approssima localmente f al primo ordine è invertibile. Tenendo conto anche del teorema del differenziale totale, si dimostra il seguente risultato

Teorema 2.15. (Invertibilità locale). *Sia $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ di classe C^1 in D e sia $\bar{x} \in D$ un qualunque punto fissato con determinante jacobiano diverso da zero in $\bar{x}$. Esiste allora un intorno U di $\bar{x}$ tale che $f(U)$ è un insieme aperto, la restrizione $f_{|_U} : U \to f(U)$ è invertibile con inversa di classe $\mathcal{C}^1$ in $f(U)$.*

Da $f^{-1} \circ f = I$, I la funzione identità sul dominio di f, e dal teorema del differenziale della composta, segue subito

$$J_{f^{-1}}(f(x)) = (J_f(x))^{-1}.$$

3. Massimi e minimi liberi

• Derivate di ordine superiore

Sia $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ una funzione che ammette derivate parziali f_{x_j} in tutti i punti di D. Se le funzioni f_{x_j} sono a loro volta derivabili, le funzioni $f_{x_j x_k}$ si chiamano **derivate seconde** di f e si indicano anche coi simboli

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_j} f, \ \partial^2_{x_k x_j} f.$$

Anologamente si definiscono le derivate di ordine $k \geq 2$. Quando una funzione ha tutte le derivate di ordine k continue, si dice di classe $\mathcal{C}^k$ in D e si scrive $f \in \mathcal{C}^k(D)$.

Le possibili derivate seconde di f sono n^2, in generale le derivate di ordine k sono n^k. Si possono dare esempi in cui $f_{x_j x_k}$ e $f_{x_k x_j}$ con $k \neq j$ non coincidono. Una condizione sufficiente affinchè l'ordine delle variabili di derivazione sia ininfluente è contenuta nel seguente teorema.

Teorema 3.1. (Schwarz). *Se le derivate $f_{x_j x_k}$ e $f_{x_k x_j}$, $k \neq j$, sono definite in un intorno di $\bar{x}$ e sono continue in $\bar{x}$, allora*

$$f_{x_j x_k}(\bar{x}) = f_{x_k x_j}(\bar{x}).$$

Se $f \in \mathcal{C}^k(D)$, allora in tutte le derivate fino all'ordine k in D, l'ordine con cui sono considerate le variabili di derivazione è ininfluente. In particolare, se $f \in \mathcal{C}^2(D)$ la matrice $n \times n$ delle derivate seconde

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} f_{x_1 x_1}(x) & f_{x_1 x_2}(x) \dots & f_{x_1 x_n}(x) \\ f_{x_2 x_1}(x) & f_{x_2 x_2}(x) \dots & f_{x_2 x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(x) & f_{x_n x_2}(x) \dots & f_{x_n x_n}(x) \end{pmatrix}$$

è una matrice reale simmetrica per ogni $x \in D$. Tale matrice si dice **matrice hessiana** di f in x ed il suo determinante è detto **hessiano**. Come tutte le matrici simmetriche reali, in questo caso la matrice hessiana ha tutti autovalori reali il cui segno decide il segno della forma quadratica nella variabile $h = (h_1, \dots, h_n)$

$$\langle H_f(x)h, h \rangle = \sum_{j,k=1}^{n} f_{x_j x_k}(x) h_j h_k.$$

Inoltre una tale matrice è diagonalizzabile riferendo $\mathbf{R}^n$ ad una base di autovettori. Una volta ridotta in forma diagonale, gli elementi lungo la diagonale sono gli autovalori.
Ricordiamo che la forma quadratica si dice definita positiva quando assume valori positivi per ogni $h \neq 0$. Questo accade se e solo se tutti gli autovalori sono positivi.
La forma quadratica si dice definita negativa quando assume valori negativi per ogni $h \neq 0$. Questo accade se e solo se tutti gli autovalori sono negativi.
La forma quadratica si dice indefinita quando assume valori sia negativi che positivi. Questo accade se e solo c'è almeno una coppia di autovalori di segno discorde.
La forma quadratica si dice semidefinita positiva (rispettivamente negativa) quando assume valori maggiori o uguali (rispettivamente minori o uguali) a zero per ogni h. Questo accade se e solo se tutti gli autovalori sono maggiori o uguali (rispettivamente minori o uguali) a zero.

• Sviluppo al secondo ordine

Per $f \in \mathcal{C}^2(D)$ a valori scalari e $\bar{x}$ un qualunque punto fissato in D vale la formula di Taylor al secondo ordine

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), h\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(\bar{x})h, h\rangle + o(\|h\|^2), \quad h \to 0,$$

che si scrive anche

$$f(x) = f(\bar{x}) + \langle \nabla f(\bar{x}), (x-\bar{x})\rangle + \frac{1}{2}\langle H_f(\bar{x})(x-\bar{x}), (x-\bar{x})\rangle + o(\|x-\bar{x}\|^2),$$

$x \to \bar{x}$. Nel caso di due variabili reali (x, y), la formula scritta per esteso diventa

$$f(x,y) = f(\bar{x},\bar{y}) + f_x(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) + f_y(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y})$$

$$+\frac{1}{2}\left[f_{xx}(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})^2 + 2f_{xy}(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x})(y-\bar{y}) + f_{yy}(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y})^2\right]$$

$$+o\left((x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2\right), \quad (x,y) \to (\bar{x},\bar{y}).$$

• Massimi e minimi locali

I punti di massimo o minimo locali **interni** al dominio D di $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, si dicono punti di massimo o minimo **liberi**. Abbiamo una semplice condizione necessaria nel caso che siano definite le derivate parziali:

Teorema 3.2. *Se f ha derivate parziali nel punto di massimo o minimo libero $\bar{x}$, allora*

$$\nabla f(\bar{x}) = 0.$$

Dimostrazione. Ogni funzione di una variabile

$$x_j \mapsto f(\bar{x}_1, \dots, x_j, \dots, \bar{x}_n)$$

ha un punto di massimo o minimo interno al dominio per $x_j = \bar{x}_j$. Ne segue

$$f_{x_j}(\bar{x}) = 0, \; j = 1, \dots, n.$$

□

Si prova alla stessa maniera che ogni derivata direzionale che risulta definita, si annulla in un punto di massimo o minimo interno al dominio. I punti x che verificano

$$\nabla f(x) = 0$$

si chiamano i **punti critici** di f. Ogni punto di massimo o minimo libero di una funzione derivabile è un punto critico. Non vale il viceversa, come già osservato per funzioni di una sola variabile. I punti critici che non sono nè di massimo nè di minimo si dicono di **sella**. Il nome viene da una superficie a forma di sella di cavallo. Lungo la traiettoria di direzione assiale longitudinale, il centro della sella è di minima quota, lungo la traiettoria di direzione ortogonale, lo stesso punto è di massima quota. In ogni suo intorno ci sono sia punti più di quota maggiore che minore, quindi non è nè di massimo nè di minimo benchè entrambe le derivate nelle direzioni degli assi si annullino.

Vediamo quali condizioni necessarie e quali sufficienti si ottengono nella classificazione dei punti critici di una funzione f di classe $\mathcal{C}^2$ partendo dallo sviluppo al secondo ordine.

Teorema 3.3. (Condizioni necessarie) *Sia $f \in \mathcal{C}^2(D)$, $D \subset \mathbf{R}^n$, f a valori scalari e sia $\bar{x}$ un punto critico interno al dominio. Se $\bar{x}$ è un punto di minimo (risp. di massimo) relativo, allora la matrice hessiana $H_f(\bar{x})$ è semidefinita positiva (risp. semidefinita negativa). In particolare, se la matrice hessiana $H_f(\bar{x})$ è indefinita, allora $\bar{x}$ è un punto di sella.*

Dimostrazione Vediamo il caso di punto di minimo. Per assurdo, se esiste $\bar{h} \neq 0$ tale che

$$\langle H_f(\bar{x})\bar{h}, \bar{h}\rangle < 0,$$

allora, per omogeneità della forma quadratica,

$$\langle H_f(\bar{x})t\bar{h}, t\bar{h}\rangle = t^2\langle H_f(\bar{x})\bar{h}, \bar{h}\rangle < 0$$

per ogni $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$. Dalla formula di Taylor al secondo ordine, tenendo conto che $\nabla f(\bar{x}) = 0$ per ipotesi, si ottiene

$$f(\bar{x} + t\bar{h}) - f(\bar{x}) = \frac{1}{2} t^2 \langle H_f(\bar{x})\bar{h}, \bar{h}\rangle + o(t^2), \quad t \to 0.$$

In ogni intorno di $\bar{x}$, prendendo $|t|$ sufficientemente piccolo, c'è un punto della forma $\bar{x} + t\bar{h}$ tale che

$$f(\bar{x} + t\bar{h}) - f(\bar{x}) < 0$$

mentre dovrebbe esistere un intorno U di $\bar{x}$ tale che

$$f(x) \geq f(\bar{x})$$

per ogni $x \in U$. Visto che siamo arrivati ad una contraddizione, necessariamente deve essere

$$\langle H_f(\bar{x})h, h\rangle \geq 0$$

per ogni $h \neq 0$.

In maniera analoga si tratta il caso di $\bar{x}$ punto di massimo relativo. Se poi $H_f(\bar{x})$ è indefinita, allora $H_f(\bar{x})$ non è nè semidefinita positiva nè semidefinita negativa, quindi $\bar{x}$ non può essere nè di massimo nè di minimo relativo.

□

Teorema 3.4. (Condizioni sufficienti) *Sia $f \in \mathcal{C}^2(D)$, $D \subset \mathbf{R}^n$, f a valori scalari e sia $\bar{x}$ un punto critico interno al dominio. Se $H_f(\bar{x})$ è definita positiva (risp. definita negativa), allora $\bar{x}$ è un punto di minimo (risp. di massimo) relativo.*

Dimostrazione Vediamo il caso di $H_f(\bar{x})$ definita positiva. Dalla formula di Taylor al secondo ordine, tenendo conto che $\nabla f(\bar{x}) = 0$ per ipotesi, si ottiene

$$f(\bar{x} + t\bar{h}) - f(\bar{x}) = \frac{1}{2}\langle H_f(\bar{x})h, h\rangle + o(\|h\|^2), \quad h \to 0.$$

Prendendo $\|h\|$ sufficientemente piccola e diversa da zero, il segno del secondo membro è le stesso segno positivo della forma quadratica: c'è un intorno U di $\bar{x}$ tale che per ogni $x = \bar{x} + h$ in U

$$f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) > 0, \; h \neq 0,$$

quindi $\bar{x}$ è un punto di minimo locale (stretto).

In maniera analoga si tratta il caso di $H_f(\bar{x})$ definita negativa.

□

Per dimensione $n > 2$, il calcolo degli autovalori non è un problema agevole. Ricordiamo alcuni criteri per il segno di una forma quadratica che fanno uso solo di determinanti. Per $A = (a_{ij})$ matrice reale simmetrica, consideriamo i **minori principali** A_k, $k = 1, \ldots, n$, dati dai determinanti

$$A_k = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots \\ a_{k1} \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

I segni di questi minori sono tutti invarianti nel senso che rimangono gli stessi riferendo $\mathbf{R}^n$ a qualunque base. In particolare, se pensiamo alla forma con gli autovalori lungo la diagonale e tutti gli altri elementi nulli, otteniamo subito le seguenti condizioni sufficienti per il segno della forma quadratica:

$$\begin{aligned} A_k > 0, k = 1, \ldots, n &\implies A \text{ definita positiva;} \\ (-1)^k A_k > 0, k = 1, \ldots, n &\implies A \text{ definita negativa;} \\ A_k < 0, k \text{ pari} &\implies A \text{ indefinita.} \end{aligned}$$

In particolare, anche nel caso $n = 2$ dove gli autovalori possono essere calcolati esplicitamente, abbiamo la seguente classificazione di un punto critico $(\bar{x}, \bar{y})$ attraverso i due minori principali della matrice hessiana

$$H_f(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) & f_{xy}(\bar{x}, \bar{y}) \\ \\ f_{yx}(\bar{x}, \bar{y}) & f_{yy}(\bar{x}, \bar{y}) \end{pmatrix}$$

di una funzione f di classe $\mathcal{C}^2$:

$$\begin{aligned} f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) > 0, \det H_f(\bar{x}, \bar{y}) > 0 &\implies (\bar{x}, \bar{y}) \text{punto di minimo locale;} \\ f_{xx}(\bar{x}, \bar{y}) < 0, \det H_f(\bar{x}, \bar{y}) > 0 &\implies (\bar{x}, \bar{y}) \text{punto di massimo locale;} \\ \det H_f(\bar{x}, \bar{y}) < 0 &\implies (\bar{x}, \bar{y}) \text{punto di sella.} \end{aligned}$$

Nel caso $\det H_f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ uno dei due autovalori è nullo e non abbiamo condizioni sufficienti per concludere.

Esempio 3.5. Determiniamo i massimi e minimi locali della funzione

$$f(x, y) = (x - y)(x^2 + y^2 - 1).$$

Per prima cosa troviamo i punti critici. Da $f = x^3 - x^2 y + x y^2 - y^3 - x + y$ abbiamo

$$f_x = 3x^2 - 2xy + y^2 - 1, \;\; f_y = -x^2 + 2xy - 3y^2 + 1.$$

Mettiamo a sistema le due equazioni

$$f_x = 0, \;\; f_y = 0.$$

Sommando le due equazioni si ottiene

$$2x^2 - 2y^2 = 0$$

da cui

$$2(x-y)(x+y) = 0,$$

che equivale a

$$y = x \vee y = -x.$$

Sostituendo, ad esempio, nell'equazione $f_x = 0$ si ottengono i punti critici

$$P_1 = \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \sqrt{\tfrac{1}{2}}\right), P_2 = \left(-\sqrt{\tfrac{1}{2}}, -\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right),$$
$$P_3 = \left(\sqrt{\tfrac{1}{6}}, -\sqrt{\tfrac{1}{6}}\right), P_4 = \left(-\sqrt{\tfrac{1}{6}}, \sqrt{\tfrac{1}{6}}\right).$$

La matrice hessiana è

$$H_f(x,y)\begin{pmatrix} 6x-2y & -2x+2y \\ -2x+2y & 2x-6y \end{pmatrix},$$

da esaminare nei punti critici. Abbiamo

$$H_f(P_1) = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice è diagonale con autovalori di segno opposto: la forma quadratica è indefinita e P_1 è di sella.
In P_2 abbiamo

$$H_f(P_2) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

stesse conclusioni di prima, anche P_2 è di sella.
In P_3 abbiamo

$$H_f(P_3) = \begin{pmatrix} 4\sqrt{6}/3 & -2\sqrt{6}/3 \\ -2\sqrt{6}/3 & 4\sqrt{6}/3 \end{pmatrix}.$$

Da $f_{xx}(P_3) > 0$, $\det H_f(P_3) > 0$ la forma quadratica è definita positiva, P_3 è di minimo locale.
In P_4 abbiamo

$$H_f(P_4) = \begin{pmatrix} -4\sqrt{6}/3 & 2\sqrt{6}/3 \\ 2\sqrt{6}/3 & -4\sqrt{6}/3 \end{pmatrix}.$$

Da $f_{xx}(P_3) < 0$, $\det H_f(P_3) > 0$ la forma quadratica è definita negativa, P_4 è di massimo locale.

Il fatto che P_1 e P_2 siano di sella si può dedurre direttamente senza lo studio della matrice hessiana. Le considerazioni che seguono possono essere utili negli esercizi in cui il determinante hessiano è nullo.

Abbiamo $f(P_1) = f(P_2) = 0$. D'altra parte, per stabilire se un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ è di massimo, di minimo o di sella, si devono confrontare i valori $f(x, y)$ per (x, y) negli intorni di $(\bar{x}, \bar{y})$ con il valore $f(\bar{x}, \bar{y})$. In questo caso dobbiamo confrontare i valori $f(x, y)$ con il valore 0, quindi dobbiamo studiare il segno di $f(x, y)$. Torna comoda la forma fattorizzata

$$f(x, y) = (x - y)(x^2 + y^2 - 1),$$

dalla quale si evince che la funzione si annulla per $x = y$, bisettrice principale, e per $x^2 + y^2 = 1$, circonferenza di centro l'origine e raggio 1. Negli altri punti, il segno di $f(x, y)$ si deduce con la regola dei segni. Il fattore $x - y$ è positivo per $y < x$, quindi al di sotto della retta $y = x$, negativo per $y > x$ quindi nel semipiano superiore rispetto alla retta $y = x$. Il fattore $x^2 + y^2 - 1$ è positivo all'interno del cerchio delimitato dalla circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, negativo al di fuori. Tracciando in un grafico cartesiano la retta $y = x$ e la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$, si inseriscono dei segni $+$ e $-$ nelle varie regioni in cui il piano risulta diviso, seguendo la regola dei segni per il prodotto $(x - y)(x^2 + y^2 - 1)$. Ogni intorno di P_1 interseca sia zone col segno $+$ che zone col segno $-$: in ogni intorno la funzione assume sia valori minori che valori maggiori del valore zero che assume in P_1. Questo punto non è nè di massimo nè di minimo. Lo stesso accade per P_2. Avremmo avuto un punto di minimo locale in P_1 (o P_2) se ci fosse stato un intorno di tale punto che intersecava solo una zona $+$ e nessuna zona $-$; avremmo avuto un punto di massimo locale se ci fosse stato un intorno che intersecava solo una zona $-$ e nessuna zona $+$.

4. Massimi e minimi vincolati

Data una funzione continua $f : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ su un insieme limitato e chiuso, per il teorema di Weierstrass essa assume valori minimo e massimo assoluti. I punti di massimo e di minimo o sono interni a D o sulla frontiera. Nel caso che siano interni, se la funzione è parzialmente derivabile, si tratta di punti critici. Questa condizione necessaria non si applica sulla frontiera. Spesso, nelle applicazioni, tratti di frontiera sono descritti da una o più equazioni del tipo $g(x_1, \dots, x_n) = 0$, il chè motiva la definizione di **varietà** di $\mathbf{R}^n$ che andremo ad illustrare e lo studio di massimi e minimi di funzioni $f(x_1, \dots, x_n)$ ristrette a varietà. I massimi e minimi di restrizioni a varietà si dicono **massimi e minimi vincolati** della funzione.

• Varietà nel piano

Siano $A \subset \mathbf{R}^2$ un insieme aperto e sia $g : A \to \mathbf{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in A tale che $\nabla g(x,y) \neq 0$ in tutti i punti tali che $g(x,y)=0$. L'insieme

$$V = \{(x,y) \in A : \ g(x,y) = 0\}$$

si dice una **varietà di dimensione** 1 **di** $\mathbf{R}^2$**.** La dimensione 1 è l'unica possibile per le varietà nel piano, vedremo che in $\mathbf{R}^n$ si possono definire varietà di dimensione da 1 fino ad $n-1$. La dimensione 1 trova giustificazione, in maniera intuitiva, dal fatto che le due variabili (x,y) sono sottoposte al **vincolo** $g(x,y)=0$: la differenza tra il numero delle variabili ed il numero dei vincoli su di esse fornisce i gradi di libertà. Ciò si fonda sulla possibiltà di poter esplicitare la relazione $g(x,y)=0$ risolvendo l'equazione rispetto ad una delle due variabili, esprimendola come funzione dell'altra. Questa possibilità non può valere globalmente, nel senso che, nella relazione $g(x,y)=0$, in generale ad un valore di una delle due variabili può corrispondere più di un valore dell'altra: basti pensare ad una relazione polinomiale di grado superiore al primo. La condizione $\nabla g(x,y) \neq 0$ nei punti di V, inserita nella definizione di varietà, assicura che la possibilità di una tale esplicitazione valga localmente. Sia $(\bar{x},\bar{y}) \in V$ fissato e consideriamo lo sviluppo al primo ordine

$$\begin{aligned} g(x,y) = \ & g(\bar{x},\bar{y}) + g_x(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) + g_y(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y}) \\ & + o\left(\sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2}\right). \end{aligned}$$

Tenendo conto che $g(\bar{x},\bar{y})=0$, uguagliando a zero la parte del primo ordine si ottiene

$$g_x(\bar{x},\bar{y})(x-\bar{x}) + g_y(\bar{x},\bar{y})(y-\bar{y}) = 0.$$

Per ipotesi, questa equazione di primo grado ha almeno un coefficiente diverso da zero, mettiamo sia $g_y(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$. Si può ricavare y in funzione di x ottenendo

$$y = \bar{y} - \frac{g_x(\bar{x},\bar{y})}{g_y(\bar{x},\bar{y})}(x-\bar{x}).$$

Il teorema seguente dice che l'errore nella formula di approssimazione al primo ordine, localmente non incide sulla possibilità di esplicitare una variabile in funzione dell'altra, in questo caso y in funzione di x. La funzione ottenuta avrà come sviluppo al primo ordine proprio

$$y = \bar{y} - \frac{g_x(\bar{x},\bar{y})}{g_x(\bar{x},\bar{y})}(x-\bar{x}) + o(x-\bar{x}).$$

Teorema 4.1. (Funzioni implicite) *Sia* $g : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ *una funzione di classe* $\mathcal{C}^1$ *nell'aperto* A *e sia* $(\bar{x},\bar{y}) \in A$ *tale che* $g(\bar{x},\bar{y})=0$, $g_y(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$. *Allora esistono un intervallo reale aperto* I *con* $\bar{x} \in I$, *un intervallo reale aperto* J *con* $\bar{y} \in J$ *ed una funzione* $y(x)$ *di classe* $\mathcal{C}^1$

in I a valori in J tale che $y(\bar{x}) = \bar{y}$, $y'(\bar{x}) = -g_x(\bar{x}, \bar{y})/g_y(\bar{x}, \bar{y})$ e tale che per ogni $x \in I, y \in J$

$$g(x, y) = 0 \iff y = y(x).$$

Lo stesso risultato vale scambiando il ruolo delle variabili x e y.
In un intorno di un qualunque punto fissato $(\bar{x}, \bar{y}) \in V$, la varietà V di $\mathbf{R}^2$ coincide con un arco cartesiano

$$\begin{cases} x = t \\ \\ y = y(t) \end{cases} \quad \bar{x} - \delta \leq t \leq \bar{x} + \delta,$$

dove

$$y(\bar{x}) = \bar{y}, y'(\bar{x}) = -g_x(\bar{x}, \bar{y})/g_y(\bar{x}, \bar{y}),$$

oppure con

$$\begin{cases} x = x(t) \\ \\ y = t \end{cases} , \quad \bar{y} - \delta \leq t \leq \bar{y} + \delta,$$

dove

$$x(\bar{y}) = \bar{x}, x'(\bar{y}) = -g_y(\bar{x}, \bar{y})/g_x(\bar{x}, \bar{y}).$$

Nei due casi, i vettori delle derivate sono rispettivamente $(1, -g_x(\bar{x}, \bar{y})/g_y(\bar{x}, \bar{y}))$ e $(-g_y(\bar{x}, \bar{y})/g_x(\bar{x}, \bar{y}), 1)$. In ogni caso la direzione del vettore tangente è la stessa di

$$(g_y(\bar{x}, \bar{y}), -g_x(\bar{x}, \bar{y})),$$

ortogonale al vettore gradiente

$$\nabla g(\bar{x}, \bar{y}) = (g_x(\bar{x}, \bar{y}), g_y(\bar{x}, \bar{y}))$$

come subito si verifica calcolando il prodotto scalare. Del resto V è la linea di livello zero della funzione g e sappiamo già che quando la linea di livello è parametrizzabile in maniera regolare, il vettore gradiente è perpendicolare ad essa.
In particolare si definiscono lo **spazio tangente** (retta tangente) a V in $(\bar{x}, \bar{y})$ e lo **spazio ortogonale** (retta ortogonale) a V in $(\bar{x}, \bar{y})$. Lo spazio ortogonale è generato da $\nabla g(\bar{x}, \bar{y})$, quello tangente da un vettore che completa $\nabla g(\bar{x}, \bar{y})$ ad una base ortogonale di $\mathbf{R}^2$, ad esempio $(g_y(\bar{x}, \bar{y}), -g_x(\bar{x}, \bar{y}))$.

• Massimi e minimi su varietà nel piano
Sia $V = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$ una varietà giacente nell'aperto $A \subset \mathbf{R}^2$ e sia $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione differenziabile in A. Consideriamo la restrizione $f_{|V}$ e supponiamo che $(\bar{x}, \bar{y})$ sia un punto di massimo o di minimo locale di questa restrizione, cioè, come si usa dire, un punto di

massimo o di minimo vincolato per f. Abbiamo visto che in un intorno di $(\bar{x}, \bar{y})$ la varietà ammette equazioni parametriche di classe $\mathcal{C}^1$

$$x = x(t),\ y = y(t),\quad \bar{t} - \delta \leq t \leq \bar{t} + \delta,$$

con $x(\bar{t}) = \bar{x}$, $y(\bar{t}) = \bar{y}$. La funzione composta

$$f(x(t), y(t))$$

ha un punto di massimo o minimo locale per $t = \bar{t}$, da cui

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(\bar{t}), y(\bar{t})) = \langle \nabla f(\bar{x}, \bar{y}), (x'(\bar{t}), y'(\bar{t})) \rangle.$$

Il vettore gradiente $\nabla f(\bar{x}, \bar{y})$ è ortogonale alla varietà come $\nabla g(\bar{x}, \bar{y})$, quindi questi due vettori gradienti sono proporzionali. Abbiamo così provato il seguente teorema, che fornisce una utile condizione necessaria per i punti di massimo o minimo vincolati.

Teorema 4.2. (Moltiplicatori di Lagrange) *Se $(\bar{x}, \bar{y})$ è un punto di massimo o minimo vincolato sulla varietà*

$$V = \{(x, y) \in A : g(x, y) = 0\}$$

per la funzione $f : A \to \mathbf{R}$ differenziabile nell'aperto $A \subset \mathbf{R}^2$, allora esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda \nabla g(\bar{x}, \bar{y}).$$

Quindi, per trovare i possibili punti di massimo e di minimo vincolati (punti critici vincolati), si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y) \\ f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y) \\ g(x, y) = 0 \\ (x, y) \in A \end{cases}$$

Il sistema delle prime due equazioni equivale alla equazione vettoriale $\nabla f = \lambda \nabla g$, la terza equazione e la condizione $(x, y) \in A$ equivalgono a $(x, y) \in V$.

Se è noto a priori che il minimo e/o il massimo esistono, allora i punti di minimo e/o di massimo sono tra quelli trovati risolvendo il sistema. Basterà calcolare i valori corrispondenti per determinarli.

Esempio 4.3. Determiniamo col metodo dei moltiplicatori la distanza del punto $P = (1, 0)$ dalla retta di equazione $x - y = -1$. Per far questo, cerchiamo il minimo vincolato della funzione $f = (x-1)^2 + y^2$ (distanza al quadrato di (x, y) da $(1, 0)$) sulla varietà $V = \{(x, y) : x - y + 1 = 0\}$.

La funzione g che esprime il vincolo $g(x, y) = 0$ è data da $g = x-y+1$, l'aperto A in cui giace la varietà è l'intero piano. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2(x-1) = \lambda \cdot 1 \\ 2y = \lambda \cdot (-1) \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} .$$

Sostituendo $\lambda = -2y$ nella prima equazione, si ha

$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ \lambda = -2y \\ x - y + 1 = 0 \end{cases} ,$$

ed infine, sostituendo $y = -x + 1$ nella terza equazione, la soluzione è

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ \lambda = -2 \end{cases} .$$

Il punto di minimo vincolato, che sappiamo esistere dalla geometria elementare, è $(0, 1)$. La distanza cercata è la distanza di $(1, 0)$ da $(0, 1)$ quindi $\sqrt{2}$.

Esempio 4.4. Determiniamo l'insieme $f(D)$ di tutti i valori assunti da $f(x, y) = 2x - y$ sull'insieme $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

L'insieme D (semicerchio) è limitato, chiuso e connesso, la funzione f è continua. Per i teoremi sulle funzioni continue,

$$f(D) = [m, M], \quad m = \min_D f, M = \max_D f.$$

I punti di minimo e di massimo o sono punti critici interni, visto che f è derivabile ovunque, oppure sono sulla frontiera. Abbiamo

$$\nabla f = (2, -1),$$

quindi non ci sono punti critici interni. Il massimo ed il minimo sono assunti sulla frontiera. La frontiera si scrive come unione

$$V_1 \cup V_2 \cup \{(0, 1)\} \cup \{(0, -1)\}$$

di varietà e di due punti singolari, con

$$V_1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x > 0\},$$

semicirconferenza privata degli estremi,

$$V_2 = \{(x, y) : x = 0, -1 < y < 1\},$$

diametro privato degli estremi. Le equazioni $x^2 + y^2 - 1 = 0$ e $x = 0$ sono i rispettivi vincoli, mentre le disuguaglianze **strette** $x > 0$ e $-1 < y < 1$ descrivono il rispettivo **aperto** di $\mathbf{R}^2$ in cui giace la varietà. Usando disuguaglianze deboli non si sarebbero definite delle varietà. Non è possibile pensare la frontiera come varietà in alcun intorno di un estremo comune al diametro ed alla semicirconferenza. In tali punti non sono definibili la retta tangente e la retta ortogonale, quindi non si applica il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Questo non significa che non possano essere punti di massimo o di minimo, quindi vanno messi nell'elenco dei punti possibili. Gli eventuali altri punti possibili si cercano su V_1 e su V_2 col metodo dei moltiplicatori.

Su V_1 dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x > 0 \end{cases}.$$

Eliminando λ dalle prime due equazioni, abbiamo

$$\begin{cases} 1 = \lambda x \\ x = -2y \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x > 0 \end{cases},$$

da cui, sostituendo nella terza equazione,

$$\begin{cases} 1 = \lambda x \\ x = -2y \\ 5y^2 = 1 \\ x > 0 \end{cases}.$$

Tenendo conto anche della condizione $x > 0$, si ottiene il punto

$$(2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}).$$

Su V_2, il sistema dei moltiplicatori è

$$\begin{cases} 2 = \lambda \\ \\ -1 = \lambda \cdot 0 \\ \\ x = 0 \\ \\ -1 < y < 1 \end{cases}$$

che non ha soluzioni.

Abbiamo quindi tre possibili punti:

$$P_1 = (0, -1), P_2 = (0, 1), P_3 = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}).$$

Calcolando i valori corrispondenti

$$f(P_1) = 1, f(P_2) = -1, f(P_3) = \sqrt{5}$$

si vede che ł'estremo P_2 è il punto di minimo mentre P_3 è il punto di massimo. Si conclude che l'insieme dei valori di f è

$$f(D) = [-1, \sqrt{5}].$$

• **Varietà bidimensionali nello spazio e massimi e minimi vincolati**

Siano $A \subset \mathbf{R}^3$ un insieme aperto e sia $g : A \to \mathbf{R}$ una funzione di classe $\mathcal{C}^1$ in A tale che $\nabla g(x, y, z) \neq 0$ in tutti i punti tali che $g(x, y, z) = 0$. L'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in A : \ g(x, y, z) = 0\}$$

si dice una **varietà di dimensione** 2 **di** $\mathbf{R}^3$. La dimensione 2 trova giustificazione, in maniera intuitiva, dal fatto che le tre variabili (x, y, z) sono sottoposte al **vincolo** $g(x, y, z) = 0$ portando a due gradi di libertà. Questo viene precisato dal teorema delle funzioni implicite in tre variabili. Supponiamo che nel punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in V$, la condizione $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \neq 0$ sia realizzata ad esempio da $g_z(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \neq 0$. Allora localmente la varietà ha l'equazione cartesiana

$$z = z(x, y)$$

di una superficie grafico di una funzione di classe $\mathcal{C}^1$. Lo stesso fatto vale ovviamente scambiando il ruolo delle variabili, una di esse può essere ricavata come funzione $\mathcal{C}^1$ delle altre due.

In particolare si definiscono lo **spazio tangente** (piano tangente) a V in $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e lo **spazio ortogonale** (retta ortogonale) a V in $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Lo spazio ortogonale è generato da $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, quello tangente da una base di due vettori tra loro indipendenti ed entrambi ortogonali a $\nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Sia $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione differenziabile in A, consideriamo la restrizione $f_{|V}$ e supponiamo che $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sia un punto di massimo o di minimo vincolato per f. In maniera analoga a quanto visto nel piano, il vettore gradiente $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ deve appartenere allo spazio ortogonale quindi esiste $\lambda \in \mathbf{R}$ tale che

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \lambda \nabla g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}).$$

Quindi, per trovare i possibili punti critici vincolati, si deve risolvere il sistema di Lagrange

$$\begin{cases} f_x(x, y, z) = \lambda g_x(x, y, z) \\ f_y(x, y, z) = \lambda g_y(x, y, z) \\ f_z(x, y, z) = \lambda g_z(x, y, z) \\ g(x, y, z) = 0 \\ (x, y, z) \in A \end{cases}$$

• Varietà unidimensionali nello spazio e massimi e minimi vincolati

Siano $A \subset \mathbf{R}^3$ un insieme aperto e siano $g_1, g_2 : A \to \mathbf{R}$ due funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ in A tale che i due vettori $\nabla g_1(x, y, z)$ e $\nabla g_2(x, y, z)$ siano linearmente indipendenti in tutti i punti tali che $g_1(x, y, z) = g_2(x, y, z) = 0$. L'insieme

$$V = \{(x, y, z) \in A : \ g_1(x, y, z) = 0, g_2(x, y, z) = 0\}$$

si dice una **varietà di dimensione** 1 **di** $\mathbf{R}^3$. La dimensione 1 trova giustificazione, in maniera intuitiva, dal fatto che le tre variabili (x, y, z) sono sottoposte a due vincoli portando a un solo grado di libertà. Questo viene precisato dal teorema delle funzioni implicite per sistemi di due equazioni in tre variabili. Supponiamo che nel punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in V$, la condizione di indipendenza per i gradienti dei vincoli sia realizzata ad esempio da

$$\begin{vmatrix} g_{1y}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & g_{1z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ g_{2y}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) & g_{2z}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Allora localmente la varietà ha equazioni cartesiane

$$x = x, y = y(x), z = z(x)$$

di un arco di classe $\mathcal{C}^1$ nello spazio. Lo stesso fatto vale ovviamente scambiando il ruolo delle variabili, due di esse possono essere ricavate come funzioni $\mathcal{C}^1$ della terza.
In particolare si definiscono lo **spazio tangente** (retta tangente) a V in $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e lo **spazio ortogonale** (piano ortogonale) a V in $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Lo spazio ortogonale è generato dai due vettori indipendenti $\nabla g_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e $\nabla g_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$; quello tangente da un vettore che si ottiene completando ad una base ortogonale di $\mathbf{R}^3$, ad esempio dal prodotto vettoriale tra ∇g_1 e ∇g_2.

Sia ora $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione differenziabile in A, consideriamo la restrizione $f_{|V}$ e supponiamo che $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sia un punto di massimo o di minimo vincolato per f. In maniera analoga a quanto visto in precedenza, il vettore gradiente $\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ deve appartenere allo spazio ortogonale quindi esistono $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ tali che

$$\nabla f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}).$$

Quindi, per trovare i possibili punti critici vincolati, si deve risolvere il sistema di Lagrange

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = \lambda_1 g_{1x}(x,y,z) + \lambda_2 g_{2x}(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) = \lambda_1 g_{1y}(x,y,z) + \lambda_2 g_{2y}(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) = \lambda_1 g_{1z}(x,y,z) + \lambda_2 g_{2z}(x,y,z) \\ g_1(x,y,z) = 0 \\ g_2(x,y,z) = 0 \\ (x,y,z) \in A \end{cases}.$$

Esempio 4.5. Determiniamo l'insieme $f(D)$ di tutti i valori assunti da

$$f(x,y,z) = 2x - y + z$$

sull'insieme

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 - z^2 \leq 0, 0 \leq z \leq 1\}.$$

L'insieme D, delimitato da una superficie conica e da un piano, è limitato, chiuso e connesso; la funzione f è continua. Per i teoremi sulle funzioni continue,

$$f(D) = [m, M], \quad m = \min_D f, M = \max_D f.$$

I punti di minimo e di massimo o sono punti critici interni, visto che f è derivabile ovunque, oppure sono sulla frontiera. Abbiamo

$$\nabla f = (2, -1, 1),$$

quindi non ci sono punti critici interni. Il massimo ed il minimo sono assunti sulla frontiera. La frontiera si scrive come unione

$$V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \{(0,0,0)\}$$

di varietà di diversa dimensione e di un punto singolare, con

$$V_1 = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 - z^2 = 0, 0 < z < 1\},$$

di dimensione 2, superficie laterale conica privata del vertice e della circonferenza superiore,

$$V_2 = \{(x,y,z) : z = 1, x^2 + y^2 < 1\},$$

di dimensione 2, cerchio nel piano $z = 1$ privato della circonferenza,

$$V_3 = \{(x,y,z) : z = 1, x^2 + y^2 = 1\},$$

di dimensione 1, circonferenza nel piano $z = 1$.
In V_1 e V_2, le equazioni $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ e $z = 1$ sono i rispettivi vincoli, mentre le disuguaglianze **strette** $0 < z < 1$ e $x^2 + y^2 < 1$ descrivono il rispettivo **aperto** di $\mathbf{R}^3$ in cui giace la varietà. Usando disuguaglianze deboli non si sarebbero definite delle varietà. Non è possibile pensare la frontiera come varietà in alcun intorno del vertice $(0,0,0)$, si osservi in particolare che il gradiente di $g = x^2 + y^2 - z^2$ è nullo nell'origine. In tale punto non sono definibili lo spazio tangente e lo spazio ortogonale, quindi non si applica il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Questo non significa che non possa essere punto di massimo o di minimo, quindi va messo nell'elenco dei punti possibili. Gli eventuali altri punti possibili si cercano su V_1, V_2, V_3 col metodo dei moltiplicatori.

Su V_1 si considera

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ 1 = -2\lambda z \\ x^2 + y^2 = z^2 \\ 0 < z < 1 \end{cases} .$$

Eliminando λ dalle prime tre equazioni, abbiamo

$$\begin{cases} 1 = \lambda x \\ x = -2y \\ z = y \\ x^2 + y^2 = z^2 \\ 0 < z < 1 \end{cases},$$

da cui, sostituendo nella terza equazione,

$$\begin{cases} 1 = \lambda x \\ x = -2y \\ z = y \\ 4y^2 = 0 \\ 0 < z < 1 \end{cases},$$

che non ha soluzioni perchè si ottiene $x = y = z = 0$ dalla seconda terza e quarta equazione ma $x = 0$ è incompatibile con la prima.

Su V_2, il sistema dei moltiplicatori è

$$\begin{cases} 2 = \lambda \cdot 0 \\ -1 = \lambda \cdot 0 \\ 1 = \lambda \\ z = 1 \\ x^2 + y^2 < 1 \end{cases}$$

che non ha soluzioni.

Su V_3 abbiamo

$$\begin{cases} 2 = 2\lambda_1 x + \lambda_2 \cdot 0 \\ -1 = 2\lambda_1 y + \lambda_2 \cdot 0 \\ 1 = \lambda_2 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases},$$

da cui

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 x \\ x = -2y \\ 1 = \lambda_2 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases},$$

quindi, sostituendo $x = -2y$,

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 x \\ x = -2y \\ 1 = \lambda_2 \\ 5y^2 = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

e si arriva a determinare i punti

$$(-2/\sqrt{5}, \sqrt{5}, 1), (2/\sqrt{5}, -\sqrt{5}, 1)$$

Abbiamo quindi tre possibili punti:

$$P_1 = (0, 0, 0), P_2 = (-2/\sqrt{5}, \sqrt{5}, 1), P_3 = (2/\sqrt{5}, -1/\sqrt{5}, 1).$$

Calcolando i valori corrispondenti

$$f(P_1) = 0, f(P_2) = -3/\sqrt{5} + 1, f(P_3) = \sqrt{5} + 1$$

si vede che P_2 è il punto di minimo mentre P_3 è il punto di massimo. Si conclude che l'insieme dei valori di f è

$$f(D) = [1 - 3/\sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}].$$

• **Massimi e minimi vincolati, il caso generale**

Siano $A \subset \mathbf{R}^n$ un insieme aperto e siano $g_1, \dots, g_r : A \to \mathbf{R}$ r funzioni di classe $\mathcal{C}^1$, $1 \le r \le n-1$, in A tali che i vettori

$$\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_r(x)$$

siano linearmente indipendenti in tutti i punti tali che $g_1(x) = \ldots = g_r(x) = 0$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. L'insieme

$$V = \{x \in A : \; g_1(x) = 0, \dots, g_r(x) = 0\}$$

si dice una **varietà di dimensione** $n-r$ **di** $\mathbf{R}^n$. La dimensione $n-r$ trova giustificazione, in maniera intuitiva, dal fatto che le n variabili $x_1, \dots, x_n$ sono sottoposte a r vincoli portando a $n-r$ gradi di libertà. Questo viene precisato dal teorema delle funzioni implicite per sistemi di r equazioni in n variabili. Supponiamo che nel punto $\bar{x} \in V$, la condizione di indipendenza per i gradienti dei vincoli sia realizzata ad esempio da

$$\begin{vmatrix} g_{1x_{n-r+1}}(\bar{x}) & \dots & g_{1x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ g_{rx_{n-r+1}}(\bar{x}) & \dots & g_{rx_n}(\bar{x}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Allora localmente la varietà ha equazioni cartesiane

$$x_1 = x_1, \dots, x_{n-r} = x_{n-r},$$

$$x_{n-r+1} = x_{n-r+1}(x_1, \dots, x_{n-r}), \dots, x_n = x_n(x_1, \dots, x_{n-r})$$

di classe $\mathcal{C}^1$. Lo stesso fatto vale ovviamente scambiando il ruolo delle variabili, r di esse possono essere ricavate come funzioni $\mathcal{C}^1$ delle altre $n-r$.

In particolare si definiscono lo **spazio tangente** a V in $\bar{x}$, di dimensione $n-r$, e lo **spazio ortogonale** a V in $\bar{x}$ di dimensione r. Lo spazio ortogonale è generato dai vettori indipendenti

$$\nabla g_1(\bar{x}), \dots, \nabla g_r(\bar{x}),$$

quello tangente da $n-r$ vettori tra loro indipendenti ed ortogonali a tutti i gradienti precedenti.

Sia ora $f : A \to \mathbf{R}$ una funzione differenziabile in A, consideriamo la restrizione $f_{|V}$ e supponiamo che $\bar{x}$ sia un punto di massimo o di minimo vincolato per f. In maniera analoga a quanto visto in precedenza, il vettore gradiente $\nabla f(\bar{x})$ deve appartenere allo spazio ortogonale quindi esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbf{R}$ tali che

$$\nabla f(\bar{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{x}) + \ldots + \lambda_r \nabla g_r(\bar{x}).$$