Appunti di Analisi geometrica

Laurea magistrale in matematica

12 dicembre 2015

Avvertenza: chi dovesse trovare errori o avere commenti, gentilmente mandi un email a `daniele.morbidelli@unibo.it`.

Indice

1 Teoremi di regolarità per equazioni ordinarie e flussi di campi vettoriali **1**
- 1.1 Preliminari . . . 1
- 1.2 Dipendenza continua dai dati della soluzione di un equazione ordinaria . . . 3
- 1.3 Dipendenza C^1 . . . 5
- 1.4 Caso non autonomo, con parametri e regolarità piú alta . . . 8
- 1.5 Esercizi per casa . . . 9
- 1.6 Notazioni per i campi vettoriali . . . 10

2 Distanze associate a famiglie di campi vettoriali **11**
- 2.1 Aspetti generali . . . 11
- 2.2 Campi di tipo Grushin . . . 15
- 2.3 I campi del gruppo di Heisenberg . . . 16
- 2.4 Esercizi per casa . . . 17
- 2.5 Esistenza di cammini minimizzanti . . . 19

3 Calcolo non commutativo per campi vettoriali **21**
- 3.1 Diffeomorfismi, differenziale e push-forward di un campo . . . 21
- 3.2 Commutatori e derivate di Lie . . . 22

4 Distribuzioni e Teorema di Frobenius **27**
- 4.1 Distribuzioni e Teorema di Frobenius . . . 27
- 4.2 Sistemi di tipo Jacobi . . . 30

5 Campi di Hörmander **32**
- 5.1 Il Teorema di connettività di Chow–Rashevskii . . . 33

6 Il teorema delle orbite di Sussmann **35**

7 Teoria della differenziazione dell'integrale di Lebesgue **40**

1. Teoremi di regolarità per equazioni ordinarie e flussi di campi vettoriali

1.1. Preliminari

Ricordiamo il seguente teorema. (1)

Teorema 1.1. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Indichiamo con $(t, x) \in I \times \Omega$ le variabili. Supponiamo che $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ sia continua e localmente* *lipschitziana in x:*[1] *Allora per ogni* $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ *il problema*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad \textit{con } x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

ammette un'unica soluzione nel senso seguente: esiste un intervallo massimale $]\alpha, \beta[\subset I$ *e un'unica soluzione* $\psi \in C^1(]\alpha, \beta[, \Omega)$ *di* (1.2) *definita in tale intervallo aperto.*

Ricordiamo dalla teoria del prolungamento delle soluzioni che l'intervallo massimale $]\alpha, \beta[\subseteq I$ su cui è definita la soluzione ψ di (1.2) ha la seguente proprietà (usiamo le notazioni del teorema precedente):[2]

se $\beta < \sup I$*, allora per ogni compatto* $K \subset\subset \Omega$ *esiste* $t \in]t_0, \beta[$ *tale che* $\psi(t) \notin K$. (1.3)

Una proprietà analoga vale se $\inf I < \alpha$.

Osservazione 1.4 (Sistemi autonomi). *Se* $f(t, x) = a(x)$ *il sistema si dice autonomo e possiamo sempre ricondurci al caso* $t_0 = 0$.

Nel caso autonomo, la locale lipschitzianità di una funzione $f(t, x) = a(x)$ su un aperto Ω si esprime cosí: per ogni compatto $K \subset\subset \Omega$ vale

$$\mathrm{Lip}(a; K) := \sup_{x \neq y \in K} \frac{|a(x) - a(y)|}{|x - y|} < \infty.$$

Il numero $\mathrm{Lip}(a; K)$ si chiama *costante di Lipschitz di a su K*.

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e a localmente Lipschitziana su Ω (scriviamo $a \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$) consideriamo il problema di Cauchy

$$\dot{y} = a(y) \quad \text{con} \quad y(0) = x$$

dove $x \in \Omega$ è un dato assegnato. Per ogni $x \in \Omega$ indichiamo con una delle notazioni

$$]\alpha(x), \beta(x)[= \mathcal{D}(a, x) \supset \{0\}$$

l'intervallo aperto massimale e, a seconda delle circostanze e dell'opportunità, con una delle scritture

$$t \mapsto \psi(t) = \psi_t^a(x) = \psi_t(x) = \psi(t, x) \tag{1.5}$$

la corrispondente soluzione massimale.

[1] Precisamente, per ogni $[a, b] \subset I$ e per ogni compatto $K \subset\subset \Omega$, esista una costante L tale che

$$|f(t, x) - f(t, y)| \le L|x - y| \quad \text{per ogni } t \in [a, b] \text{ e } x, y \in K.$$

[2] Per una discussione completa sull'argomento, si veda ad esempio il libro: E. Lanconelli, Lezioni di Analisi Matrematica 2, Prima parte, Proposizione 3.1, p. 295.

1.2. Dipendenza continua dai dati della soluzione di un equazione ordinaria

Ora proviamo che, sotto ipotesi naturali, la soluzione $\psi(t,x)$ del problema di Cauchy autonomo

$$\dot{y} = a(y) \qquad y(0) = x$$

dipende con continuità (anzi in modo lipschitziano) dal dato iniziale $x \in \Omega$. [3]

Lemma 1.6 (Disuguaglianza di Gronwall). *Se $u \in C([0,T])$ soddisfa*

$$0 \le u(t) \le C + K \int_0^t u(s)ds \quad \textit{per ogni } t \in [0,T],$$

per qualche $C, K \ge 0$, allora

$$u(t) \le Ce^{Kt} \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Dimostrazione. Svolta in classe. □

Proposizione 1.7. *[Dipendenza continua dal dato – versione debole] SIa $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$ localmente lipschitziana, e sia dato un aperto $O \subset\subset \Omega$.* [4] *Presi $x, y \in O$ e $T > 0$ tali che*

$$\psi_t(x), \psi_t(y) \in O \quad \textit{per ogni } t \in [0,T], \tag{1.8}$$

allora indicata con $L = \mathrm{Lip}(a; O) < \infty$, vale

$$|\psi_t(x) - \psi_t(y)| \le |x-y|e^{Lt} \qquad \textit{per ogni } t \in [0,T].$$

Dimostrazione. Svolta in classe usando la rappresentazione integrale delle soluzioni e la disuguaglianza di Gronwall. □

Osserviamo che la dipendenza non è solo continua, ma di fatto lipschitziana localmente. Nel prossimo teorema rimuoviamo le ipotesi restrittive dell'enunciato precedente.

Teorema 1.9 (Dipendenza continua dal dato). *SIa $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$ localmente lipschitziana, sia $x \in \Omega$ e supponiamo che $\psi_t(x) \in \Omega$ definita su tutto l'intervallo chiuso $[0,T]$. Allora esiste $U \subset \Omega$ intorno di x tale che $t \mapsto \psi_t(y)$ è definita su tutto $[0,T]$ per ogni $y \in U$. Inoltre esiste $L > 0$ tale che valga la stima*

$$|\psi_t(x) - \psi_t(y)| \le |x-y|e^{Lt} \quad \textit{per ogni } y \in U \textit{ e } t \in [0,T].$$

Dimostrazione. Indichiamo con $\Gamma := \{\psi_t(x) : t \in [0,T]\}$ il percorso della curva integrale. Γ è compatto. Quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che, posto

$$O := \{y \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(y, \Gamma) < \varepsilon\},$$

[3] Seguiamo la presentazione del libro M. Hirsch, S. Smale, R. Devaney, Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Second edition. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 60. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004. xiv+417 pp. ISBN: 0-12-349703-5.

[4] Usiamo la notazione $A \subset\subset \Omega$ quando $\overline{A}$ è compatto contenuto in Ω. In particolare la distanza tra $\overline{A}$ e Ω^c è strettamente positiva.

l'insieme O ha chiusura compatta contenuta in Ω. QUindi

$$\mathrm{Lip}(a;O) < \infty$$

Fissiamo ora un numero $\delta > 0$ piccolo a sufficienza affinché $\delta e^{LT} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. e verifichiamo la seguente affermazione: se $|y - x| < \delta$, allora $t \mapsto \psi_t(y)$ è definita su un intervallo massimale $]\alpha(y), \beta(y)[\supset [0, T]$.

La cosa da provare è che $\beta = \beta(y) > T$. Supponiamo per assurdo che $\beta \leq T$ per qualche $y \in B(x, \delta)$. Allora per la proprietà (1.3), esisterebbe $s < \beta$ tale che

$$\psi_t(y) \in O \quad \forall t \in [0, s[\quad \text{e} \quad \psi_s(y) \notin O.$$

Allora risulterebbe per definizione di O,

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \mathrm{dist}(\psi_s(y); \Gamma) = \inf\{|\psi_s(y) - \psi_t(x)| : t \in [0, T]\} \\ &\leq |\psi_s(y) - \psi_s(x)|. \end{aligned}$$

D'altra parte, per ogni $t < s$ possiamo applicare la Proposizione 1.7 e troviamo

$$|\psi_t(y) - \psi_t(x)| \leq |y - x| e^{Lt} \leq \delta e^{LT} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Andando al limite per $t \to s-$ otteniamo una contraddizione. Quindi $\beta > T$. Di fatto abbiamo provato che se vale $|y - x| < \delta$, allora $\psi_t(y) \in O$ per ogni $t \in [0, T]$ e che inoltre vale

$$|\psi_t(y) - \psi_t(x)| \leq |y - x| e^{Lt} \quad \text{per } t \in [0, T],$$

che è la stima desiderata. □

Osservazione 1.10. *L'argomento della dimostrazione appena conclusa prova il seguente fatto* (3)
riguardante le curve integrali di un campo $a \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$: se $x \in \Omega$ e se $\psi(t, x)$ è definita su tutto $[0, T]$ (cioè $]\alpha(x), \beta(x)[\supset [0, T]$), allora esiste $\delta > 0$ e un intorno aperto O della curva $\Gamma = \{\psi(t, x) : t \in [0, T]\}$ che ha chiusura compatta in Ω e tale che se $y \in B(x, \delta)$, allora vale quanto segue:

(i) $[0, T] \subset]\alpha(y), \beta(y)[$ e in piú la curva $\{\psi(t, y) : t \in [0, T]\}$ è contenuta per intero nell'intorno O;

(ii) vale la stima di lipschitzianità $|\psi_t(y) - \psi_t(x)| \leq |x - y| e^{Lt}$ su $[0, T]$.

Osservazione 1.11. *Come conseguenza del teorema precedente, possiamo affermare che se $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è localmente lipschitziano, allora l'insieme massimale $G(a) \subset \mathbb{R} \times \Omega$ su cui è definita la mappa $(t, x) \mapsto \psi(t, x)$,*

$$G(a) := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega \mid t \in \mathcal{D}(a, x)\}$$

è aperto. Piú precisamente, la funzione $x \mapsto \beta(x)$ è inferiormente semicontinua [5]e la funzione $x \mapsto \alpha(x)$ è superiormente semicontinua. NOn si può affermanre però che sono continue (esempio: $a(x_1, x_2) = (1 + x_1^2, 0)$ su $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$. Scrivere $\psi_t(a, (0, x_2))$...)

Notiamo anche che, per $t \in \mathbb{R}$ fissato è definito l'insieme aperto (eventualmente vuoto)

$$\Omega_t^a = \{x \in \Omega : (t, x) \in G\} = \Omega_t^a = \{x \in \Omega : t \in]\alpha(x), \beta(x)[\} \subset \Omega$$

che costituisce il dominio naturale della mappa $\psi_t : \Omega_t \mapsto \psi_t(\Omega_t)$.

[5]Se $\beta(x) > T$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $\beta(y) > T$ non appena $|y - x| < \delta$.

Osserviamo che se $a \in C^1(\Omega)$ è di classe C^1 su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, data una palla $B \subset\subset \Omega$, allora $\mathrm{Lip}(a; B) \leq \sup_B |da| < \infty$.

Lemma 1.12. *Se $a \in C^1(\Omega)$, allora per ogni compatto $K \subset \Omega$ vale $\mathrm{Lip}(a; K) < \infty$.*

Dimostrazione. SI vede per assurdo, supponendo che esistano $x_n, y_n \in K$ tali che risulti $|a(x_n) - a(y_n)| > n|x_n - y_n|$ per ogni n ed estraendo sottosuccessioni convergenti a $x, y \in K$. Ricordare che $\sup_K |a| = \max_K |a| < \infty$. □

Non è vero che se $a \in C^1(\Omega)$, allora a è Lipschitziana su Ω (esempio $\sqrt{x}$ su $\Omega = (0,1)$). NOn è nemmeno vero che se $a \in C^1(\Omega)$ e $\sup_\Omega |da(x)| < \infty$, allora a è Lipschitziana su Ω. Perché?

Esercizio 1.13. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$, allora $x \mapsto \mathrm{dist}(x, A)$ è lipschitziana con costante di Lipschitz globale $L = 1$.*

1.3. Dipendenza C^1

Iniziamo richiamando il seguente fatto:

Proposizione 1.14. *Sia $A \in C(I, R^{n\times n})$ una funzione continua sull'interballo aperto I, a valori nelle matrici $n \times n$ ad elementi reali. Allora il sistema lineare*

$$\dot{x} = A(t)x \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

ammette un'unica soluzione $x : I \to \mathbb{R}^n$ definita globalmente in tutto l'intervallo I. La soluzione dipende linearmente da $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. L'esistenza locale e l'unicità seguono dalla teoria dell'Analisi 2. Proviamo l'esistenza globale. Supponiamo che $]\alpha, \beta[\subseteq I =]\inf I, \sup I[$ sia l'intervallo massimale e supponiamo ad esempio $\beta < \sup I$. Allora per ogni $t < \beta$ risulta

$$|x(t)| = \Big| x_0 + \int_0^t A(s)x(s)ds \Big| \leq |x_0| + \max_{[0,\beta]} |A| \int_0^t |x(s)|ds.$$

Allora usando la disuguaglianza di Gronwall e scrivendo $M = \max_{[0,\beta]} |A|$ si trova

$$|x(t)| \leq |x_0| e^{Mt} \leq |x_0| e^{M\beta} \quad \text{per ogni } t \in [0, \beta[.$$

Dunque si contraddice la proprietà (1.3) dell'intervallo massimale.[6] □

Definizione 1.16 (Equazione variazionale)**.** *Se $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 e se $\psi_t(x) = \psi(t, x)$ è una soluzione definita sull'intervallo $]\alpha, \beta[$, allora il sistema lineare nell'incognita $u = u(t) \in \mathbb{R}^n$*

$$u' = da(\psi_t(x))u$$

si chiama equazione variazionale lungo la soluzione ψ.

[6] Con un ragionamento analogo si può provare il seguente teorema di esistenza per tempi grandi:

Teorema 1.15. *Se $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è di classe $C^1_x \cap C^0_t$ e soddisfa per qualche C_1, C_2 la condizione di crescita*

$$|f(t, x)| \leq C_1 + C_2|x|, \quad \forall\, (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n,$$

allora la soluzione di $\dot{x} = f(t, x)$, con dato $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ è definita su tutto I.

L'equazione variazionale è lineare, e, per le proprietà dei sistemi lineari, il problema di Cauchy

$$u' = da(\psi_t(x))u \quad u(0) = \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.17}$$

ha un'unica soluziome $u_x(t, \xi)$ definita globalmente su $t \in]\alpha, \beta[$. Osserviamo che

$$\xi \mapsto u_x(t, \xi) \quad \text{è lineare.}$$

Se supponiamo che $(t, x) \mapsto \psi_t(x) = \psi(t, x)$ sia di classe C^2 su qualche aperto, si vede che la derivata $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j}\psi(t, x)$ soddisfa L'equazione variazionale (1.17) con dato $\xi = e_j$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j}\psi(t, x) = da(\psi(t, x))\frac{\partial}{\partial x_j}\psi(t, x).$$

Teorema 1.18. *SIa $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 e sia $x \in \Omega$. Sia inoltre $[0, T] \subset \mathcal{D}(a, x)$. Allora vale*

$$\psi_t(x + \xi) - \psi_t(x) - u_x(t, \xi) = o(|\xi|), \tag{1.19}$$

uniformemente in $t \in [0, T]$. Inoltre, la funzione $x \mapsto u_x(t, \xi)$ è continua nella variabile x.

Siccome $\xi \mapsto u_x(t, \xi)$ è lineare, questo significa che il flusso $x \mapsto \psi_t(x)$ è differenziabile rispetto ad x:

$$d\psi_t(x)(\xi) = u_x(t, \xi) \quad \text{per ogni } (t, x) \in G \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Inoltre, la matrice jacobiana $x \mapsto d\psi_t(x) = [u_x(t, e_1), \ldots, u_x(t, e_n)]$ è continua in x, In altre parole, $(t, x) \mapsto \psi(t, x)$ è di classe C^1 sull'insieme $G(a)$. Il Teorema 1.18 afferma anche che i passaggi

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j}\psi(t, x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t, x) = da(\psi(t, x))\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(t, x)$$

sono corretti.

Prima della dimostrazione ricordiamo che se $a \in C^1(\Omega)$ e se $O \subset\subset \Omega$ ha chiusura compatta, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ_ε tale che per ogni $z, w \in O$ con $|z - w| < \delta_e$, scritto $a(z) - a(w) = da(w)(z - w) + R_w(z - w)$, vale la stima uniforme

$$|R_w(z - w)| < \varepsilon |z - w|. \tag{1.20}$$

Dimostrazione.

Passo 1 Proviamo la differenziabilità e la formula $d\psi_t(x)(\xi) = u_x(t, \xi)$.

Siano $x \in \Omega$ e $T < \beta(x)$. Fissiamo i corrispondenti O, δ, L come nell'Osservazione 1.10. Preso $|\xi| < \delta$, in particolare $\psi_t(x + \xi)$ è definita per ogni $t \in [0, T]$ e $t \in [0, T]$ valgono le tre equazioni integrali

$$\psi_t(x + \xi) = x + \xi + \int_0^t a(\psi_s(x + \xi))ds$$

$$\psi_t(x) = x + \int_0^t a(\psi_s(x)ds$$

$$u_x(t, \xi) = \xi + \int_0^t da(\psi_s(x))u_x(s, \xi)ds$$

Sottraendo otteniamo per $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
&|\psi_t(x+\xi) - \psi_t(x) - u_x(t,\xi)| \\
&\qquad = \Big|\int_0^t \Big\{a(\psi_s(x+\xi)) - a(\psi_s(x)) - da(\psi_s(x))u_x(s,\xi)\Big\}ds\Big| \\
&\qquad = \Big|\int_0^t \Big\{da(\psi_s(x))[(\psi_s(x+\xi)) - \psi_s(x)] + R_{\psi_s(x)}(\psi_s(x+\xi) - \psi_s(x)) - \\
&\qquad\qquad - da(\psi_s(x))u_x(s,\xi)\Big\}ds\Big|
\end{aligned}$$

Poniamo anche $M = \sup_O |da| \geq \sup_{t\in[0,T]} |da(\psi_t(x))|$.. Inoltre vale la stima

$$|\psi_t(x+\xi) - \psi_t(x)| \leq |\xi| e^{LT}.$$

Se scegliamo $|\xi|e^{LT} < \delta_\varepsilon$, in modo che valga (1.20), troviamo:

$$\Big|R_{\psi_s(x)}(\psi_s(x+\xi) - \psi_s(x))\Big| \leq \varepsilon|\psi_s(x+\xi) - \psi_s(x)| \leq \varepsilon|\xi|e^{LT} \quad \forall s \in [0,T].$$

In definitiva:

$$\begin{aligned}
0 &\leq |\psi_t(x+\xi) - \psi_t(x) - u_x(t,\xi)| \\
&\leq M\int_0^t |\psi_s(x+\xi) - \psi_s(x) - u_x(s,\xi)|ds + e^{LT}\varepsilon|\xi|
\end{aligned}$$

e la tesi segue dalla disuguaglianza di Gronwall: infatti, ε è arbitrario e le costanti L, T dipendono dalla curva fissata $[0,T] \ni t \mapsto \psi_t(x)$.

Passo 2. Proviamo la continuità di $x \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j}\psi(t,x)$.

Siano $x \in \Omega$ e $T < \beta(x)$. Fissiamo i corrispondenti O, δ, L come nell'Osservazione 1.10. Intanto, poiché da è uniformemente continuo su O, preso ε esiste $\sigma_\varepsilon > 0$ tale che

$$|da(z) - da(w)| \leq \varepsilon \quad \text{se } z, w \in O \text{ e } |z-w| < \sigma_\varepsilon. \tag{1.21}$$

Inoltre, se indichiamo con $M = \sup_O |da|$, risulta

$$|d\psi_t(x)| \leq |I_n| + \Big|\int_0^t da(\psi_s(x))d\psi_s(x)ds\Big| \leq 1 + M\int_0^t |d\psi_s(x)|ds \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Quindi vale la stima $|d\psi_t(x)| \leq e^{Mt}$ per $t \in [0,T]$.

Ora, preso $y \in B(x,\delta)$, sarà

$$\begin{aligned}
|d\psi_t(y) - d\psi_t(x)| &= \Big|\int_0^t \Big(da(\psi_s(x))d\psi_s(x) - da(\psi_s(y))d\psi_s(y)\Big)ds\Big| \\
&\leq \int_0^t |da(\psi_s(x) - da(\psi_s(y))||d\psi_s(x)|ds \\
&\quad + \int_0^t |da(\psi_s(y))|\,|d\psi_s(x) - d\psi_s(y)| \quad \forall\, t \in [0,T].
\end{aligned}$$

Se ore rimpiccioliamo δ in modo che valga anche $\delta e^{LT} < \sigma_\varepsilon$ vale

$$|\psi_s(y) - \psi_s(x)| \leq |x-y|e^{LT} < \sigma_\varepsilon.$$

Quindi $|da(\psi_s(x) - da(\psi_s(y))| < \varepsilon$. Allora
$$|d\psi_t(y) - d\psi_t(x)| \le \varepsilon T e^{MT} + M \int_0^t |d\psi_s(y) - d\psi_s(x)| ds \quad \forall\, t \in [0, T].$$
Dalla disuguaglianza di Gronwall otteniamo dunque che, se $|y - x| < \delta$, vale
$$|d\psi_t(y) - d\psi_t(x)| \le \varepsilon T e^{MT} e^{Mt} \le \varepsilon T e^{2MT}.$$
La continuità è provata. $\square$

1.4. Caso non autonomo, con parametri e regolarità piú alta

In questo paragrafo presentiamo in modo informale alcune considerazioni sulle equazioni dipendenti da parametri, non autonome e con a piú regolare.

Osservazione 1.22 (dipendenza dal tempo iniziale). *Sia $a \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e consideriamo il problema di Cauchy,*
$$y' = a(y) \quad y(t_0) = y_0.$$
Se indichiamo con $\eta(t, t_0, y_0)$ la soluzione massimale su $]\alpha(t_0, y_0), \beta(t_0, y_0)[$, per le proprietà dei sistemi autonomi, vale
$$\eta(t, t_0, y_0) = \psi^a_{t-t_0}(y_0) = \psi^a(t - t_0, y_0).$$
Da questa formula si capisce che $\frac{\partial \eta}{\partial t_0}(t, t_0, y_0) = -a(\eta(t, t_0, y_0))$ è una funzione continua sull'aperto $\{(t, t_0, y_0) : (t - t_0, y_0) \in G(a)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega$ su cui è definita.

Osservazione 1.23 (Caso non autonomo o dipendente da parametri). *In generale, se $f : I \times \Omega \times O \to \mathbb{R}^n$ è una funzione C^1 sull'aperto $I \times \Omega \times O$, dove $t \in I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto, $y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $z \in O \subset \mathbb{R}^p$ aperto in uno spazio di parametri, possiamo considerare il problema di Cauchy*
$$y' = f(t, y, z_0) \qquad y(t_0) = y_0,$$
dove $t_0 \in I$, $y_0 \in \Omega$ e $z_0 \in O$ sono assegnati. Chiamiamo
$$]\alpha(t_0, y_0, z_0), \beta(t_0, y_0, z_0)[\ \ni s \mapsto \eta(s, t_0, y_0, z_0) \tag{1.24}$$
la soluzione massimale. Mostriamo che η è C^1 in tutte le variabili. Per vederlo trasformiamo t, z in variabili spaziali. Poniamo
$$\widehat{f} : I \times \Omega \times O \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \quad \widehat{f}(t, y, z) = (1, f(t, y, z), 0)$$
e analizziamo il problema autonomo:
$$\begin{cases} (t, y, z)' = \widehat{f}(t, y, z) := (1, f(t, y, z), 0) \\ (t, y, z)(s_0) = (t_0, y_0, z_0) \end{cases}$$
QUesto avrà una soluzione massimale
$$]\widehat{\alpha}(s_0, t_0, y_0, z_0), \widehat{\beta}(s_0, t_0, y_0, z_0)[\ \ni s \mapsto \widehat{\eta}(s, s_0, t_0, y_0, z_0)$$
che dipende in modo almeno C^1 da tutte le variabili s, s_0, t_0, y_0, z_0. COnsiderando il caso $s_0 = t_0$, vediamo che
$$\widehat{\eta}(s, t_0, t_0, y_0, z_0) = (s, \eta(s, t_0, y_0, z_0), z_0)$$
Con questa uguaglianza si può ricavare la regolarità di η usando quella di $\widehat{\eta}$.

Osservazione 1.25 (Caso piú regolare). *Se a è di classe $C^2(\Omega)$, allora guadriamo la funzione $v_j(t,x) = \partial_{x_j}\psi_t(x)$ che soddisfa in G il problema non autonomo*

$$\dot{v}_i = da(\psi(t,x))v_j \qquad v_j(0) = e_j.$$

Siccome $(t,x) \mapsto da(\psi(t,x))$ è C^1, usando l'osservazione precedente, otteniamo che ogni funzione v_j è di classe C^1. Quindi, visto che $\partial_t\psi = a \circ \psi \in C^1$, risulta $\psi \in C^2(G)$.

1.5. Esercizi per casa

1. Provare a dimostrare la formula classica sul determinante del flusso: data $a \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e detto $D(t,x) = \det d\psi_t(x)$, verificare che

$$\frac{d}{dt}D(t,x) = D(t,x)\operatorname{div} a(\psi_t(x))$$

dove $\operatorname{div} a(y) := \sum_{j=1}^n \partial_j a^j(y)$ è la divergenza di a. [7]

2. Dimostrare la seguente variante della disuguaglianza di Gronwall: se

$$0 \le f(t) \le at + b\int_0^t f(\tau)d\tau \quad \text{per ogni } t \in [0,T],$$

allora vale

$$f(t) \le a\frac{e^{bt}-1}{b} \quad \text{per ogni } t \in [0,T].$$

Dimostrare poi che se a è un campi C^1 su Ω, allora per ogni compatto $K \subset\subset \Omega$ esistono $\varepsilon, C > 0$ tali che

$$|d\psi_t(x) - I_n| \le C|t| \quad \text{per ogni } x \in K \text{ e } |t| \le \varepsilon,$$

Osserviamo che una conseguenza dell'esercizio 1 è il fatto che la funzione (5)

$$\psi_t : \Omega_t \to \psi_t(\Omega_t)$$

è un diffeomorfismo locale. Questo segue dalla formula esplicita

$$D(t,x) = \exp\Big(\int_0^t \operatorname{div} a(\psi_s(x))ds\Big) \neq 0$$

per ogni x e $t \in \mathcal{D}(a,x)$. Vedremo che ψ_t è anche iniettiva. In particoare, se $A \subset \Omega_t$ e se $\operatorname{div} a = 0$, vale

$$\mu(\psi_t(A)) = \int_A D(t,x)dx = \int_A dx\Big(\exp\Big(\int_0^t \operatorname{div} a(\psi_s(x))ds\Big) = \mu(A).$$

[7] Si può partire dalla formula del determinante con le permutazioni.

1.6. Notazioni per i campi vettoriali

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia $a \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Introduciamo l'operatore del primo ordine: $X = a \cdot \nabla$ definito per $f \in C^\infty(\Omega)$ come segue

$$Xf(x) = a(x) \cdot \nabla f(x) \equiv \langle a(x), \nabla f(x) \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \partial_k f(x),$$

per ogni $x \in \Omega$. Chiameremo gli operatori del primo ordine *campi vettoriali*.

Osserviamo informalmente le seguenti cose.

- Dato X, campo C^∞ su Ω, se $c : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione costante, vale $Xc = 0$. Inoltre è soddisfatta la regola di Leibnitz

  $$X(fg)(x) = Xf(x)g(x) + f(x)Xg(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{1.26}$$

  per ogni funzione $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$. Queste proprietà si esprimono dicendo che $X : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ è una derivazione.
- Se fissiamo un punto $x \in \Omega$, allora poniamo

  $$X_x f := Xf(x),$$

  per ogni $f \in C^\infty$ in qualche intorno di x. Allora X_x soddisfa la proprietà

  $$X_x(fg) = f(x)X_x g + g(x)X_x f.$$

  In tal caso i dice che X_x è una derivazione in x. Le derivazioni in x costituiscono un possibile modo di vedere la nozione di vettore tangente in x, anche nel contesto delle varietà.

Indentificheremo spesso il campo vettoriale $X = a \cdot \nabla$ con la funzione vettoriale a. Scriveremo quindi $\psi_t^X(x)$ oppure ψ_t^a indifferentemente.

Esempio 1.27. *Scrittura delle curve integrali di $X = \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_3}$ e di $Y = \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_2}$.*

Ricordiamo ancora che la funzione $(t, x) \mapsto \psi(t, x)$ è definita sull'insieme aperto

$$G := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega : t \in \mathcal{D}(X, x)\} = \bigcup_{x \in \Omega} \mathcal{D}(X, x) \times \{x\} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{t\} \times \Omega_t^X.$$

Se per qualche $t \in \mathbb{R}$ l'aperto Ω_t^X è non vuoto, allora $\psi_t : \Omega_t^X \to \psi_t(\Omega_t^X)$ si chiama flusso del campo X.

Proposizione 1.28. *Se $X = a \cdot \nabla$ è un campo C^1 su Ω, allora:*

(1) se $x \in \Omega$, t e $t + s \in \mathcal{D}(X, x)$, allora $s \in \mathcal{D}(X, \psi_t(x))$ e vale

$$\psi_{t+s}^X(x) = \psi_t^X \psi_s^X(x);$$

(2) in particolare, se $x \in \Omega$,

$$\psi_{-t}^X \psi_t^X(x) = x \quad \text{per ogni } t \in \mathcal{D}(X, x);$$

(3) Infine, se λX indica il campo $\lambda a(x) \cdot \nabla_x$, si ha

$$\psi_{\lambda t}^X x = \psi_t^{\lambda X} x \quad \text{per ogni } x \in \Omega \text{ e } \lambda t \in \mathcal{D}(x, X).$$

Dimostrazione. Segue dall'unicità. Discussa in classe. □

La proprietà (3) rende non equivoca la notazione esponenziale:

$$e^{tX}x := \psi_t^X(x),$$

in cui tX sono aggregati in forma moltiplicativa. A proposito di tale notazione, osserviamo che se X è un campo C^∞ su Ω e se f è una funzione C^∞ su Ω, allora vale la form,ula comoda

$$\frac{d}{dt}f(e^{tX}x) = Xf(e^{tX}x).$$

per ogni x e per ogni $t \in \mathcal{D}(X,x)$. Si possono fare anche le derivate successive:

$$\frac{d^k}{dt^k}f(e^{tX}x) = X^k f(e^{tX}x),$$

qualora la regolarità di X e f lo permetta.

Proposizione 1.29. *Se $X = a \cdot \nabla$ è un campo C^1 su Ω, allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ per cui $\Omega_t^X \neq \varnothing$, la funzione*

$$\psi_t^X : \Omega_t^X \to \psi_t^X(\Omega_t^X) \tag{1.30}$$

è un diffeomorfismo di classe C^1. Inoltre vale $(\psi_t^X)^{-1} = \psi_{-t}^X$

Dimostrazione. La formula sul determinante dice che ψ_t è un diffeomorfismo locale. La proprietà (2) prova l'iniettività globale. □

Se consideriamo due campi C^1 su Ω, $X = a \cdot \nabla$ e $Y = b \cdot \nabla$ possiamo osservare la funzione

$$(t,s,x) \mapsto \psi_s^Y \psi_t^X(x) = e^{sY}e^{tX}x.$$

Utilizzando gli argomenti seguiti nel caso di un solo campo, si può dimostrare che tale funzione è definita su un aperto nella variabili $(s,t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega$ ed è di classe C^1 su tale aperto. Osserviamo però che i due flussi in generale non commutano. Utilizzando tale proprietà, se partiamo da $e^{tX}e^{-tX}x = x$ e differenziamo, otteniamo la formula, che ristroveremo piú avanti

$$Xf(e^{tX}x) = X(f \circ e^{tX})(x), \tag{1.31}$$

valida ogni volta che $x \in \Omega$ e $t \in \mathcal{D}(X,x)$. [8]

In generale, prendendo campi $X_1, \dots, X_\nu$ di classe C^1 su Ω, la funzione $(t_1, \dots, t_\nu, x) \mapsto e^{t_1X_1}e^{t_2X_2}\cdots e^{t_\nu X_\nu}x$ è definita e di classe C^1 su un aperto di $\mathbb{R}^\nu \times \Omega$ contenente $\{0\} \times \Omega$.

2. Distanze associate a famiglie di campi vettoriali

2.1. Aspetti generali

Definizione 2.1 (Spazio metrico)**.** *Sia X un insieme. Una funzione $d : X \to X \to \mathbb{R}$ si dice distanza su X se*

[8]Si può esprimere dicendo che $XE_t^X f = E_t^X Xf$, se indichiamo con $E_t^X f(\xi) = f(e^{tX}\xi)$ la traslazione finita lungo le curve integrali di X.

(i) $d(x,y) \geq 0$ *per ogni* $x, y \in X$*;*
(ii) $d(x,y) = 0$ *se e solo se* $x = y$*;*
(iii) $d(x,y) = d(y,x)$ *per ogni* $x, y \in X$*.*
(iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *per ogni* $x, y, z \in X$*.*
La coppia (X, d) *si chiama spazio metrico.*

Esempio 2.2. *Ecco alcuni esempi:*
(a) $\mathbb{R}^n$ *euclideo,* $d(x,y) = |x-y|$*;*
(b) $\mathbb{R}^n$ *con la norma* $|x|_p := \left(\sum_j |x_j|^p\right)^{1/p}$*. Qui* $p \in [1, \dots, \infty]$*.*
(c) $\mathbb{R}^n$ *con la metrica* $d(x,y) = |x-y|^\varepsilon$*, con* $0 < \varepsilon \leq 1$*.* [9]

Definizione 2.3 (cammino ammissibile e cammino subunitario)**.** *Sia data una famiglia di m campi* $X_1 = a_1 \cdot \nabla, \dots, X_m = a_m \cdot \nabla$ *dove ciascun* X_j *è un campo* C^1 *su* $\mathbb{R}^n$*. Un cammino* γ *si dice* ammissibile *se è Lipschitz esiste una funzione vettoriale* *limitata* $\alpha : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ *per la quale valga*

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(t) X_j(\gamma(t)) \quad \textit{per quasi ogni } t \in [0,T].$$

Se vale

$$|\alpha(t)| := \Big\{\sum_j \alpha_j(t)^2\Big\}^{1/2} \leq 1 \quad \textit{a.e.}$$

allora diciamo che il cammino è subunitario.

Esercizio 2.4 (Esercizio per casa)**.** *Dato il campo in* $\Omega = \mathbb{R}^1$*,* $X = (1+x^2)\partial_x$*, scrivere la funzione* $\psi_t^X(x)$*. Individuare* $\mathcal{D}(X,x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$*, fare un grafico nel piano* (t,x) *dell'insieme G. Descrivere l'insieme* Ω_t *per ogni* $t \in \mathbb{R}$*, e individuare l'insieme* $\psi_{\pi/4}(]0,1[)$*.*

Osservazione 2.5. *Ogni cammino ammissibile può essere riparametrizzato linearmente e reso* (7)
subunitario.

Esempio 2.6. *VIsti i cammini subunitari nei seguenti esempi:*
(1) $\mathbb{R}^n$ *con i campi coordinati* $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$
(2) $\mathbb{R}^n$ *con una metrica Riemanniana g.*
(3) In caso $\mathbb{R}^2$ *con coordinate* (x_1, x_2) *e un solo campo* $X_1 = \partial_{x_1}$

Definizione 2.7 (Distanza di controllo (o di Carnot–Carathéodory))**.** *Siano dati* $X_1, \dots, X_m$ *campi* C^1 *in* $\mathbb{R}^n$*. Siano x, y due punti che possono essere connessi da almeno un cammino subunitario. Allora poniamo*

$$d(x,y) := \inf\{T : \textit{ esiste } \gamma : [0,T] \textit{ subunitaria e con } \gamma(0) = x,\, \gamma(T) = y.\}$$

La simmetria e la disuguaglianza triangolare sono facili da verificare. Definiamo anche

$$B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\} = \{\gamma(T) : \gamma \text{ subunit su } [0,T] \text{ con } \gamma(0) = x \text{ e } T < r\}$$

Qualche volta scriveremo d_{cc} e B_{cc}.

[9] Per dimostrare la disuguaglianza triangolare, confrontare le funzioni $f(t) = (1+t)^\varepsilon$ e $g(t) := 1 + t^\varepsilon$ su $[0, +\infty[$ guardando il valore in 0 e le derivate.

Osservazione 2.8. *Se per una coppia di punti x e y non ci sono curve subunitarie che li connettono (ad esempio ciò avviene nel caso (3) dell'Esempio 2.6), si conviene di porre $d(x,y) = +\infty$.*

Esempio 2.9. *Discussionedelle distanze generate tramite i cammini subunitari descritti nell'Esempio 2.6.*

Proposizione 2.10. *Se $X_1, \ldots, X_m$ sono campi C^1 in $\mathbb{R}^n$, allora per ogni insieme limitato Ω, esiste C tale che*

$$|x - y| \le C d_{\mathrm{cc}}(x,y) \quad \forall x, y \in \Omega$$

(il membro di destra può essre $+\infty$).

Questa proposizione dimostra e quantifica il fatto che se $d_{\mathrm{cc}}(x,y) = 0$, allora $x = y$. Seguendo Hajłasz e Koskela,[10] iniziamo dal seguente lemma

Lemma 2.11. *Siano $X_1, \ldots, X_m$ campi vettoriali in $\mathbb{R}^n$ e sia $B_{\mathrm{Euc}}(x,r)$ una palla euclidea. Poniamo $M = M(x,r) := \sup_{B(x,r)} \sum_j |X_j|$. Se γ è subunitaria e $\gamma(0) = x$, allora allora*

$$\gamma([0,T]) \subset B_{\mathrm{Euc}}(x,r) \quad \textit{per ogni } T \le \frac{r}{M(x,r)}.$$

Dimostrazione. Supponiamo che la tesi non sia vera e indichiamo con t_0 il piú piccolo tempo per cui $|\gamma(t_0) - x| = R$. Allora

$$R = |\gamma(t_0) - x| \le \left| \int_0^{t_0} \dot\gamma(s) ds \right| = \left| \int_0^{t_0} \sum_j \alpha_j(s) X_j(\gamma(s)) ds \right| \le M t_0.$$

Quindi $t_0 \ge \frac{R}{M}$. □

Possiamo anche riformulare come segue:

$$B_{\mathrm{cc}}(x, r/M(x,r)) \subset B_{\mathrm{Euc}}(x,R) \quad \text{per ogni } r > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.12}$$

Facciamo ora variare $x \in \Omega$, insieme limitato e $r \le 1$, in modo che

$$M(x,r) \le M_0 := \sup_{\Omega_0} \sum_j |X_j| < \infty$$

(Ω_0 è l'intorno di raggio 1 di Ω). Allora troviamo l'inclusione

$$B_{\mathrm{cc}}\Big(x, \frac{r}{M_0}\Big) \subset B_{\mathrm{Euc}}(x,r) \quad \text{per ogni } r \in [0,1] \text{ e } x \in \Omega. \tag{2.13}$$

Dimostrazione della Proposizione 2.10. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e siano $x, y \in \Omega$.

Caso A: vale $|x - y| \ge 1$. Allora usiamo l'inclusione (2.13) con $r = 1$. Poiché $y \notin B_{\mathrm{Euc}}(x,1)$, sarà

$$d_{\mathrm{cc}}(x,y) \ge \frac{1}{M_0} \ge \frac{|x-y|}{M_0 \operatorname{diam}\Omega}.$$

[10] P. Hajłasz; P. Koskela, Sobolev met Poincaré. Mem. Amer. Math. Soc. 145 (2000), no. 688., reperibile alla url `http://www.pitt.edu/~hajlasz/OriginalPublications/HajlaszK-SobolevMetPoincare-test-MemoirsAMS-145-2000-no.688-101pp.pdf`

Caso B: vale $|x-y|<1$. ALlora usiamo ancora (2.13) con $r=|x-y|$. Poiché $y\notin B_{\mathrm{Euc}}(x,|x-y|)$, sarà

$$d_{\mathrm{cc}}(x,y)\geq\frac{|x-y|}{M_0}.$$

□

Proposizione 2.14 (Caratterizzazione delle curve subunitarie)**.** *Se $\gamma:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ è un acmmino lipschitziano assegnato, sono equivalenti le seguenti tre affermazioni:*

(i) Esiste $\alpha:[0,T]\to\mathbb{R}^m$ che soddisfa $|\alpha(t)|\leq 1$ per ogni t e tale che

$$\dot\gamma(t)=\sum_j\alpha_j(t)X_j(\gamma(t))\quad\textit{per quasi ogni } t.$$

(ii) Vale per quasi ogni t la disugusglianza

$$\langle\dot\gamma(t),\xi\rangle^2\leq\sum_j\langle X_j(\gamma(t)),\xi\rangle^2$$

(iii) Esiste $\alpha:[0,T]\to\mathbb{R}^m$ misurabile *e con tutte le le proprietà del punto (i).*

Dimostrazione. Dimostriamo intanto che (i) equivale a (ii).

La parte non banale è (ii) ⇒ (i). Osserviamo che in generale non si assumiamo che i campi siano indipendenti. Riformuliamo l'enunciato con delle variabili piú convenienti: sia $v\in\mathbb{R}^n$ assegnato e siano $w_1,\dots,w_m\in\mathbb{R}^n$ vettori assegnati. Dobbiamo dimostrare che se vale

$$\langle v,\xi\rangle^2\leq\sum_j\langle w_j,\xi\rangle^2, \tag{2.15}$$

allora esiste $\alpha\in\mathbb{R}^m$ con $|\alpha|\leq 1$ tale che $\sum_j\alpha_jw_j=v$.

Applicando la (2.15) a ogni ξ ortogonale a $\operatorname{span}\{w_j\}$ si vede subito che $v\in\operatorname{span}\{w_j\}$.

Ora vediamo la parte quantitativa.[11] Se scriviamo $M:=[w_1,\dots,w_m]\in\mathbb{R}^{n\times m}$, possiamo riformulare la domanda sotto forma di ricerca di una soluzione $\alpha\in\mathbb{R}^m$ del sistema lineare $M\alpha=v$ che ha norma $|\alpha|\leq 1$. Osserviamo che l'insieme di tutte le soluzioni del sistema è il sottospazio affine $\widetilde\alpha+\ker M$ dove $\widetilde\alpha\in\mathbb{R}^m$ è una qualsiasi soluzione (c'è unicità se e solo se $\ker M$ è banale). Per le proprietà degli spazi euclidei, tra tutte queste soluzioni ce n'è una sola $\hat\alpha$ di norma minima caratterizzata della condizione $\hat\alpha\perp\ker M$ che equivale a $\hat\alpha\in(\operatorname{Im}M^T)$.[12] QUindi esiste almeno un β per il quale si può scrivere $\hat\alpha=M^T\beta$. Scegliamo un β con tale proprietà e calcoliamo la norma di $\hat\alpha$

$$|\hat\alpha|^2=|M^T\beta|^2=\langle M^T\beta,M^T\beta\rangle=\langle MM^T\beta,\beta\rangle=\langle v,\beta\rangle,$$

perché $v=M\alpha=MM^T\beta$. Ora usiamo la (2.15) con $\xi=\beta$ e troviamo

$$|\hat\alpha|^4=\langle v,\beta\rangle^2\leq\sum_j\langle w_j,\beta\rangle^2=\sum_j(w_j^T\beta)^2=|M^T\beta|^2=|\hat\alpha|^2.$$

Quindi $|\hat\alpha|\leq 1$.

[11] Una dimostrazione di questa affermazione si trova nel libro: Bonfiglioli, Lanconelli e Uguzzoni, Stratified Lie groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians, Springer (2007), p. 330.

[12] Qui $\ker A$ e $\operatorname{Im} A$ indicano lo spazio nullo e lo spazio delle colonne di una matrice A.

La prova dell'implicazione (i)⇒(ii) segue applicando tale risultato di algebra lineare per ogni t punto di differenziabilità di γ.

Una dimostrazione diretta del fatto che (i) implica (iii) è contenuta nelle note di Agrachev Barilari e Boscain[13] Una dimostrazione alternativa si ottiene precisando il ragionamento sopra esposto. Guardiamo per quasi ogni t il sistema lineare

$$X(\gamma(t))\alpha(t) = \dot{\gamma}(t)$$

dove $X(\gamma(t)) = [X_1(\gamma(t)), \ldots, X_m(\gamma(t))] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ è la matrice dei campi vettoriali. Basterà poi utilizzare il fatto (che non dimostriamo) che la matrice inversa generalizzata $X(\gamma(t))^\dagger \in \mathbb{R}^{m\times n}$ che fornisce la soluzione di minima norma $\hat{\alpha}(t) = X(\gamma(t))^\dagger\dot{\gamma}(t)$ dipende in modo misurabile da t. □

Esempio 2.16. *Calcolo della distanza dall'origine per il campo $X = (1 + x^2)\partial_x$ in $\mathbb{R}$. Osserviamo che $B_{cc}(0, \pi/2) = \mathbb{R}$ è illimitata inm senso euclideo.* (9)

2.2. Campi di tipo Grushin

Esempio 2.17. *Consideriamo i campi $X = \partial_x$ e $Y = x\partial_y$ in $\mathbb{R}^2$. Discussione della stima*

$$d((0,0),(0,y)) \le C|y|^{1/2}$$

per ogni $y \in \mathbb{R}$. Scegliamo $y > 0$ per semplicità e scegliamo un cammino fatto da tre spezzate integrali: preso un parametro $\xi > 0$ da scegliere in seguito, poniamo

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= e^{tX}(0,0) == (t,0) \quad t \in [0,\xi] \\
\gamma_2(t) &= e^{tY}(\xi,0) = (\xi,\xi t) \quad t \in [0,y/\xi] \\
\gamma_3(\tau) &= e^{-tX}(\xi,y) = (\xi - t,y) \quad t \in [0,\xi].
\end{aligned}$$

La lunghezza del cammino somma di tre tratti è: $T(\xi) = 2\xi + \frac{y}{\xi}$. Possiamo minimizzare la funzione al variare di $\xi > 0$ studiando la derivata. Si trova un punto di mimino $\xi_{\min}$ e la corrispondente stima della distanza

$$d((0,0),(0,y)) \le T(\xi_{\min}) = C|y|^{1/2},$$

con C indipendente da y.

La stima precedente è un caso particolare di un risultato generale dovuto a Franchi e Lanconelli. Per enunciarlo usiamo la notazione $I(c,r) = [c - r, c + r]$ per $c \in \mathbb{R}$ e $r > 0$ e poniamo poi

$$\mathrm{Box}((x,y).r) := I(x,r) \times I(y,(|x| + r)r).$$

Ad esempio, $\mathrm{Box}((0,0),r) = [-r,r] \times [-r^2,r^2]$ mentre $\mathrm{Box}((1,0),r) = I(1,r) \times I(y,(1 + r)r)$ è simile alla scatola euclidea $[1 - r, 1 + r] \times [-r,r]$ per r piccolo.

Teorema 2.18 (Franchi e Lanconelli). *Siano $X = \partial_x$ e $Y = x\partial_y$. Esistono costanti $c_1.c_2$ tali che*

$$\mathrm{Box}((x,y),c_2r) \subset B_{cc}((x,y),r) \subset \mathrm{Box}((x,y),c_1r)$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $r \in]0,+\infty[$.

[13]Reperibili al link `http://cvgmt.sns.it/paper/2022/`

2.3. I campi del gruppo di Heisenberg

Consideriamo i due campi vettoriali in $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x, y, t)

$$\begin{aligned} X &= \partial_x + 2y\partial_t \simeq (1, 0, 2y) \quad \text{e} \\ Y &= \partial_y - 2x\partial_t \simeq (0, 1, -2x). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Nonostante risulti $\dim \operatorname{span}\{X, Y\} = 2$ in ogni punto, riulta che la distanza è finita per ogni coppia di punti:

$$d((x, y, t), (x', y', t')) < \infty \quad \forall\, (x, y, t), (x', y', t') \in \mathbb{R}^3.$$

Nel seguito proveremo una stima piú precisa.

Lemma 2.20. *Una curva $\gamma \in \mathrm{Lip}([0, T], \mathbb{R}^3)$ è subunitaria se e solo se, scritto $s \mapsto \gamma(s) = (x(s), y(s), t(s))$, valgono le due condizioni*

$$\begin{cases} \dot t = 2y\dot x - 2x\dot y & \textit{quasi ovunque} \\ \dot x^2 + \dot y^2 \le 1 & \textit{quasi ovunque.} \end{cases} \tag{2.21}$$

In sostanza, un cammino è subunit se la sua proiezione nel piano x, y ha velocità euclidea ≤ 1 e se la funzione $t(s)$ soddisfa la condizione nella prima linea. Notiamo che assegnato un cammino Lipschitz $s \mapsto (x(s), y(s)) = z(s)$ con velocità ≤ 1 e assegnata una quota iniziale $t(0)$, è individuato univocamente un cammino subunitario $s \mapsto (x(s), y(s), t(s))$ che parte dal punto $(x(0), y(0), t(0))$ al tempo 0. Tale cammino si chiama "lifting" subunitario di z.

Esercizio 2.22. *Scrivere il lifting subunitario del cammino $s \mapsto (s^2, s)$ uscente dal punto $(0, 0, 1)$.*

Nel caso del gruppo di Heisenberg, una curva subunitaria soddisfa

$$t(T) - t(0) = \int_0^T \dot t(s) = \int_0^T (2y(s)\dot x(s) - 2x(s)\dot y(s))ds = \int_z 2ydx - 2xdy \tag{2.23}$$

dove l'integrale è inteso nel senso delle forme differenziali ed è esteso al cammino $s \mapsto (x(s), y(s)) =: z(s)$ con $s \in [0, T]$.

Osservazione 2.24. *Se $z : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ è una curva nel piano chiusa e orientata positivamente, allora la formula di Gauss Green mostra che*

$$t(T) - t(0) = \int_z 2ydx - 2xdy = -4A$$

dove A è l'area della regione di piano racchiusa da z.

Notiamo anche che l'integrale della forma differenziale su un tratto di curva contenuto in una linea passante per l'origine è nullo.

Proviamo ora il seguente lemma:

Lemma 2.25. *Se X, Y sono i campi in $\mathbb{R}^3$ introdotti in* (2.19)*, allora esiste C tale che*

$$d((0, 0, 0), (x, 0, t)) \le C(|x| + |t|^{1/2}) \quad \textit{per ogni } x, t) \in \mathbb{R}. \tag{2.26}$$

Dimostrazione. Dividiamo la costruzione in due casi, assumendo sempre per semplicita' che sia $x, t \geq 0$:

Caso A. Prendiamo un punto $(x, 0, t)$ e supponiamo $x > t^{1/2}$. Sia $\xi > 0$ da stabilire. Partiamo dalla spezzata piana datadai tre cammini seguenti:

$$\begin{aligned} z_1(s) &= (0, s) \quad s \in [0, \xi] \\ z_2(s) &= (s, \xi) \quad s \in [0, x] \\ z_3(s) &= (x, \xi - s) \quad s \in [0, \xi] \end{aligned}$$

Teniamo presente che ponendo $z_4(s) = (x - s, 0)$ per $s \in [0, x]$ otteniamo un cammino semplice $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ chiuso e orientato negativamente. L'intervallo di parametrizzazione del cammino somma di $z_1 + z_2 + z_3$ è $T = 2\xi + x$. Per individuare ξ ricordiamo che deve essere

$$t = \int_{z_1+z_2+z_3} 2ydx - 2xdy = \int_{z_1+z_2+z_3+z_4} 2ydx - 2xdy = 4\,\mathrm{Area} = 4\xi x.$$

Abbiamo usato il fatto che su z_4 l'integrale della forma è nullo e la formula di Gauss Green. Quindi troviamo $\xi = \frac{t}{4x}$. Pertanto

$$T = 2\xi + x = 2\frac{t}{4x} + x \leq \frac{1}{2}\sqrt{t} + x,$$

dove abbiamo usato il fatto che $\frac{\sqrt{t}}{x} \leq 1$.

Caso B. Supponiamo che sia $x \leq \sqrt{t}$. Costruiamo una spezzata di quattro tratti, lasciando sempre il primo di lunghezza $\xi > 0$ da precisare e prendendo il secondo di lunghezza $\sqrt{t}$.

$$\begin{aligned} z_1(s) &= (0, s) \quad s \in [0, \xi] \\ z_2(\sigma) &= (s, \xi) \quad s \in [0, \sqrt{t}] \\ z_3(s) &= (\sqrt{t}, \xi - s) \quad s \in [0, \xi] \\ z_4(s) &= (\sqrt{t} - s, 0) \quad s \in [0, \sqrt{t} - x] \end{aligned}$$

L'intervallo di parametrizzazione della curva somma è dunque $[0, T]$, con

$$T = 2\xi + \sqrt{t} + (\sqrt{t} - x) \leq 2\xi + 2\sqrt{t}.$$

Il vincolo d'area è $4\xi\sqrt{t} = t$, da cui si trova $\xi = \sqrt{t}/4$. La stima richiesta segue immediatamente. $\square$

2.4. Esercizi per casa

(a) Dato il campo $X = (1 + x^2)\partial_x$, precisando il ragionamento fatto in classe, verificare che $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ per ogni x, y. La topologia di d_{cc} è equivalente a quella euclidea sulla retta?

(b) Considerare i campi lipschitziani $X = \partial_x$ e $Y = \max\{x, 0\}\partial_y$. Verificare che $d((-1, 0), (-1, y)) \geq 2$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e descrivere la palla $B_{cc}((-1, 0), r)$ per ogni $r \leq 1$. Verificare che $d(x, y), (\xi, \eta) < \infty$ per ogni x, y, ξ, η. Come si confrontano la topologia euclidea e quella della distanza di Carnot Carathéodory?

(c) Scrivere il lifting subunitario relativo ai campi X e Y del gruppo di Heisemberg del cammino circolare $z(s) = (1 - \cos s, \sin s)$ con $s \in [0, 2\pi]$ che esce dal punto $(0, 0, 0)$.

Proposizione 2.27 (Invarianza)**.** *Se $s \mapsto (x(s), y(s), t(s)) = (z(s), t(s))$ è subunitaria, allora:* (11)

(a) per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, la curva ruotata $s \mapsto (e^{i\theta} z(s), t(s))$ è subunitaria su $[0, T]$;

(b) per ogni $\lambda > 0$, la curva dilatata

$$s \mapsto (x_\lambda(s), y_\lambda(s), t_\lambda(s)) = \Big(\lambda x\Big(\frac{s}{\lambda}\Big), \lambda y\Big(\frac{s}{\lambda}\Big), \lambda^2 t\Big(\frac{s}{\lambda}\Big)\Big)$$

è subunitaria su $[0, \lambda T]$.

Dimostrazione. Svolta in classe. Per la prima parte usare il fatto che, scritto $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, risulta $2yx' - 2xy' = 2\,\mathrm{Im}(z\bar{z}')$. □

Come conseguenza, scopriamo le proprietà di invarianza per ogni $(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$

$$d((0, 0), (z, t)) = d((0, 0), (|z|, t)) = d((0, 0, 0), (|z|, 0, t)).$$

Quest'ultima la sappiamo stimare da sopra con $C(|z| + |t|^{1/2})$ Inoltre

$$d((0, 0), (\lambda z, \lambda^2 t)) = \lambda d((0, 0), (z, t)) \quad \forall \lambda > 0. \tag{2.28}$$

Usando quest'ultima possiamo ottenere la seguente stima da sotto della distanza.

Proposizione 2.29. *Sia d la distanza in $\mathbb{R}^3$ definita dai $X = \partial_x + 2y\partial_t$ e $Y = \partial_y - 2x\partial_t$. Allora esiste $C_1 > 0$ tale che*

$$d((0, 0), (z, t)) \geq C_1(|z| + |t|^{1/2}) \quad \forall (z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}. \tag{2.30}$$

Dimostrazione. Usiamo l'invarianza per dilatazione (2.28) e la stima da sotto locale della Proposizione 2.10. Siano

$$\Sigma = \{(z, t) : |z| + |t|^{1/2} = 1\}.$$

L'insieme Σ è compatto e non contiene l'origine. Per la Proposizione 2.10 esiste c_0 tale che per ogni $(z, t) \in \Sigma$ risulta

$$d((z, t), (0, 0)) \geq c_0\, |(z, t)| \geq c_1$$

(minimo su un compatto di una funzione positiva strettamente).

Sia ora $(z, t) \neq (0, 0)$ qualsiasi. Troviamo il valore $\lambda > 0$ tale che $(\lambda z, \lambda^2 t) \in \Sigma$. Si vede subito che $\lambda = \frac{1}{|z| + |t|^{1/2}}$. Dunque, usando dall'invarianza per dilatazione si ottiene la stima

$$d((z, t), (0, 0)) = \frac{1}{\lambda} d((\lambda z, \lambda^2 t), (0, 0)) = (|z| + |t|^{1/2}) d((\lambda z, \lambda^2 t), (0, 0)) \geq c_1(|z| + |t|^{1/2}).$$

come si voleva. □

Per quello che riguarda la distanza da un punto qualsiasi, consideriamo l'operazione in $\mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{H}$.

$$(\zeta, \tau) \circ (z, t) = (\zeta + z, \tau + t + 2\operatorname{Im}(\zeta \bar{z})).$$

Si verifica che $(\mathbb{R}^3, \circ)$ è un gruppo di Lie. Una discussione approfondita sarà effettuata nelle lezioni del modulo 1. Menzioniamo però il fatto che i campi X, Y sono campi invarianti a sinistra di tale gruppo.

Proposizione 2.31. *Se γ è un cammino subunitario, allora per ogni $(\zeta, \tau) \in \mathbb{H}$ il cammino $(\zeta, \tau) \circ \gamma$ è subunitario.*

Dimostrazione. Parametrizzato γ nella forma $s \mapsto (z(s), t(s))$, la curva traslata si scrive come segue

$$(z_1(s), t_1(s)) = (\zeta, \tau) \circ (z(s), t(s)) = (\zeta + z(s), \tau + t(s) + 2\operatorname{Im}(\zeta \bar{z}'(s))$$

A questo punto è immediato verificare che $t_1' = 2\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_1')$ quasi ovunque usando il fatto che $t' = 2\operatorname{Im}(z_1 \bar{z}_1')$ quasi ovunque. □

Una conseguenza di tale proposizione è la proprietà di "invarianza a sinistra" della distanza:

$$d((0,0), (z,t)) = d((z_0, t_0) \circ (z,t), (z_0, t_0)),$$

valida per ogni z_0, t_0, z, t. Ma allora la distanza tra due punto qualsiasi è

$$d((\zeta, \tau), (z,t)) = d((0,0), (-\zeta, -\tau) \circ (z,t)) \simeq |z - \zeta| + |t - \tau - 2\operatorname{Im} \zeta \bar{z}|^{1/2}$$

dove $\simeq$ indica un'equivalenza attraverso costanti indipendenti da $z, \zeta, t\tau$. In altri termini ancora

$$B((z_0, t_0), r) = (z_0, t_0) \circ B((0,0), r)$$

2.5. Esistenza di cammini minimizzanti

In molti casi l'estremo inferiore nella definizione di distanza è un minimo.

Teorema 2.32 (Esistenza di cammini minimizzanti)**.** *Siano $X_1, \dots, X_m$ dei campi localmente Lipschitziani in $\mathbb{R}^n$. Siano x ed $r > 0$ tali che la palla $B_{cc}(x, r)$ sia limitata in senso euclideo. Allora per ogni $y \in B(x, r)$ esiste un cammino subunitario $\gamma : [0, d(x, y)] \to \mathbb{R}^n$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(d(x, y)) = y$.*

Prima delle dimostrazione osserviamo che:

1. L'ipotesi $B_{cc}(x, r)$ limitata è sempre soddisfatta per r sufficientemente piccolo. Vedere Proposizione 2.10.
2. Se tale ipotesi viene a mancare, il teorema è falso. [14]

[14] Un esempio è quello della distanza (subRiemanniana, ma anche Riemanniana) generata dai seguenti campi in $\mathbb{R}^2$: $X_1 = (1 + |x|^2)\partial_{x_1}$, $X_2 = (1 + |x|^2)\partial_{x_2}$. Si vede con un calcolo che tale distanza è quella di una sfera in coordinate stereografiche (verificarlo per esercizio). Pertanto punti del tipo $(-R, 0)$ e $(R, 0)$ con R molto grande non sono collegati da nessuna geodetica.

3. Non c'è unicità. Ad esempio, l'invarianza rispetto a rotazioni attorno all'asse t nel gruppo di Heisenberg prova che per ogni coppia di ounti $(0,0,0)$ e $(0,0,t_0)$ esistono infiniti cammini minimizzanti.
   Un esempio di cammino minimizzante in $\mathcal{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ è il lifting proposto nell'esercizio (c) del paragrafo 2.4.
4. Se γ è minimizzante tra x e y allora vale la "proprietà del segmento"

$$d(x,y) = d(x,z) + d(y,z) \quad \forall z \in \gamma([0,1]).$$

Infatti, scritto $z = \gamma(t)$, risulta

$$d(x,y) \le d(x,\gamma(t)) + d(\gamma(t),y) \le t + (d(x,y) - t) \le d(x,y)$$

Dimostrazione. [15] Sia $y \in B(x,r)$ e sia $\gamma_k : [0,T_k] \to \mathbb{R}^n$ una successione di curve subunitarie che connettono x e y, con $T_k \to d(x,y)$. Assumiamo T_k monotona decrescente e supponiamo che $T_1 < r$. Questo assicura che per ogni k, il percorso $\gamma_k([0,T_k])$ è tutto contenuto nel compatto $\overline{B(x,r)}$. Prolunghiamo tutti i cammini a uno stesso intervallo $[0,T_1]$ ponendo $\widetilde{\gamma}_k = \gamma_k$ su $[0,T_k]$ e $\widetilde{\gamma}_k(t) = y = \gamma_k(T_k)$ per $t \in [T_k, T_1]$. Vale per $t,s \in [0,T_1]$

$$|\widetilde{\gamma}_k(t) - \widetilde{\gamma}_k(s)| = \Big| \int_s^t \sum_{j=1}^m \alpha_k^j(\sigma) X_j(\gamma_k(\sigma)) d\sigma \Big| \le \Big(\max_{z \in \overline{B(x,r)}} \sum_j |X_j(z)| \Big) |t-s|.$$

Qui abbiamo usato $|\alpha_k| = |(\alpha_k^1, \dots, \alpha_k^m)| \le 1$ quasi ovunque. Le funzoni sono equi-Lipschitziane e equilimitate, perché $\gamma_k[0,T_k] \subset \overline{B(x,r)}$. Allora per il Teorema di Ascoli Arzelà possiamo assumere che $\widetilde{\gamma}_k \to \widetilde{\gamma}$ uniformemente su $[0,T_1]$. Notiamo che $\widetilde{\gamma}$ è Lipschitziana e che

$$y = \lim_{k\to\infty} y = \lim_{k\to\infty} \widetilde{\gamma}_k(T_k) = \widetilde{\gamma}(d(x,y)).$$

L'ultima uguaglianza viene dalle proprietà della convergenza uniforme.

Ora facciamo vedere cha il cammino $\gamma := \widetilde{\gamma}_{[0,d(x,y)]}$, oltre ad essere Lipshhitziano e a connettere x e y, è subunitario. Usiamo la caratterizzazione delle Proposizione 2.14. Sia t un punto di differenziabilità di γ. Allora, preso $\xi \in \mathbb{R}^n$, si scrive

$$\begin{aligned} \Big\langle \frac{\gamma_k(t+h) - \gamma_k(t)}{h}, \xi \Big\rangle &= \Big\langle ⨍_t^{t+h} \sum_{j=1}^m \alpha_k^j(\sigma) X_j(\gamma_k(\sigma)) d\sigma, \xi \Big\rangle \\ &= ⨍_t^{t+h} \sum_j \alpha_k^j(\sigma) \langle X_j(\gamma_k(\sigma)), \xi \rangle d\sigma \\ &\le ⨍_t^{t+h} \Big\{ \sum_j \langle X_j(\gamma_k(\sigma)), \xi \rangle^2 \Big\}^{1/2} d\sigma. \end{aligned}$$

(supponiamo per semplicità $h > 0$). Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $|(\alpha_k^1(\sigma)), \dots, \alpha_k^m(\sigma)| = 1$ per ogni k e quasi ogni σ assieme alla disuguaglianza

[15] Questa dimostrazione si trova nel libro di Bonfiglioli Lanconelli Uguzzoni e nelle note di Agrachev Barilari e Boscain già citate nelle pagine precedenti. L'approccio metrico è illustrato nelle note di Ambrosio e Tilli, Topics on analysis in metric spaces. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 25. Oxford University Press, Oxford, 2004.

di Cauchy–Schwarz in $\mathbb{R}^m$. Passando allimite per $k \to \infty$ (convergenza dominata o addirittura convergenza uniforme a destra) si trova

$$\Big\langle \frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}, \xi \Big\rangle \leq \fint_t^{t+h} \Big\{ \sum_j \langle X_j(\gamma(\sigma)), \xi\rangle^2 \Big\}^{1/2} d\sigma.$$

Ora, poiché l'integrando a destra è continuo in σ, per $h \to 0$ otteniamo

$$\langle \gamma'(t), \xi\rangle \leq \Big\{ \sum_j \langle X_j(\gamma(t)), \xi\rangle^2 \Big\}^{1/2}.$$

Poiché questa disuguaglianza vale per ogni t di differenziabilità di γ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, la dimostrazione è conclusa. □

3. Calcolo non commutativo per campi vettoriali

3.1. Diffeomorfismi, differenziale e push-forward di un campo

Indichiamo con $d\Phi(x)$ il differenziale di un diffeomorfismo $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega)$ nel punto $x \in \Omega$. Possiamo anche definire il differenziale come segue:

$$d\Phi(x)\gamma'(0) = (\Phi \circ \gamma)'(0), \tag{3.1}$$

dove $\gamma : \,]-\varepsilon, \varepsilon[\, \to \mathbb{R}^n$ è una qualsiasi curva derivabile in $t = 0$ cha soddisfa $\gamma(0) = x$.

Definizione 3.2 (Campo immagine (Push-forward))**.** *Sia $X = a(x) \cdot \nabla$ un campo di classe* (13)
C^1 su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sia $\Phi : \Omega \to \varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo di classe C^2. Indichiamo le variabili come $\Omega \ni x \mapsto \Phi(x) = y \in \Phi(\Omega)$. Poniamo

$$b(y) := b(\Phi(x)) := d\Phi(x)a(x) \quad \textit{per ogni } x \in \Omega \tag{3.3}$$

e definiamo il campo immagine *$\Phi_* X$ come segue:*

$$\Phi_* X := b \cdot \nabla.$$

Notiamo che nelle condizioni della definizione, $\Phi_* X$ è di classe C^1 su $\Phi(\Omega)$. In termini di componenti risulta

$$b_k(y) = b_k(\Phi(x)) = d\Phi_k(x)a(x) = \sum_j \partial_{x_j}\Phi_k(x) a_j(x) \quad \forall\, k = 1, \dots, n.$$

Osservazione 3.4. *Il campo $\Phi_* X$ definito sopra agisce su una funzione derivabile $f : \Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ nel modo seguente: sia $y = \Phi(x) \in \Phi(\Omega)$. Allora*

$$(\Phi_* X) f(y) = (\Phi_* X) f(\Phi(x)) = X(f \circ \Phi)(x). \tag{3.5}$$

Scegliendo come f una funzione coordinata, $f(y) = y_k$, si vede che definire $\Phi_* X$ richiedendo (3.5) *per ogni f equivale alla Definizione* 3.2*.*

Esercizio 3.6. *(i) Calcolo di $\Phi_* X$ con $X = x\partial_x$ e $\Phi : \mathbb{R} \to \,]0, +\infty[$, $\Phi(x) = e^x$.*

(ii) Data $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \Phi(\mathbb{R}^2)$, $\Phi(x) = (e^{x_1}, x_1^2 + e^{2x_2})$, *calcolo di* $\Phi_* X$ *con* $X = \partial_{x_1}$.

Osservazione 3.7 (Campo immagine e curve integrali). *Vale la formula*

$$\Phi(e^{tX}x) = e^{t\Phi_* X}(\Phi(x))$$

sulla treasformazione delle curve integrali. Infatti

$$\frac{d}{dt}\Phi(e^{tX}x) = \sum_k \partial_k \Phi(e^{tX}x)\frac{d}{dt}(e^{tX}x)_k = \sum_k \partial_k \Phi(e^{tX}x) a_k(e^{tX}x)_k = b(\Phi(e^{tX}x))$$

Teorema 3.8 (rettificazione di un campo). *Sia* $X = a(x) \cdot \nabla$ *un campo vettoriale in* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Sia* $z \in \Omega$ *tale che* $a(z) \neq 0$. *Allora esiste un intorno aperto* U_z *di* z *e un diffeomorfismo* $\Phi : U_z \to \Phi(U_z) \subset \mathbb{R}^n$ *tale che*

$$\Phi_* X = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità supponiamo che $z = 0$ e $a_1(0) \neq 0$. Scriviamo $x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Sia ora $\varepsilon > 0$ e consideriamo la scatola aperta $]-\varepsilon, \varepsilon[\times B'(0', \varepsilon) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Poniamo

$$\Psi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times B'(0', \varepsilon) \to \mathbb{R}^n, \qquad \Psi(t, u') = e^{tX}(0, u').$$

Con un calcolo si vede che

$$\det d\Psi(0,0) = \det[\partial_t \psi(0,0), \partial_{u_2}\psi(0,0), \dots, \partial_{u_n}\psi(0,0)] = a_1(0) \neq 0.$$

Quondi $\Psi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times B'(0', \varepsilon) \to \Psi(]-\varepsilon, \varepsilon[\times B'(0', \varepsilon))$ e' un diffeomorfismo, per ε piccolo. Inoltre vale $\Psi_*(\partial_t) = X$. Infatti, per ogni funzione test $f \in C^\infty(\Psi(]-\varepsilon, \varepsilon[\times B'(0', \varepsilon)))$

$$\Psi_*(\partial_t) f(\Psi(t, u')) = \partial_t (f \circ \Psi)(t, u') = Xf(\Psi(t, u'))$$

per ogni (t, u') nella scatola. Di conseguenza, la fnzione inversa $\Phi := \Psi^{-1}$ è il diffeomorfismo cercato che rettifica X. □

3.2. Commutatori e derivate di Lie

Definizione 3.9 (Commutatore). *Dati campi* $X = a \cdot \nabla$ *e* $Y = b \cdot \nabla$, *poniamo* $[X, Y] = XY - YX$. *Si vede che* $[X, Y]$ *è un operatore del primo ordine e che vale* $[X, Y] = (Xb - Ya) \cdot \nabla$

Proposizione 3.10. *Se* X, Y *sono campi su un aperto* Ω, *e se* $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega)$ *e' un diffeomorfismo, allora vale*

$$[\Phi_* X, \Phi_* Y] = \Phi_* [X, Y].$$

Dimostrazione. Se $h : \Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ e' regolare e Z e' un campo su Ω, (3.5) fornisce

$$(\Phi_* Z) h = (Z(h \circ \Phi)) \circ \Phi^{-1}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}
[\Phi_* X, \Phi_* Y] f &= \Phi_* X \Phi_* Y f - \Phi_* Y \Phi_* X f \\
&= \Phi_* X \Big(\big(Y(f \circ \Phi)\big) \circ \Phi^{-1} \Big) - \Phi_* Y \Big(\big(X(f \circ \Phi)\big) \circ \Phi^{-1} \Big) \\
&= X \Big(Y(f \circ \Phi) \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \Big) \circ \Phi^{-1} - Y \Big(X(f \circ \Phi) \circ \Phi^{-1} \circ \Phi \Big) \circ \Phi^{-1} \\
&= XY(f \circ \Phi) \circ \Phi^{-1} - YX(f \circ \Phi) \circ \Phi^{-1} \\
&= [X, Y](f \circ \Phi) \circ \Phi^{-1} \\
&= \Phi_* [X, Y] f
\end{aligned}$$

come desideravamo. □

Nel disorso seguente identificheremo ripetutamente operatori differenziali e funzioni vettoriali.

Definizione 3.11 (Derivata di Lie). *Definiamo dati due campi X e Y in Ω e un punto $x \in \Omega$,*

$$\mathcal{L}_X Y(x) := \frac{\partial}{\partial t} e_*^{-tX} Y(x) \Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{ e_*^{-tX} Y(x) - Y(x) \}.$$

Notiamo che per ogni x, il vettore $e_*^{-tX} Y(x)$ esiste per tempi sufficvientemente piccoli (precisamente per ogni $t \in \mathcal{D}(X, x)$). Assumendo per ora che il limite esista, data una funzione $f \in C^\infty(\Omega)$ e $x \in \Omega$, possiamo riscrivere

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X Y) f(x) \simeq \mathcal{L}_X Y(x) \cdot \nabla f(x) &:= \frac{\partial}{\partial t} (e_*^{-tX} Y)(x) \cdot \nabla f(x) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} (e_*^{-tX} Y) f(x) \Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} Y(f \circ e^{-tX})(e^{tX} x) \Big|_{t=0}
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la caratterizzazione (3.5) del pushforward e i soliti abusi di notazione.

Il seguente teorema dà l'esistenza ed il valore del limite che appare nella definizione appena data.

Teorema 3.12. *Siano X, Y campi vettoriali di classe C^2 in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Allora vale su Ω l'identità*

$$[X, Y] = \mathcal{L}_X Y.$$

La dimostrazione viene dal seguente teorema, che contiene un enunciato equivalente.

Teorema 3.13. *Siano Y, X dei campi vettoriali C^2 su Ω. Allora, per ogni funzione f regolare, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $t \in \mathcal{D}(X, x)$ vale*

$$\frac{\partial}{\partial t} Y(f \circ e^{-tX})(e^{tX} x) = [X, Y](f \circ e^{-tX})(e^{tX} x). \tag{3.14}$$

Premessa alla dimostrazione. Ricordiamo che, dato un campo X di classe C^2 su Ω, allora il flusso $(t,x) \mapsto \psi(t,x) = e^{tX}x$ è di classe C^2 su un opportuno aperto massimale $G = \bigcup_{x\in\Omega} \mathcal{D}(X,x) \times \{x\} \subset \mathbb{R} \times \Omega$ contenente $\{0\} \times \Omega$. Quindi preso un aperto O con chiusura contenuta in Ω, esiste $\varepsilon > 0$ tae che il compatto $\overline{O} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ è contenuto in G. Pertanto la funzione $(t,x) \mapsto d_x\psi(t,x)$, essendo C^1 su G è Lipschitziana sul compatto $\overline{O} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$. In particolare, esiste $L > 0$ tale che

$$|d_x e^{tX}(x) - I_n| \le L|t| \quad \text{per ogni } x \in \overline{O} \text{ e } t \in [-\varepsilon, \varepsilon]. \tag{3.15}$$

Osserviamo che la stima (3.15) vale anche per campi C^1. Vedere l'esercizio 2 nel paragrafo 1.5.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità dimostriamo la (3.14) per $t = 0$. Quindi (15)
dobbiamo calcolare:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} Y(f \circ e^{-tX})(e^{tX}x)\Big|_{t=0} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big\{ Y(f\circ e^{-tX})(e^{tX}x) - Yf(e^{tX}x) + Yf(e^{tX}x) - Yf(x)\Big\} \\ &=: (1) + (2).\end{aligned}$$

È immediato vedere che $(2) \to XYf(x)$.

Ora analizziamo (1). Per t fissato si ha

$$\frac{1}{t}\big\{ Y(f\circ e^{-tX})(e^{tX}x) - Yf(e^{tX}x)\big\} = b_j(e^{tX}x)\frac{1}{t}\big\{\partial_j(f\circ e^{-tX})(e^{tX}x) - \partial_j f(e^{tX}x)\big\}$$

(omettiamo le somme sugli indici ripetuti). Poniamo anche $e^{tX}x = \xi$ e calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\big\{\partial_j(f\circ e^{-tX})(\xi) - \partial_j f(\xi) &= \fint_0^t \frac{\partial}{\partial\tau}\partial_{\xi_j} f(e^{-\tau X}\xi)d\tau \\ &= \fint_0^t \partial_{\xi_j}\frac{\partial}{\partial\tau} f(e^{-\tau X}\xi)d\tau \\ &= -\fint_0^t \partial_{\xi_j} Xf(e^{-\tau X}\xi)d\tau \\ &= -\fint_0^t \partial_k Xf(e^{-\tau X}\xi)\frac{\partial(e^{-\tau X}\xi)_k}{\partial\xi_j}d\tau\end{aligned}$$

Osa osserviamo che $\partial_k Xf$ è una funzione continua. Quindi

$$\partial_k Xf(e^{-\tau X}\xi) = \partial_k Xf(e^{(t-\tau)X}x) \to \partial_k Xf(x)|,$$

per $t \to 0$. Inoltre, grazie alla premessa alla dimostrazione, sappiamo che, per $|t|$ sufficientemente piccolo vale una stima del tipo

$$\Big|\frac{\partial(e^{-\tau X}\xi)_k}{\partial\xi_j} - \delta_{kj}\Big| \le C|t|$$

Passando al limite per $t \to 0$ si trova la tesi. $\square$

Si può vedere che gli argomenti della dimostrazione appena fatta funzionano per campi solo di classe C^1. Questa dimostrazione segue grosso modo quelle del libro di Boothby e di Gallot-Hulin-Lafontaine. [16]

Corollario 3.16. *Se due campi X e Y su un aperto di Ω soddisfano $[X,Y]=0$, allora per ogni x esiste un intorno dell'origine $U \subset \mathbb{R}^2$ tale che $e^{tX}e^{sY}x = e^{sY}e^{tX}x$ per ogni $(t,s)\in U$.*

Dimostrazione. SIa $x \in \Omega$ e sia $U =]-\varepsilon,\varepsilon[^2$ cone ε sufficientemente piccolo affinché $e^{\tau X}e^{\sigma Y}x$ ed $e^{\sigma Y}e^{\tau X}x$ siano definiti oer ogni $\tau,\sigma\in U$. Presa una funzione test $f\in C^\infty(\Omega)$, risulta

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}f(e^{tX}e^{sY}x) &= Y(f\circ e^{tX})(e^{sY}x) = Yf(e^{tX}e^{sY}x) + \int_0^t \frac{d}{d\tau}Y(f\circ e^{\tau X})(e^{(t-\tau)X}e^{sY}x)) \\ &= Yf(e^{tX}e^{sY}x).\end{aligned}$$

Quindi $\gamma(s) = e^{tX}e^{sY}x$ risolve l'equazione ordinaria $\dot\gamma(s) = Y(\gamma(s)$ con $\gamma(0)=e^{tX}x$. La dimostrazione segue dall'unicità della soluzione del problema di Cauchy. □

Vale anche il viceversa del corolario appena dimostrato:

Corollario 3.17. *SIano X,Y dei campi di classe C^2 in Ω. Supponiamo che per qualche $x\in\Omega$ valga $e^{tX}e^{sY}x = e^{sY}e^{tX}x$ per ogni (t,s) in un opportuno intorno dell'origine. Allora*

$$[X,Y](x) = 0.$$

Dimostrazione. Per ipotesi vale l'identità $e^{-sY}e^{tX}e^{sY}x = e^{tX}x$. Presa la solita funzione test, differenziamo rispetto a t

$$Xf(e^{tX}x) = \frac{\partial}{\partial t}f(e^{tX}x) = \frac{\partial}{\partial t}f(e^{-sY}e^{tX}e^{sY}x) = X(f\circ e^{-sY})(e^{tX}e^{sY}x)$$

Ma allora, valutando in $t=0$ e derivando rispoetto a s troviamo

$$0 = \frac{\partial}{\partial s}Xf(e^{tX}x) = \frac{\partial}{\partial s}X(f\circ e^{-sY})(e^{sY}x) = [Y,X](f\circ e^{-sY})(e^{sY}x).$$

Per $s=0$ si trova la tesi. □

Corollario 3.18. *Se X e Y commutano in Ω, allora, per ogni x e per $|t|,|s|$ sufficientemente piccoli, vale*

$$e^{tX}e^{sY}x = e^{tX+sY}x$$

Dimostrazione. Prendiamo ε sufficientemente piccolo affinché $e^{\tau X}e^{\sigma Y}x$ ed $e^{\tau X+\sigma Y}x$ siano ben definiti per ogni $|\tau|,|s|\le\varepsilon$. Fissiamo $t,s\in[-\varepsilon,\varepsilon]$ e, posto $Z=tX$ e $W=sY$,

[16] Una dimostrazione si trova anche nel libro "Tu, An introduction to manifolds", ma attenzione alla formula (20.6), e alla dimostrazione che segue (Theorem 20.4), nelle quali $\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(-t,p)$ va sostituito con $\frac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(-t,\varphi_t(p))$.

notiamo che Z e W commutano e analizziamo per guardiamo per $\sigma \in [0,1]$ la curva $e^{\sigma Z} e^{\sigma W} x$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \sigma} f(e^{\sigma Z} e^{\sigma W} x) &= Z f(e^{\sigma Z} e^{\sigma W} x) + W(f \circ e^{\sigma Z})(e^{\sigma W} x) \\ &= Z f(e^{\sigma Z} e^{\sigma W} x) + W f(e^{\sigma Z} e^{\sigma W} x) + \int_0^\sigma \frac{\partial}{\partial \lambda} W(f \circ e^{\lambda Z})(e^{(\sigma-\lambda) Z} e^{\sigma W} x) d\lambda \\ &= (Z+W) f(e^{\sigma Z} e^{\sigma W} x).\end{aligned}$$

Quindi $\sigma \mapsto e^{\sigma Z} e^{\sigma W} x$ è una curva integrale di $Z+W$ con stessa condizione iniziale di $e^{\sigma(Z+W)} x$. Dunque esse coincidono e ponendo $\sigma = 1$ si conclude la dimostrazione. $\square$

Proposizione 3.19. *Se X e Y sono campi regolari su Ω vale per ogni $x \in \Omega$*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \{ e^{-tY} e^{-tX} e^{tY} e^{tX} x - x \} = [X,Y](x). \tag{3.20}$$

Notiamo che il membro di sinistra è identicamente nullo per t piccolo se i campi commutano. La proposizione si può dimostrare in almeno tre modi: con la formula di Taylor, oppure con le tecniche della Formula di Dynkin o, infine, come corollario della formula integrale di Rampazzo e Sussmann.

Dimostrazione. Siano X ed Y dei campi regolari in Ω. Fissato $x \in \Omega$ e s, t sufficientemente vicini all'origine, presa $f \in C^\infty(\Omega)$, si ha

$$\begin{aligned}&f(e^{-tY} e^{-sX} e^{tY} e^{sX} x) - f(x) \\ &\quad= \int_0^t \frac{d}{d\tau} f(e^{-\tau Y} e^{-sX} e^{\tau Y} e^{sX} x) d\tau \\ &\quad= \int_0^t \{ -Y f(e^{-\tau Y} e^{-sX} e^{\tau Y} e^{sX} x) + Y(f \circ e^{-\tau Y} \circ e^{-sX})(e^{\tau Y} e^{sX} x) \} d\tau \quad \text{(per (1.31))} \\ &\quad= \int_0^t \{ -Y(f \circ e^{-\tau Y})(e^{-sX} e^{\tau Y} e^{sX} x) + Y(f \circ e^{-\tau Y} \circ e^{-sX})(e^{\tau Y} e^{sX} x) \} d\tau \\ &\quad= \int_0^t d\tau \int_0^s d\sigma \frac{d}{d\sigma} Y(f \circ e^{-\tau Y} \circ e^{-\sigma X})(e^{(\sigma - s) X} e^{\tau Y} e^{sX} x) \\ &\quad= \int_0^t d\tau \int_0^s d\sigma [X,Y](f \circ e^{-\tau Y} \circ e^{-\sigma X})(e^{(\sigma - s) X} e^{\tau Y} e^{sX} x)\end{aligned}$$

Dunque abbiamo la seguente rappresentazione integrale del commutatore:

$$e^{-tY} e^{-sX} e^{tY} e^{sX} x - x = \int_0^t d\tau \int_0^s d\sigma \, [X,Y](e^{-\tau Y} e^{-\sigma X})(e^{(\sigma - s) X} e^{\tau Y} e^{sX} x) \tag{3.21}$$

A questo punto, per dimostrare basta mandare $t = s$ a zero e usare i teoremi sulle equazioni ordinarie visti nelle lezioni precedenti che permettono di affermare che

$$\begin{aligned}(\tau, \sigma) \mapsto &[X,Y](f \circ e^{-\tau Y} \circ e^{-\sigma X})(e^{(\sigma - s) X} e^{\tau Y} e^{sX} x) \\ &= \Big\langle [X,Y](e^{(\sigma - s) X} e^{\tau Y} e^{sX} x), \nabla (f \circ e^{-\tau Y} \circ e^{-\sigma X})(e^{(\sigma - s) X} e^{\tau Y} e^{sX} x) \Big\rangle\end{aligned}$$

è continua in un intorno di $(\tau, \sigma) = (0,0)$. $\square$

4. Distribuzioni e Teorema di Frobenius

Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà di classe C^k con $k \geq 2$. Un campo $X = a \cdot \nabla$ di classe C^1 in $\mathbb{R}^n$ si dice tangente a Σ se per ogni $x \in \Sigma$ vale $a(x) \in T_x\Sigma$. Valgono i seguenti fatti. (17)

- Se X è tangente a Σ, per ogni $x \in \Sigma$ vale $e^{tX}x \in \Sigma$ per t vicino a 0. Si vede usando una opportuna caratterizzazione della nozione di verietà e l'unicità delle curve integrali di X.
- Se X, Y sono tangenti a Σ allora anche $[X, Y]$ è tangente a Σ. Si vede dalla formula (3.20) e dal punto precedente.

4.1. Distribuzioni e Teorema di Frobenius

Data una famiglia $X_1, \dots, X_m$ di campi, poniamo per ogni $x \in \mathbb{R}^N$,

$$H_x := \operatorname{span}\{X_1(x), \dots, X_m(x)\} \subset T_x\mathbb{R}^N.$$

Definizione 4.1. *La distribuzione generate da $X_1, \dots, X_m$ è il seguente sottoinsieme del fibrato tangente TR^n:*

$$H := \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} H_x.$$

Se $\dim H_x =: p$ *non dipende da x, allora la distribuzione si dice regolare di rango p. Altrimenti si parla di distribuzione singolare.*

Definizione 4.2 (Famiglia involutiva)**.** *La famiglia $X_1, \dots, X_m$ di campi in $\mathbb{R}^n$ si dice involutiva se vale*

$$[X_j, X_k](x) \in H_x \quad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}^n,\ j,k \in \{1, \dots, m\}.$$

Osserviamo che se dei campi $X_1, , X_m$ sono tangenti a una superficie Σ e se $\operatorname{span}\{X_j(x) : j = 1, \dots, m\} = T_x\Sigma$ per ogni $x \in \Sigma$, allora vale la condizione di involutività nei punti di Σ

$$[X_j, X_k](x) \in H_x \quad \forall j,k \quad \forall x \in \Sigma.$$

D'altra parte, la famiglia $X = \partial_x + 2y\partial_t$ e $Y = \partial_y - 2x\partial_t$ in $\mathbb{R}^3$ genera una distribuzione regolare di rango 2, ma un calcolo del commutatore mostra che la condizione di involutività è falsa in ogni punto. Pertanto la considerazione appena fatta dice che non esiste nessuna superficie bidimensionale Σ il cui spazio tangente è generato in ogni punto dai campi X, Y.

Teorema 4.3 (Jacobi–Clebsch–(Frobenius))**.** *Sia data una famiglia $X_1, \dots, X_m$ di campi C^k in $\mathbb{R}^n$ (con $k \geq 1$). Assumiamo che tale famiglia generi una distribuzione regolare e involutiva di rango p. Allora per ogni $\bar{x}$ esiste un intorno U di $\bar{x}$ e un diffeomorfismo $\Phi : U \to \Phi(U) = V' \times V'' \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ tale che*

$$\Phi_{*,x} H_x = \mathbb{R}^p \times \{0_q\} \quad \textit{per ogni } x \in U \tag{4.4}$$

ALcumi commenti sull'enunciato.

- Per ogni $c'' \in V'' \subset \mathbb{R}^{n-p}$, l'insieme $\Sigma := \Phi^{-1}(\{(y', c'') : y' \in V'\})$ è una sottovarietà p-dimensionale di $\mathbb{R}^n$. La formula (4.4) dice che $T_x\Sigma = H_x$. In questo caso si dice che Σ è una *varietà integrale* della distribuzione. L'intorno U è pertanto "foliato" da varietà integrali.

- Con un linguaggio ottocentesco potremmo riformulare le conclusioni del teorema dicendo che se i campi $X_1, \dots, X_p$ generano una distribuzione involutiva di rango p, allora esiste in U un sistema massimale di $n-p$ "soluzioni indipendenti"[17] $g = (g_{p+1}, \dots, g_n) : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ del set di equazioni

$$X_j u = 0 \quad \text{in } U, \text{ per } j = 1, \dots, p.$$

Precisamente tali funzioni possono essere ottenute a partire dalle funzioni $h_k(y) = y_k$ per $k \geq p+1$ e definendo $g_k(x) = h_k(\Phi(x))$ per $k = p+1, \dots, n$.
Notiamo che, data una famiglia di rango p, indipendentemente dall'involutività, è impossibile che ci siano piú di $n-p$ soluzioni indipendenti (perché?). Possono essercene meno di $n-p$ addirittura nessuna nel caso non involutivo. Ad esempio nel caso $X = \partial_x + 2y\partial_t$ e $Y = \partial_y - 2x\partial_t$ è facile vedere che non esiste neanche una funzione g non costante e di classe C^2 su qualche aperto di $\mathbb{R}^3$ che risolva il sistema $Xu = Yu = 0$ (perché?).

Esercizio 4.5. *Rispondere ai due punti interrogativi delle osservazioni appena fatte.*

Dimostrazione. Indichiamo con p il rango della distribuzione.

Mostriamo che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$esiste un intorno di $U = U_{x_0}$ di x_0 e una famiglia di campi $Z_1, \dots, Z_p$ su U tali che:

1. $\operatorname{span}\{Z_1(x), \dots, Z_p(x)\} = H_x$ per ogni $x \in U$.
2. $[Z_j, Z_k] \equiv 0$ in U, per ogni $j, k = 1, \dots, p$.

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Supponiamo senza perdita di generalità che $X_1(x_0), \dots, X_p(x_0)$ siano indipendenti. Usando la notazione $X_j := \sum_{k=1}^n a_j^k \partial_k$ ed eventualmente riordinando le coordinate, possiamo assumere che la matrice $(a_j^k(x_0))_{j,k=1,\dots,p}$ sia non singolare. Per continuità e per l'ipotesi di rango costante, ciò avverrà in tutti i punti di U, eventualmente restringendo quest'ultimo.

Definiamo le funzioni β_j^k tali che

$$\sum_{1 \leq k \leq p} \beta_i^k(x) a_k^\ell(x) = \delta_i^\ell \tag{4.6}$$

per ogni $i, \ell = 1, \dots, p$. Le funzioni β_i^k sono uniche e hanno la stessa regolarità dei campi di partenza.

Introduciamo ora per ogni $x \in U$ e $\ell = 1, \dots, p$ i nuovi campi

$$Z_{\ell,x} := \sum_{1 \leq k \leq p} \beta_\ell^k(x) X_{k,x} =: \partial_\ell + \sum_{p+1 \leq i \leq n} \varphi_\ell^i(x) \partial_i, \tag{4.7}$$

dove per $\ell \leq p$ e $i \geq p+1$ abbiamo posto $\varphi_\ell^i = \sum_{k=1}^p \beta_\ell^k a_k^i$. Notiamo che

$$\operatorname{span}\{Z_{1,x}, \dots, Z_{p,x}\} = \operatorname{span}\{X_{1,x}, \dots, X_{p,x}\} = H_x \tag{4.8}$$

per ogni $x \in U$.

[17] Cioè per le quali dg ha rango massimo in ogni punto

Per provare la commutatività, osserviamo che (4.7) assicura che

$$[Z_j, Z_k]_x \in \operatorname{span}\{\partial_{p+1}, \dots, \partial_n\} \quad \text{per ogni } j,k \in \{1, \dots p\} \quad x \in U. \tag{4.9}$$

D'altra parte,

$$[Z_j, Z_k] = \Big[\sum_{\ell=1}^{p} \beta_j^\ell X_\ell, \sum_{i=1}^{p} \beta_k^i X_i\Big] = \sum_{\ell,i\leq p} \beta_j^\ell (X_\ell \beta_k^i) X_i - \beta_k^i (X_i \beta_j^\ell) X_\ell - \beta_j^\ell \beta_k^i [X_\ell, X_i]$$

Qjindi per l'involutività, $[Z_j, Z_k](x) \in H_x$ per ogni $x \in U$. Allora per ogni x possiamo scrivere

$$[Z_j, Z_k](x) = \sum_{h=1}^{p} c_{jk}^h(x) Z_h(x) = \sum_{h=1}^{p} c_{jk}^h(x) \Big(\partial_h + \sum_{\alpha \geq p+1} \varphi_h^\alpha(x) \partial_\alpha\Big)$$

Ma questa è incompatibile con (4.9) a meno che non sia $c_{jk}^h \equiv 0$ su U.

Come ultimo passo, troviamo il cambio di variabile Φ richiesto. Scriviamo $H_{x_0}^\perp = \operatorname{span}\{\xi_{p+1}, \dots, \xi_n\}$. Poniamo allora, per $(u,v) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, vicini all'origine

$$F(u,v) = e^{u_1 Z_1} e^{u_2 Z_2} \cdots e^{u_p z_p} \Big(x_0 + \sum_{k=p+1}^{n} v_k \xi_k\Big).$$

Poiché i campi Z_j commutano, per il COrollario 3.18, possiamo riarrangiare gli esponenziali a nostro piacimento. Pertanto, per $(u,v) \in V' \times V''$ intorni convenientemente piccoli dell'origine,

$$\frac{\partial F}{\partial u_j}(u,v) = \frac{\partial}{\partial u_j} e^{u_1 Z_1} e^{u_2 Z_2} \cdots e^{u_p Z_p} \Big(x_0 + \sum_{k=p+1}^{n} v_k \xi_k\Big) = Z_j(F(u,v)) \tag{4.10}$$

Inoltre dalla teoria delle equazioni ordinarie sappiamo che F è regolare in u, v tanto quanto i campi (quindi almeno C^1). Pertanto

$$\frac{\partial F}{\partial v_k}(0,0) = \xi_k \quad \text{per } k = p+1, \dots, n.$$

Ma allora per invertibilità locale, ritoccando se necessario V' e V'', risulta che $F : V' \times V'' \to \Phi(V' \times V'')$ è un diffeomorfismo (di classe C^1 almeno) in un intorno di di x_0 in $\mathbb{R}^n$). Inoltre F soddisfa (4.10) e pertanto

$$F_{*,(u,v)}(\operatorname{span}\{\partial_{u_1}, \dots, \partial_{u_p}\}) = H_{F(u,v)}.$$

Il diffeomorfismo $\Phi = F^{-1}$ è il cambio di variabile cercato. $\square$

Osservazione 4.11. *La dimostrazione appena fatta mostra che, se i campisono diclasse C^k, allora Φ è di classe C^k. Le "foglie" $F(V' \times \{c''\})$ sono però di classe C^{k+1}. Questo si vede da* (4.10).

4.2. Sistemi di tipo Jacobi

Consideriamo il sistema seguente: dati $G \subset \mathbb{R}^p_t$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n_y$ e una famiglia di funzioni $f_\alpha : G \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $\alpha = 1, \dots, p$. [18] Cerchiamo una funzione $y : G \to \mathbb{R}^n$ che soddisfi il sistema di equazioni a derivate parziali del primo ordine:

$$\frac{\partial y}{\partial t_\alpha} = f_\alpha(t, y) \quad \text{ per } \alpha = 1, \dots, p. \tag{4.12}$$

Possiamo anche scrivere un set di equazioni scalari,

$$\frac{\partial y_k}{\partial t_\alpha} = f^k_\alpha(t, y) \quad \alpha = 1, \dots, p \quad k = 1, \dots, n. \tag{4.13}$$

Osserviamo che il sistema (4.12) ammette due casi particolari noti. Il primo è quello della ricerca della primitiva di forme differenziali ($f_\alpha = f_\alpha(t)$ indipendente da y). Il secondo è quello delle equazioni ordinarie $y' = f(t, y)$ (in cui $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^1$). Il primo sottocaso suggerisce che ci debbano essere delle condizioni necessarie per l'esistenza di soluzioni di (4.13). Le individuiamo euristicamente richiedendo che le derivate miste di una soluzione $y = y(t)$ commutino.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t_\alpha}\frac{\partial}{\partial t_\beta} y = \frac{\partial}{\partial t_\alpha} f_\beta(t, y) &= \partial_\alpha f_\beta(t, y) + \sum_k \partial_k f_\beta(t, y) \frac{\partial y_k}{\partial t_\alpha} \\ &= \partial_\alpha f_\beta(t, y) + \sum_k \partial_k f_\beta(t, y) f^k_\alpha(t, y). \\ &= X_\alpha f_\beta(t, y)\end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto il campo vettoriale in $G \times \Omega$

$$X_\alpha = \partial_{t_\alpha} + \sum_k f^k_\alpha(t, y)\partial_{y_k} \tag{4.14}$$

La condizione $X_\alpha f_\beta = X_\beta f_\alpha$ può anche essere scritta nella forma

$$[X_\alpha, X_\beta] = 0.$$

Tale condizione è anche sufficiente per la risolubilità del sistema.

Teorema 4.15. *Sia $G \times \Omega \subset \mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^n_y$ e siano $f_\alpha : G \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ delle funzioni di classe C^1 per $\alpha = 1, \dots, p$. Supponiamo che la famiglia di campi* (19)

$$X_\alpha = \partial_{t_\alpha} + \sum_k f^k_\alpha(t, y)\partial_{y_k}$$

sia commutativa: $[X_\alpha, X_\beta] = 0$ identicamente in $G \times \Omega$. ALlora per ogni $(\bar{t}, \bar{y})$ esiste $\delta > 0$ e una funzione $\varphi : B(\bar{t}, \delta) \subset G \to \Omega$ di classe C^2 che risolve il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t_\alpha} = f_\alpha(t, y) \quad \forall \alpha = 1, \dots, p \\ y(\bar{t}) = \bar{y}. \end{cases} \tag{4.16}$$

Se $\psi : B(\bar{t}, \delta) \to \Omega$ è un'altra soluzione dello stesso problema, allora $\psi = \varphi$ su $B(\bar{t}, \delta)$.

[18] Notazioni $(t_\alpha, y_k) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$.

Un'applicazione tipica del teorema di esistenza ora provato è il Teorema di Bonnet sull'esistenza di superfici con forme fondamentali assegnate (vedere libro di Do Carmo).

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema di Frobenius. La distribuzione fgenerata dai campi X_α per $\alpha = 1, \dots, p$ è involutiva di rango costante p. ALlora esiste una superficie p-dimensionale Σ (di classe C^2 perché i campi sono C^1) che contiene $(\bar{t}, \bar{y})$ e che è una variatà integrale della distribuzione. Cioè:

$$T_{(t,y)}\Sigma = \operatorname{span}\{X_\alpha(t,y)\} = \operatorname{span}\Big\{e_\alpha + \sum_k f_\alpha^k(t,y)e_k : \alpha = 1, \dots, p\Big\} \quad \forall\ (t,y) \in \Sigma. \tag{4.17}$$

Abbiamo indicato con e_α, e_k i versori coordinati in $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n$. Eventualmente rimpicciolendola un po', possiamo scrivere Σ in forma di luogo di zeri di una funzione $u \in C^2(W, \mathbb{R}^n)$ con differenziale di rango massimo $= n$ in un intorno aperto W di $(\bar{t}, \bar{y})$. Cioè $\Sigma = \{(t,y) \in W : u(t,y) = 0\}$. Poiché Σ è una varietà integrale, risulta

$$X_\alpha u(t,y) = \partial_\alpha u(t,y) + \sum_k f_\alpha^k(t,u)\partial_k u(t,y) = 0 \quad \forall\ (t,y) \in \Sigma.$$

Questo dice che per ogni α risulta $\partial_\alpha u(\bar{t}, \bar{y}) \in \operatorname{span}\{\partial_k u(\bar{t}, \bar{y}) : k = 1, \dots, n\}$. Quindi, nel punto $(\bar{t}, \bar{y}) \in \Sigma$,

$$n = \operatorname{rango} du(\bar{t}, \bar{y}) = \operatorname{rango}[\partial_{t_1}u, \dots, \partial_{t_p}u, \partial_{y_1}u, \dots, \partial_{y_n}u] = \operatorname{rango}[0, \dots, 0, \partial_{y_1}u, \dots, \partial_{y_n}u]$$

Ma allora la matrice $\dfrac{\partial u}{\partial y}(\bar{t}, \bar{y})$ è nonsingolare. Dunque per il teorema della funzione implicita esiste un rettangolo aperto $V' \times V'' \subset G \times \Omega$ che contiene il punto $(\bar{t}, \bar{y})$ e una funzione $\varphi : V' \to V''$ di classe C^2 con $\varphi(\bar{t}) = \bar{y}$ tale che

$$\Sigma \cap (V' \times V'') = \{(t, \varphi(t)) : t \in V'\}.$$

Possiamo quindi scrivere per ogni $t \in V'$

$$T_{(t,\varphi(t))}\Sigma = \operatorname{span}\{\partial_{t_\beta}(t, \varphi(t)) : \beta = 1, \dots, p\} = \operatorname{span}\Big\{e_\beta + \sum_k \frac{\partial}{\partial t_\beta}\varphi_k(t)e_k : \beta = 1, \dots, p\Big\}$$

Riscrivendo (4.17) con $y = \varphi(t)$ e confrontando le due scritture dello spazio tangente, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t_\beta}\varphi(t) = f_\beta(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in V'.$$

Abbiamo trovato la soluzione cercata.

Ora vediamo l'unicità. Se $\varphi, \psi : B(\bar{t}, \delta) \to \Omega$ sono soluzioni del problema (4.16) e se $t \in B(\bar{t}, \delta)$ è fissato, consideriamo $h(s) = \varphi(\bar{t} + s(t - \bar{t}))$ e $k(s) = \psi(\bar{t} + s(t - \bar{t}))$ con $s \in [0, 1]$. Allora h soddisfa l'equazione ordinaria

$$h'(s) = \sum_\alpha \partial_\alpha \varphi(\bar{t} + s(t - \bar{t}))(t_\alpha - \bar{t}_\alpha) = \sum_\alpha f_\alpha(\bar{t} + s(t - \bar{t}), h(s))(t_\alpha - \bar{t}_\alpha) =: F(s, h(s)).$$

È facile vedere che k soddisfa la stessa equazione e che $h(0) = k(0)$. Dunque $h(1) = k(1)$ e la tesi segue dal teorema di unicità per le equazioni ordinarie. $\square$

Esercizio 4.18 (Per casa). *Verificare che i campi*

$$X_1 = \partial_{x_1} + \frac{2x_1x_3}{1+x_1^2+x_3^2}\partial_{x_3} \quad e \quad X_2 = \partial_{x_2} + \frac{2x_2x_3}{1+x_1^2+x_3^2}\partial_{x_3}$$

commutano. Calcolare i flussi $e^{tX_1}(z_1, z_2, z_3)$ *e* $e^{tX_2}(z_1, z_2, z_3)$. *Costruire infine, come fatto nalla dimostrazione del Teorema di Clebsch-Jacobi-Frobenius, la foglia bidimensionale* $\Sigma_{(0,0,z_3)}$ *contenente il punto* $(0, 0, z_3)$,

$$\Sigma_{(0,0,z_3)} = \{e^{sX_2}e^{tX_1}(0, 0, z_3) : (s, t) \in \mathbb{R}^2\} = \{e^{tX_2}e^{sX_1}(0, 0, z_3) : (s, t) \in \mathbb{R}^2\}$$

5. Campi di Hörmander

Definizione 5.1 (Orbita). *Data* $\mathcal{H} = \{X_1, \ldots, X_m\}$, *famiglia di campi* C^1 *in* $\mathbb{R}^n$, *definiamo l'orbita uscente da* x *come l'insieme dei punti che si possono connettere a* x *con una spezzata integrale di campi di* $\mathcal{H}$

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_x \equiv \mathcal{O}_x = \{y \in \mathbb{R}^n \text{che si scrivono nella forma } y = e^{t_1Z_1} \circ \cdots \circ e^{t_\nu Z_\nu}x \\ \text{per opportuni } \nu \in \mathbb{N},\, t_j \in \mathbb{R} \text{ e } Z_j \in \mathcal{H}\ \}\end{aligned}$$

Se introduciamo la relazione $x \sim y$ quando $y \in \mathcal{O}_x$, allora abbiamo una relazione di equivalenza e $\mathbb{R}^n$ si scrive come unione disgiunta di orbite. Inoltre osserviamo che punti sulla stessa orbita hanno distanza cc finita:

$$d_{\mathrm{cc}}(e^{t_1Z_1} \circ \cdots \circ e^{t_\nu Z_\nu}x, x) \le |t_1| + \cdots + |t_\nu|. \tag{5.2}$$

Ora introduciamo la condizione di Hörmander. Notazioni: data una parola $w = w_1w_2\cdots w_\ell$ di lunghezza ℓ nell'alfabeto $\{1, 2, \cdots, m\}$ (cioè $w_j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ per ogni j), poniamo

$$X_w = [X_{w_1}, [X_{w_2}, \ldots, [X_{w_{\ell-1}}, X_{w_\ell}]\cdots]]$$

Diciamo che X_w è un commutatore di lunghezza $|w| = \ell$.

Definizione 5.3 (Campi di Hörmander). *La famiglia* $X_1, \ldots, X_m$ *di campi* C^∞ *in* $\mathbb{R}^n$ *si dice di Hörmander se per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$ *esiste* $s \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$\mathrm{span}\{X_w(x) : |w| \le s\} = \mathbb{R}^n. \tag{5.4}$$

Se $\mathrm{span}\{X_w(x) : |w| \le s\} = \mathbb{R}^n$ *per ogni* x *in un aperto* Ω, *diciamo che i campi hanno passo* s *in* Ω.

Esempio 5.5. *Ecco alcuni esempi.*

- *I campi* $X = \partial_x$ *e* $Y = x^k\partial_y$ *nel piano.*
- *I campi* $X = \partial_x + 2y\partial_t$ *e* $Y = \partial_y - 2x\partial_t$.
- *I campi* $X = \partial_x + 2m|z|^{2(m-1)}y\partial_t$ *e* $Y = \partial_y - 2m|z|^{2(m-1)}x\partial_t$ *con* $m = 1, 2, \ldots$ *in* $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \ni (x, y, t) = z, t)$
- *I campi* $X = \partial_x$ *e* $Y = \exp(-1/x^2)\partial_y$.

5.1. Il Teorema di connettività di Chow–Rashevskii

Teorema 5.6 (Teorema di Chow–Rashevskii). *Siano $X_1, \ldots, X_m$ dei campi di classe C^∞ in $\mathbb{R}^n$ che soddisfano la condizione di Hörmander. Allora ogni coppia di punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ può essere connessa tramite una spezzata integrale di campi della famiglia $X_1, \ldots, X_m$. Inoltre la distanza di Carnot–Carathéodory definita dai campi $X_1, \ldots, X_m$ è continua: cioè per ogni $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ vale*

$$\lim_{|x-x_0|\to 0} d_{\mathrm{cc}}(x, y_0) = d_{\mathrm{cc}}(x_0, y_0). \tag{5.7}$$

Osservazione 5.8. *Il teorema di Chow–Rashevskii, assieme alla Proposizione 2.10, prova che la topologia indotta dalla distanza di CC è la topologia euclidea in $\mathbb{R}^n$. Questo però non significa che le distanze sono equivalenti.*

Premettiamo il seguente lemma. [19]

Lemma 5.9. *Sia $\mathcal{H} = \{X_1, \ldots, X_m\}$ una famiglia di campi vettoriali di Hörmander in $\mathbb{R}^n$. Proviamo che per ogni punto x_0 e per ogni intorno dell'origine $V = \,]-\varepsilon, \varepsilon[^n \subset \mathbb{R}^n$ esistono campi $Z_1, \ldots, Z_n \in \mathcal{H}$ ed esiste $(\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_n) \in V$ in modo che la funzione*

$$\psi(s) := e^{s_n Z_n} \cdots e^{s_2 Z_2} e^{s_1 Z_1} x_0$$

abbia differenziale non singolare in $\widehat{s}$.

Osservazione sul lemma.

- La catena di esponenziali è fatta esattamente da n tratti, dove n è la dimensione dello spazio ambiente.
- Non si può scegliere $\hat{s} = 0$, a meno che i campi non generino uno spazio di dimensione n in x_0 (condizione di Hörmander "di passo uno").
- Esempio. Analisi nel caso dei campi di Heisenberg della nonsingolarità di

$$\psi(s_1, s_2, s_3) = e^{s_3 X} e^{s_2 Y} e^{s_1 X}(0, 0, 0).$$

Dimostrazione. Sia x_0 un punto fissato sia $\varepsilon > 0$. (21)

Passo 1. Esiste $Z_1 \in \mathcal{H}$ tale che $Z_1(x_0) \neq 0$. ALtrimenti sarebbe violata la condizione di Hörmander. Dunque è definita una varietà di dimensione uno

$$\Sigma_1 := \{e^{sZ_1} x_0 : |s| < \delta\}$$

dove $\delta < \varepsilon$ è piccolo abbastanza affinché $e^{tZ_1} x_0$ esista su $(-\delta, \delta)$. Notiamo che Z_1 è tangente a Σ_1 ed è non nullo in ogni punto di Σ_1.

Passo 2. Ci sono due possibilità :

(A): $X_j(e^{sZ_1} x_0)$ è tangente a Σ_1 per ogni $|s| < \delta$;

(B) Esiste un tempo $\bar{s}_1 \in (-\delta, \delta)$ ed esiste $Z_2 \in H$ tale che $Z_2(e^{\bar{s}_1 Z_1} x_0)$ non è tangente a Σ_1.

Notiamo che la possibilità (A) non può verificarsi; altrimenti sarebbe violata la condizione di Hörmander. Quindi deve valere (B). Consideriamo la funzione

$$\psi_2(s_1, s_2) = e^{s_2 Z_2} e^{s_1 Z_1} x_0,$$

[19] Seguiamo la dimostrazione nelle note di Agrachev, Barilari e Boscain già menzionate.

definita in un piccolo aperto contenente $(\bar{s}_1, 0)$. Osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial s_2}\psi_2(\bar{s}_1, 0) = Z_2(e^{\bar{s}_1 Z_1}x_0) \quad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial s_1}\psi_2(\bar{s}_1, 0) = Z_1(e^{\bar{s}_1 Z_1}x_0)$$

sono indipendenti. A questo punto il Lemma è provato se siamo in $\mathbb{R}^2$. Altrimenti, se $n \geq 3$, scegliamo $\sigma > 0$ tale che $]\bar{s}_1 - \sigma, \bar{s}_1 + \sigma[\times]-\sigma, \sigma[\subset]-\varepsilon, \varepsilon[^2$. Se σ è sufficientemente piccolo, l'insieme

$$\Sigma_2 := \{\psi_2(s) = e^{s_2 Z_2}e^{s_1 Z_1}x_0 : s \in]\bar{s}_1 - \sigma, \bar{s}_1 + \sigma[\times]-\sigma, \sigma[\}$$

è una varietà bidimensionale parametrizzata da ψ_2. In particolare $\frac{\partial}{\partial s_1}\psi_2(s_1, s_2)$ e $\frac{\partial}{\partial s_2}\psi_2(s_1, s_2)$ sono indipendenti e generano $T_{\psi_2(s)}\Sigma_2$ per ogni $s \in]\bar{s}_1 - \sigma, \bar{s}_1 + \sigma[\times]-\sigma, \sigma[$.

Passo 3. Ci sono due possibilità :

(A) tutti i vettori $X_j \in \mathcal{H}$ sono tangenti a Σ_2;

(B) esiste un campo Z_3 ed esiste $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) \in]\bar{s}_1 - \sigma, \bar{s}_1 + \sigma[\times]-\sigma, \sigma[$ tale che $Z_3(e^{\tilde{s}_2 Z_2}e^{\tilde{s}_1 Z_1}x_0)$ non è tangente a Σ_2.

Il caso (A) contraddice la condizione di Hörmander. Allora poniamo

$$\psi_3(s_1, s_2, s_3) = e^{s_3 Z_3}e^{s_2 Z_2}e^{s_1 Z_1}x_0.$$

I tre vettori

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s_1}\psi_3(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, 0) &= \frac{\partial}{\partial s_1}\psi_2(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) \in T_{\psi_2(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)}\Sigma_2, \\
\frac{\partial}{\partial s_2}\psi_3(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, 0) &= \frac{\partial}{\partial s_2}\psi_2(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) \in T_{\psi_2(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)}\Sigma_2 \quad \text{e} \\
\frac{\partial}{\partial s_3}\psi_3(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, 0) &= Z_3(\psi_3(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, 0)) = Z_3(\psi_2(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)) \notin T_{\psi_2(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)}\Sigma_2
\end{aligned}$$

sono indipendenti. La dimostrazione è conclusa se $n = 3$.

Iterando il ragionamento al massimo n volte, il Lemma è provato. $\square$

Dimostrazione del teorema di Chow. Fissiamo x_0, ε e applichiamo il Lemma precedente che fornisce la mappa

$$\psi(s_1, \ldots, s_n) = e^{s_n Z_n} \cdots e^{s_1 Z_1}x_0.$$

Tale mappa è un diffeomorfismo da un intorno aperto $U_\varepsilon \subset]-\varepsilon, \varepsilon[^n$ di $(\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_n)$ sull'aperto $\psi(U_\varepsilon)$ contenente $\psi(\widehat{s})$.

Ora definiamo

$$\varphi(y) = e^{-\widehat{s}_1 Z_1} \cdots e^{-\widehat{s}_n Z_n}y$$

per y vicino a $\psi(\widehat{s})$. Notiamo che $\varphi(\psi(\widehat{s})) = x_0$. Inoltre, per le proprietà dei flussi di campi vettoriali, φ è un diffeomorfismo con dominio un aperto contenente $\psi(\widehat{s})$ (vedere la stima sul determinante del paragrafo 1.5).

Dunque, per s in un aperto convenientemente piccolo $G \subset]-\varepsilon, \varepsilon[^n$ e contenente $\widehat{s}$ possiamo definire

$$F(s) = \varphi \circ \psi(s) = e^{-\widehat{s}_1 Z_1} \cdots e^{-\widehat{s}_n Z_n}(e^{s_n Z_n} \cdots e^{s_1 Z_1}x_0).$$

Poiché $dF(\hat{s}) = d\varphi(\psi(\hat{s}))d\psi(\hat{s})$ è non singolare, per il teorema di invertibilità locale, la funzione F è aperta in $\hat{s}$. In particolare, esistono σ e $\delta > 0$ tali che $B(\hat{s}, \sigma) \subset G$ e

$$F(B_{\mathrm{Euc}}(\hat{s}, \sigma)) \supset B_{\mathrm{Euc}}(x_0, \delta). \tag{5.10}$$

Essendo ciascuna delle spezzate integrali che compongono F lunga al massimo ε, per ogni punto $z \in F(B_{\mathrm{Euc}}(\hat{s}, \sigma))$ vale $d_{\mathrm{cc}}(z, x_0) \le 2n\varepsilon$.

In sintesi, abbiamo verificato quanto segue: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$d_{\mathrm{cc}}(z, x_0) \le 2n\varepsilon \quad \text{per ogni } z \text{ che soddisfi } |z - x_0| < \delta.$$

Dunque

$$\lim_{|z-x_0|\to 0} d_{\mathrm{cc}}(z, x_0) = 0 \tag{5.11}$$

per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Questo prova la continuità della distanza sulla diagonale.

Per riconoscere che ogni coppia di punti può essere connessa tramite una spezzata integrale, ricordiamo che, data una qualsiasi famiglia di campi, $\mathbb{R}^n$ si decompone come unione disgiunta di orbite della famiglia. Ma l'inclusione (5.10) prova che ciascuna di tali orbite è aperta nella topologia euclidea. Di conseguenza, per connessione, possiamo affermare che c'è una sola orbita $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$. In particolare $d_{\mathrm{cc}}(x, y) < \infty$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

La continuità scritta in (5.7) segue subito da (5.11) e dalla disuguazlianza triangolare per d_{cc}. □

Il teorema di Chow produce un risultato qualitativo. Nell'enunciato e nella dimostrazione non appare da nessuna parte il passo dei campi. Una versione quantitativa del Teorema di Chow è dovuta a Nagel Stein e Wainger.

Teorema 5.12 (Nagel, Stein, Wainger). *Se $X_1, \dots, X_m$ sono campi di classe C^∞ e di Hörmander di passo s in $\mathbb{R}^n$, allora per ogni compatto esiste $C_0 > 0$ tale che* (22)

$$d_{\mathrm{cc}}(x, y) \le C_0 |x - y|^{1/s} \quad \textit{per ogni } x, y \in K.$$

6. Il teorema delle orbite di Sussmann

Ci domandiamo quali sono le proprietà dell'orbita di una famiglia $\mathcal{H} = \{X_1, \dots X_m\}$ (23) di campi vettoriali che non soddisfino alcuna proprietà se non un minimo di regolarità (ad esempio C^2). Scommettiamo sul fatto che in un qualche senso le orbite siano delle varietà.

Esempio 6.1. *La famiglia $X = \partial_x$ e $Y = x^2 \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\partial_y$. Tale famiglia non soddisfa né l'ipotesi del teorema di Frobenius e nemmeno la condizione di Hörmander. Però risulta che c'è una sola orbita $\mathcal{O} = \mathbb{R}^2$.*

Esempio 6.2. *Il flusso irrazionale sul toro $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dato dal campo $X = \partial_x + b\partial_y$ con $b \notin \mathbb{Q}$. Si dimostra che la proiezione sul toro del cammino $\gamma(t) = (x + t, y + bt)$ è densa in $\mathbb{T}^2$.*[20]

L'orbita del campo X non è una sottovarietà del toro nel senso usuale, ma è una sottovarietà secondo la seguente definizione

[20]Vedere ad esempio il libro Jost, Dynamical systems. Examples of complex behaviour. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005, pagina 26.

Definizione 6.3 (Sottovarietà "immersed"). *Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ e sia τ una topologia su Σ, $\tau \supseteq \tau_{\text{Euc}}|\Sigma$ (equivalenemente, $i : (\Sigma, \tau) \to \mathbb{R}^n$ euclideo è continua). Diciamo che (Σ, τ) è una sottovarietà immersed di classe C^k se per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esiste $\Omega \in \tau$, $\Omega \supset \{x\}$ tale che $\Omega \cap \Sigma$ è un grafico p-dimensionale di classe C^k.*

Se τ coincide con $\tau_{\text{Euc}}|\Sigma$, la topologia indotta da $\mathbb{R}^n$, allora la sottovarietà si chiama "embedded submanifold" e ritroviamo la definizione standard dell'analisi.

Esercizio 6.4. *Consideriamo $\Sigma = \{\gamma(t) : t < 2\pi\}$ dove*

$$\gamma(t) = \begin{cases} (1, t) & \text{se } t < 0 \\ e^{it} & \text{se } 0 \le t < 2\pi. \end{cases}$$

Verificare che Σ non è una sottovarietà "embedded" di classe C^1. Provare invece che è una sottovarietà "immersed", fornita di una opportuna topologia.

Ora scommettiamo sul fatto che ogni orbita $\mathcal{O}$ sia una sottovarietà e ne individuiamo lo spazio tangente. Nella discussione che segue assumiamo sempre che tutte le curve integrali di tutti i campi di $\mathcal{H}$ siano definite globalmente su $\mathbb{R}$. Tutti i risultati che seguono valgono però anche senza tale ipotesi.

Osserviamo dalla definizione di pushforward che, presi $Z, W \in \mathcal{H}$

$$e_*^{-tZ} W(x) = \frac{d}{ds} e^{-tZ} e^{sW} e^{tZ} x \Big|_{s=0}. \tag{6.5}$$

Quindi, se $\mathcal{O} = \mathcal{O}_x$ è una sottovarietà, il campo $e_*^{-tZ} W$ deve essere ad essa tangente. Infatti lo abbiamo ottenuto nel punto x come vettore tangente a una curva che giace sull'orbita. analogamente si vede che $(e^{-t_1 Z_1} e^{-t_2 Z_2})_* W$ deve essere tangente a $\mathcal{O}$. Poniamo ora

$$\mathcal{E} := \{\varphi = e^{-t_1 Z_1} \circ \cdots \circ e^{-t_\nu Z_\nu} : \nu \in \mathbb{N}, \quad t_j \in \mathbb{R},\ Z_j \in \mathcal{H}\}.$$

Nelle nostre ipotesi non ci sono problemi di definizione e $\mathcal{E}$ è fatto di diffeomorfismi globali. Introduciamo l'insieme di campi allargato

$$\widehat{\mathcal{H}} := \{\varphi_* W : \varphi \in \mathcal{E}, \quad W \in \mathcal{H}\}.$$

Notiamo che $\widehat{\mathcal{H}} \supset \mathcal{H}$. Quindi poniamo

$$S_x := \operatorname{span}\{(\varphi_* W)(x) : \varphi \in \mathcal{E}, \quad W \in \mathcal{H}\} \subset \mathbb{R}^n = T_x\mathbb{R}^n$$

e definiamo la *distribuzione di Sussmann*

$$S = \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} S_x \subset T\mathbb{R}^n.$$

È interessante notare che $[Z, W](x) = \frac{d}{dt} e_*^{-sZ} W(x) \Big|_{s=0} \in S_x$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e $Z, W \in \mathcal{H}$. Qualcosa di analogo vale per i commutatori di qualsiasi ordine. Lo spazio S_x contiene (talvolta anche strettmente) lo spazio generato dai commutatori di qualsiasi ordine in x.

Esercizio 6.6. *Trovare la distribuzione di Sussmann associata alla famiglia di campi*

$$X = \partial_x, \quad Y = x^2 \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)\partial_y.$$

Suggerimento. Dato un punto $(\bar{x}, \bar{y})$ *con* $\bar{x} < 0$ *calcolare* $(e_*^{2\bar{x}X}Y)(\bar{x}, \bar{y})$.

Teorema 6.7 (Sussmann). *Data una famiglia* $\mathcal{H} = \{X_1, \ldots, X_n\}$ *di campi in* $\mathbb{R}^n$ *di classe* C^k *con* $k \geq 2$, *allora esiste una topologia* τ *su* $\mathbb{R}^n$ *per la quale ogni orbita è connessa, aperta e chiusa. Inoltre ogni orbita* $(\mathcal{O}, \tau)$ *è una sottovarietà "immersed" di* $\mathbb{R}^n$ *ed è una varietà integrale della distribuzione di Sussmann* S.

Dimostrazione. [21] Lavoriamo in ipotesi semplificate supponendo tutti i campi completi.

Passo 1. Dimostriamo che $\dim S_x = \dim S_y$ se x, y sono sulla stessa orbita. Lo vediamo costruendo una mappa lineare iniettiva da S_x in S_y. QUesto assicura che $\dim S_x \leq \dim S_y$. Poi basta scambiare i ruoli di x, y.

Siccome x, y sono sulla stessa orbita, si scrive $y = \psi(x)$ per una opportuna $\psi = e^{\tau_1 U_1} \cdots e^{\tau_k U_k} \in \mathcal{E}$. Poiché ψ è un diffeomorfismo, prendiamo come mappa lineare il suo differenziale in x. Sia $V(x) := \varphi_* W(x) \in S_x$ uno dei generatori di S_x (quindi $\varphi \in \mathcal{E}$ e $W \in \mathcal{H}$). RIcordiamo che φ manda curve integrali di W in curve integrali di $\varphi_* W = V$. Quindi

$$e^{sV}x = \varphi e^{sW} \varphi^{-1}(x) \tag{6.8}$$

(tralasciamo a volte il $\circ$ per le funzioni composte). Dunque il vettore $d\psi(x)V_x \in T_y\mathbb{R}^n$ si scrive come segue:

$$\begin{aligned} d\psi(x)V_x &= d\psi(x)\Big(\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \varphi e^{sW}\varphi^{-1}(x)\Big) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \psi\varphi e^{sW}\varphi^{-1}(x) \\ &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \psi\varphi e^{sW}\varphi^{-1}\psi^{-1}(y) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} (\psi\circ\varphi)e^{sW}(\psi\circ\varphi)^{-1}(y) = (\psi\circ\varphi)_* W(y) \in S_y. \end{aligned}$$

Abbiamo scoperto che la funzione lineare iniettiva $d\psi(x) : S_x \to T_y\mathbb{R}^n$ di fatto prende valori nel sottospazio T_y.

Passo 2. Costruiamo la struttura differenziale locale di $\mathcal{O}$. SIa $x \in \mathbb{R}^n$. Se $\dim(S_x) =: p_x =: p$, ci sono p vettori $V_1, \ldots, V_p \in \widehat{\mathcal{H}}$ indipendenti in x. Si scrive precisamente $V_j = (\varphi_j)_* W_j$ per opportuni $\varphi_j \in \mathcal{E}$, $W_j \in \mathcal{H}$.

$$\begin{aligned} G_x(s) : &= e^{s_1 V_1} \cdots e^{s_p V_p}(x) \\ &= \varphi_1 e^{s_1 W_1} \varphi_1^{-1} \cdots \varphi_p e^{s_p W_p} \varphi_p^{-1}(x) \end{aligned} \tag{6.9}$$

Abbiamo usato (6.8) per ciascun campo V_j. Dalla seconda riga si vede che G_x è di classe C^k, come i campi della famiglia $\mathcal{H}$ di partenza. Derivando in $s = 0$,

$$\frac{\partial}{\partial s_j} G_x(0) = V_j(x), \quad \forall\, j.$$

Dunque la funzione ha rango massimo p e definisce una piccola sottovarietà $G_x(\mathcal{U}_x) \subset \mathbb{R}^n$, non appena fissiamo $\mathcal{U}_x \subset \mathbb{R}^p$, aperto sufficientemente piccolo contenente l'origine.

[21] Dimostrazione tratta da Agrachev, Sachkov, Control Theory from the Geometric Viewpoint, Springer EMS, Vol.87

In particolare i vettori $\frac{\partial G_x}{\partial s_j}(s)$ sono indipendenti e generano lo spazio tangente a tale superficie in $G_x(s)$.

Ora mostriamo che $T_y G_x(\mathcal{U}_x) = S_y$ per ogni $y \in G_x(\mathcal{U}_x)$. Cioè che $G_x(\mathcal{U}_x)$ è una varietà integrsle della distribuzione di Sussmann. Si tratta di calcolare la stessa derivata per $s \in \mathcal{U}_x$ qualsiasi.

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_x}{\partial s_j}(s) &= \frac{\partial}{\partial s_j}\varphi_1 e^{s_1 W_1}\varphi_1^{-1}\cdots\varphi_j e^{s_j W_j}\varphi_j^{-1}\cdots\varphi_p e^{s_p W_p}\varphi_p^{-1}(x)\\ &=: \frac{\partial}{\partial s_j} H e^{s_j W_j} G(x),\end{aligned}$$

dove i diffeomorfismi H, G definiti dall'ultima uguaglianza sono mappe esponenziali della classe $\mathcal{E}$ e non contengono la variabile s_j. Dunque dobbiamo derivare l'immagine di una curva integrale e al solito otteniamo il pushforward:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s_j} H e^{s_j W_j}(G(x)) &= \frac{\partial}{\partial s_j} e^{s_j H_* W_j}((H \circ G)(x))\\ &= H_* W_j(e^{s_j H_* W_j}(H \circ G)(x)) = H_* W_j(G_x(s)) \in S_{G_x(s)}\end{aligned}$$

Abbiamo usato anche la definizione di curva integrale per $H_* W$ e abbiamo riscritto $G_x(s)$ nella sua forma originaria.

Passo 3. Ora sistemiamo gli aspetti globali definendo una topologia τ su $\mathbb{R}^n$ rispetto alla quale le orbite sono connesse, aperte, chiuse e per la quale ogni orbita $(\mathcal{O}, \tau)$ è una sottovarietà immersed di classe C^k ed è varietà integrale della distribuzione di Sussmann.

Partiamo dalla costruzione delle mappe G_x per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e dai corrispondenti intorni $\mathcal{U}_x$ delpunto precedente. Prendiamo la famiglia di insiemi

$$\mathcal{B} := \{G_x(\mathcal{U}) : x \in \mathbb{R}^n \text{ e } 0 \in \mathcal{U} \subset \mathcal{U}_x, \text{ con } \mathcal{U} \text{ aperto.}\}$$

L'unione di tali insiemi copre $\mathbb{R}^n$. Mostriamo che è una base di una topologia. Basta provare che per ogni $x', x'' \in \mathbb{R}^n$, se $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}_{x'}$ e $\mathcal{U}'' \subset \mathcal{U}_{x''}$ hanno intersezione non vuota, allora per ogni $x \in G_{x'}(\mathcal{U}') \cap G_{x''}(\mathcal{U}'')$ esiste $\mathcal{U}$ aperto contenente l'origine per il quale

$$G_x(\mathcal{U}) \subset G_{x'}(\mathcal{U}') \cap G_{x''}(\mathcal{U}'').$$

Mostriamo l'inclusione $G_x(\mathcal{U}) \subset G_{x'}(\mathcal{U}')$. Per l'altra si ragiona analogamente. Sia $x \in G_{x'}(\mathcal{U}') =: \Sigma$. Sappiamo che Σ è una varietà di classe C^k, con $k \geq 2$. Siano $V_1, \ldots, V_p$ i campi vettoriali della famiglia $\mathcal{H}$ che definiscono la mappa G_x. Tali campi sono almeno di classe C^1 e inoltre tangenti a Σ. Dunque per $|s| < \delta$ con δ sufficientemente piccolo si ha

$$G_x(s) = e^{s_1 V_1} \cdots, e^{s_p V_p} x \in \Sigma.$$

Ragionando come sopra si vede che le curve integrali $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tW} x \in (\mathbb{R}^n, \tau)$ sono continue. Dunque ogni orbita è connessa. Inoltre ogni orbita $\mathcal{O} = \bigcup_{x \in \mathcal{O}} G_x(\mathcal{U}_x)$ è τ-aperta. Ma d'altra perte, fissata un orbita $\mathcal{O}$, anche il suo complementare

$$\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O} = \bigcup_{\mathcal{O}' \neq \mathcal{O}} \mathcal{O}'$$

è aperto. Dunque $\mathcal{O}$ è aperta e chiusa. □

È interessante, per chi vuole, analizzare il seguente esempio, che mostra che, mentre nel caso integrabile (Teorema di Frobenius) le orbite di campi C^k hanno regolarità C^{k+1}, nel caso generale le orbite hanno la stessa regolarità C^k dei campi.

Esempio 6.10. *Sia* $\varphi(t) = e^{-1/t^2}\mathbb{1}_{]0,+\infty[}(t)$*, l'usuale funzione di classe* C^∞ *supportata sul semiasse positivo. Ovviamente la sua primitiva* $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau$ *è di classe* C^∞ *e positiva per* $t > 0$*. SIa poi* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una qualsiasi funzione di classe* C^k*. Introduciamo i campi di classe* C^k

$$X_1 = \partial_1 + g(x_2)\varphi(x_1)\partial_3, \qquad X_2 = \varphi(-x_1)\partial_2$$

Analizzando la distribuzione di rango non costante generata dai campi X_1, X_2 *(in particolare scrivendo le curve integrali* $e^{tX_1}(0, x_2, 0)$*), si vede che l'orbita che contiene l'origine è la seguente superficie bidimensionale di classe* C^k

$$\mathcal{O}_{(0,-1,0)} = \{(x_1, x_2, 0) : x_1 \le 0 \; x_2 \in \mathbb{R}\} \bigcup \{(x_1, x_2, \Phi(x_1)g(x_2)) : x_1 > 0, \; x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

7. Teoria della differenziazione dell'integrale di Lebesgue

Diamo per nota la teoria dell'integrale di Lebesgue e indichiamo con μ la misura di Lebesgue. Data una funzione $f : A \to [-\infty, +\infty]$ usiamo le notazioni abbreviate $\{f > c\} := f^{-1}(]c, +\infty])$ e analoghe per altri intervalli.

Proposizione 7.1 (Assoluta continuità dell'integrale). *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ misurabile, vale*

$$\mu(A) < \delta_\varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \int_A |f| d\mu < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalita' assumiamo $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$. Mostriamo innanzitutto che $\mu(\{f(x) = +\infty\}) = 0$. Questo si vede facilmente con la disuguaglianza di Chebyshev segunte: preso $k \in \mathbb{N}$,

$$+\infty > \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \geq \int_{\{f>k\}} f \geq k\mu\{f > k\} \geq k\mu(\{f = +\infty\}).$$

Per $k \to +\infty$ si ottiene $\mu(\{f(x) = +\infty\}) = 0$.

A questo punto, possiamo affermare che

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\{f>k\}} f d\mu = 0$$

Questo segue dal Teorema della convergenza dominata. Infatti, vale il limite puntuale $f\mathbb{1}_{\{f>k\}} \to +\infty\mathbb{1}_{\{f=+\infty\}} = 0$ quasi dappertutto. Inoltre $0 \leq f\mathbb{1}_{\{f>k\}} \leq f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

Per concludere la dimostrazione, preso $\varepsilon > 0$ e fissato un $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ per cui $\int_{f>k_\varepsilon} f d\mu < \varepsilon$, spezziamo

$$\int_A f d\mu = \int_{A\cap\{f>k_\varepsilon\}} f d\mu + \int_{A\cap\{f\leq k_\varepsilon\}} f d\mu \leq \int_A f d\mu + k_\varepsilon\mu(A) \leq \varepsilon + k_\varepsilon\mu(A).$$

Ora si ottiene la tesi scegliendo $\delta = \varepsilon/k_\varepsilon$. □

Il seguente lemma esprime la proprietà di regolarità esterna della misura.

Lemma 7.2. *Se $\mu^*(E) < \infty$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $\Omega \supseteq E$ tale che $\mu(\Omega) < \mu^*(E) + \varepsilon$. Se inoltre E è misurabile, tale aperto soddisfa anche $\mu^*(\Omega \setminus E) < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Per definizione $\mu^*(E)$ è l'estremo inferiore delle somme $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mis}(I_n)$ dove I_n è una scatola aperta per ogni n e $\cup I_n \supset E$. Dato ε, l'aperto Ω si trova come $\Omega = \cup_n I_n$, dove le scatole sono state scelte in modo che $\sum \operatorname{mis}(I_n) < \mu^*(E) + \varepsilon$. Infatti per la subadditività

$$\mu(\Omega) \leq \sum \operatorname{mis}(I_n) < \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Se poi E è misurabile, il termine a sinistra si può riscrivere nella forma $\mu(\Omega) = \mu(E) + \mu(\Omega \setminus E)$. Cosí si ottiene la stima $\mu^*(\Omega \setminus E) < \varepsilon$. □

Infine un lemma

Lemma 7.3. *Sia $E \subset [a,b]$. Se esiste $\rho < 1$ tale che $\mu(E \cap I) \leq \rho\mu(I)$ per ogni intervallo $I \subset [a,b]$, allora $\mu^*(E) = 0$.*

Dimostrazione. Basta dimostrare che per ogni $R > 0$, posto $E' = E \cap [-R,R]$, vale $\mu^*(E') = 0$. Fissiamo R e il corrispondente E'. Usiamo la regolarità: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto Ω tale che $\mu(\Omega) < \mu^*(E') + \varepsilon$. COme ogni aperto di $\mathbb{R}$, Ω è un'unione al piú numerabile di intervalli disgiunti: $\Omega = \cup_k(\alpha_k, \beta_k)$. Allora

$$\mu^*(E') \leq \sum_n \mu^*\Big(E' \cap (\alpha_n, \beta_n)\Big) \leq \sum_n \rho(\beta_n - \alpha_n) = \rho\mu(\Omega) \leq \rho(\mu^*(E') + \varepsilon), \quad \forall\, \varepsilon > 0.$$

Quindi $\mu_*(E') = 0$. □

Nella parte successiva seguiamo i testi di Riesz e Nagy [22] e Komogogrov Fomin [23]

Definizione 7.4. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $[a,b] \subseteq A$ intervallo non banale. Si dice che x è invisibile a destra per f su $[a,b]$ se esiste $\xi \in (x,b)$ tale che $f(\xi) > f(x)$. Si dice invece invisibile a sinistra se se esiste $\xi \in (a,x)$ tale che $f(\xi) > f(x)$.*

Indichiamo gli insiemi appena definiti con $R(f;[a,b])$ e $L(f;[a,b])$.

Lemma 7.5 (F. Riesz). *L'insieme $R(f;[a,b])$ e' aperto e dunque si scrive nella forma $R(f;[a,b]) = \cup_k(\alpha_k, \beta_k)$ dove l'unione e' disgiunta, al piu' numerabile. Vale inoltre la disuguaglianza*

$$f(\alpha_k) \leq f(\beta_k) \qquad \forall\, k.$$

Inoltre l'insieme dei punti invisibili a sinistra si scrive nella forma $L(f,;[a,b]) = \cup_k(\alpha'_k, \beta'_k)$, con la stima rovesciata $f(\alpha'_k) \geq f(\beta'_k)$ per ogni k.

Di fatto, anche se non ci servira', vale anche $f(\alpha_k) = f(\beta_k)$ a meno che non sia $\alpha_k = a$ oppure $\beta_k = b$.

Dimostrazione. Svolta in classe. □

Teorema 7.6. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e' continua e monotona, allora esiste $f'(x)$ finita quasi dappertutto.*

Il teorema vale per funzioni monotone qualsiasi, non necessariamente continue.
Per dimostrare il teorema definiamo i numeri derivati di una $f \in C([a,b])$, in un punto $x \in (a,b)$

$$\Lambda^{\pm}(x) = \limsup_{\xi \to x\pm} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \quad \text{e} \quad \lambda^{\pm}(x) = \liminf_{\xi \to x\pm} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}.$$

Esiste $f'(x)$ se e solo se tutti i quattro numeri coincidono.

[22] F. Riesz, B. Nagy, Functional analysis (Dover 1990)
[23] Kolmogorov, Fomin, Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis

Dimostrazione. Supponiamo f continua e crescente su $[a,b]$.

Passo 1. Proviamo che $\Lambda^+(x) < \infty$ q.d. Sia $n \in \mathbb{N}$ e consideriamo $A_n := \{x : \Lambda^+(x) > n\}$. Poiché $A_n \supseteq \{x : \Lambda^+(x) = +\infty\}$ er ogni n, basta provare che $\lim_n \mu^*(A_n) = 0$.

Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $x \in A_n$. Allora esiste $\xi > x$ tale che $\dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} > n$. Dunque $x \in R(f - nI, [a,b])$, dove I è la funzione identità. Ma per il Teorema di RIesz, vale la scrittura $R(f - nI, [a,b]) =: \cup_k (\alpha_k, \beta_k)$ dove i punti soddisfano la la disuguaglianza $f(\alpha_k) - n\alpha_k \le f(\beta_k) - n\beta_k$ per ogni k, che garantisce che $\beta_k - \alpha_k \le \frac{1}{n}(f(\beta_k) - f(\alpha_k))$. Quindi,

$$\mu^*(A_n) \le \mu\Big(\bigcup_k (\alpha_k, \beta_k)\Big) \le \frac{1}{n}(f(b) - f(a)) \to 0$$

per $n \to \infty$. Poiché per ogni n vale $A_n \supseteq \{x : \Lambda^+(x) = +\infty\}$, il PAsso 1 è concluso grazie alla monotonia della misura esterna.

Passo 2. Proviamo che $\Lambda^+(x) \le \lambda^-(x)$ per quasi ogni x. Con un ragionamento analogo (omesso) si prova che $\Lambda^- \le \lambda^+$. Osserviamo che vale l'unione insiemistica seguente:

$$\{x : \Lambda^+(x) > \lambda^-(x)\} = \bigcup_{\substack{0<p<q \\ p,q \in \mathbb{Q}}} \{x : \Lambda^+(x) > q > p > \lambda^-(x)\} =: \bigcup_{\substack{0<p<q \\ p,q \in \mathbb{Q}}} E_{pq}$$

Proviamo che vale $\mu^*(E_{pq}) = 0$ per ogni $0 \le p < q$.

Sia $x \in E_{pq}$. In particolare $x \in \{\lambda^- < p\}$ e quindi esiste almeno un $\xi \in (a, x)$ per cui $\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} < p$. Riscrivendo, troviamo $f(\xi) - f(x) > p(\xi - x)$. Quindi $x \in L(f - pI; [a,b])$. Per il Lemma di Riesz, si scrive $L(f - pI; [a,b]) = \cup_n (\alpha_n, \beta_n)$ e vale la stima

$$f(\alpha_n) - p\alpha_n \ge f(\beta_n) - p\beta_n \quad \forall\, n \qquad \Rightarrow f(\beta_n) - f(\alpha_n) \le p(\beta_n - \alpha_n) \quad \forall\, n. \tag{7.7}$$

SIa ancora $x \in E_{pq}$. fissiamo l'unico n per il quale x giace in (α_n, β_n). Dunque $x \in \{\Lambda^+ > q\} \cap (\alpha_n, \beta_n)$. Ci sarà un punto $\xi \in (x, \mu_n)$ tale che $\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi - x} > q$. QUesto implica che $f(\xi) - q\xi > f(x) - qx$. Quindi $x \in R(f - qI; [\alpha_n, \beta_n]) = \cup_k (\alpha_{nk}, \beta_{nk})$. Vale anche la formula del Lemma di Riesz

$$f(\alpha_{nk}) - q\alpha_{nk} \le f(\beta_{nk}) - q\beta_{nk} \quad \forall\, k \qquad \Rightarrow (\beta_{nk} - \alpha_{nk}) \le \frac{1}{q}(f(\beta_{nk}) - f(\alpha_{nk}))$$

Ma allora, osservando che $E_{pq} \subset \cup_n R(f - qI, [\alpha_n, \beta_n])) = \cup_n \cup_k (\alpha_{nk}, \beta_{nk})$, sarà

$$\begin{aligned}\mu^*(E_{pq}) &\le \sum_n \sum_k (\beta_{nk} - \alpha_{nk}) \le \sum_n \sum_k \frac{1}{q}(f(\beta_{nk}) - f(\alpha_{nk})) \le \sum_n \frac{1}{q}(f(\beta_n) - f(\alpha_n)) \\ &\le \text{per (7.7))} \le \sum_n \frac{p}{q}(\beta_n - \alpha_n) \le \frac{p}{q}(b - a).\end{aligned}$$

Per concludere, ripetiamo tutto il ragionamento per gli stessi p, q sostituendo l'intervallo ambiente $[a,b]$ con un qualsiasi $[a', b'] \subset [a,b]$, si ottiene la stima

$$\mu^*(E_{pq} \cap [a', b']) \le \frac{p}{q}\mu([a'.b'])$$

Dunque valgono le ipotesi del Lemma 7.3 e pertanto $\mu(E_{pq}) = 0$. $\square$

Il teorema appena dimostrato assicura che, data $f \in L^1(a,b)$, la funzione integrale di f e' derivabile quasi dappertutto. Infatti,

$$\Phi(x) := \int_a^x f d\mu = \int_a^x f_+ d\mu - \int_a^x f_- d\mu$$

dove f_+, f_- sono nonnegative e in L^1. Dunque Φ e' la differenza di due funzioni monotone e pertanto e' differenziabile quasi dappertutto.

Inoltre vale la seguente generalizzazione del Teorema fondamentale del calcolo

Teorema 7.8. *Sia $f \in L^1(a,b)$. Allora per quasi ogni $x \in (a,b)$ vale*

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f = f(x) \tag{7.9}$$

Dimostrazione (non svolta in classe). Chiamiamo $\Phi(x) = \int_a^x f d\mu$. Φ e' la differenza di due funzioni monotone. Dunque e' derivabile quasi dappertutto. Dimostriamo che $\Phi'(x) \le f(x)$ quasi ovunque. La disuguaglianza opposta si prova usando $-f$. Basta mostrare che l'insieme misurabile

$$E_{p,q} = \{x : \Phi'(x) > q > p > f(x)\}$$

ha misura nulla per ogni $p, q \in \mathbb{Q}$, con $-\infty < p < q < +\infty$.

Fissiamo $p < q$ numeri qualsiasi. Faremo vedere che si possono trovare insiemi aperti di misura arbitrariamente piccola che contengono E_{pq}.

Sia $\varepsilon > 0$. Per la assoluta continuita', esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $A \subset (a,b)$ e' misurabile, allora vale l'implicazione $\mu(A) < \delta_\varepsilon \Rightarrow \int_A |f| d\mu < \varepsilon$. Si puo' tranquillamente assumere che sia $\delta_\varepsilon < \varepsilon$.

Per la misurabilita' di E_{pq} e per la regolarita' esterna esiste $\Omega \supseteq E_{pq}$, $\Omega \subseteq (a,b)$ tale che $\mu(\Omega \setminus E_{pq}) < \delta_\varepsilon$. Scriviamo $\Omega = \cup_n (\lambda_n, \mu_n)$ con unione disgiunta e al piu' numerabile. Sia ora $x \in E_{pq}$ e sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \in (\lambda_n, \mu_n)$. Di certo esiste $\xi \in (x, \mu_n)$ tale che $\frac{\Phi(\xi)-\Phi(x)}{\xi - x} > q$. Dunque $x \in R(\Phi - qI, [\lambda_n, \mu_n])$. Facendo riferimento all'intervallo $[\lambda_n, \mu_n]$, il Lemma di Riesz afferma che $R_n := R(\Phi - qI, [\lambda_n, \mu_n])$ e' aperto e ha la forma

$$R_n = \cup_k (\alpha_{nk}, \beta_{nk}) \subset (\lambda_n \mu_n),$$

con unione disgiunta, al piu' numerabile e con $(\alpha_{nk}, \beta_{nk}) \subset (\lambda_n, \mu_n)$ per ogni k. Inoltre vale la disuguaglianza $\Phi(\alpha_{nk}) - q\alpha_{nk} \le \Phi(\beta_{nk}) - q\beta_{nk}$ per ogni k. In altri termini

$$\int_{\alpha_{nk}}^{\beta_{nk}} f d\mu > q(\beta_{nk} - \alpha_{nk}) \quad \forall\, k.$$

Siccome gli intervalli sono disgiunti, sommando su k e poi su n troviamo dapprima $\int_{R_n} f d\mu > q\mu(R_n)$ per ogni n; poi

$$q\mu(R) < \int_R f d\mu \tag{7.10}$$

dove $R := \cup R_n$ e' aperto. Osserviamo le inclusioni $E_{pq} \subset R \subset \Omega$ e ricordiamo che $\mu(\Omega \setminus E_{pq}) < \delta_\varepsilon$.

Ora cerchiamo una stima da sopra per proseguire la (7.10) Ricordiamo che in E_{pq} vale anche $f \leq p$. Dunque

$$\begin{aligned}\int_R f = \int_{E_{pq}} f + \int_{R\setminus E_{pq}} f &\leq p\mu(E_{pq}) + \int_{\Omega\setminus E_{pq}} |f| \\ &\leq p\mu(E_{pq}) + \varepsilon = p(\mu(R) - \mu(R \setminus E_{pq})) + \varepsilon \\ &\leq p\mu(R) + |p|\mu(\Omega \setminus E_{pq}) + \varepsilon \\ &= p\mu(R) + |p|\delta_\varepsilon + \varepsilon \\ &\leq p\mu(R) + (|p|+1)\varepsilon,\end{aligned} \tag{7.11}$$

perché abbiamo scelto $\delta_\varepsilon \leq \varepsilon$.

In definitiva, unendo (7.10) e (7.11), si scopre che $E_{pq} \subset R$, dove R e' aperto e soddisfa

$$\mu(R) \leq \frac{(|p|+1)}{q-p}\varepsilon$$

e la dimostrazione e' terminata, perché p, q sono fissati e ε è piccolo a piacere. □

Il teorema, con dimostrazione molto diversa, vale anche in $\mathbb{R}^n$ e afferma che se $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ allora per quasi ogni x vale

$$\lim_{r\to 0+} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(x)dx = f(y).$$

Ci domandiamo ora per quali funzioni valga l'uguaglianza

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

Vale quanto segue

Teorema 7.12. *Se f è monotona crescente su $[a,b]$ e continua, allora $f' \in L^1$ e vale*

$$\int_a^b f'(x)dx \leq f(b) - f(a) \tag{7.13}$$

L'ipotesi di continuità non è strettamente necessaria. Vale un risultato analogo per f decrescente.

Dimostrazione. Supponiamo f crescente e continua e la prolunghiamo in modo costante fuori da $[a,b]$, in particolare $f(x) = f(b)$ per $x > b$. Si vede subito che, per ogni $h > 0$,

$$\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx = \int_b^{b+h} \frac{f(x)}{h}dx - \int_a^{a+h} \frac{f(x)}{x}dx \leq f(b) - f(a),$$

perché f è crescente e costante a destra di b. Dunque

$$f(b) - f(a) \geq \liminf_{h\to 0+} \int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx \geq \int_a^b \liminf_{h\to 0+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}dx = \int_a^b f'(x)dx$$

dove abbiamo usato il Lemma di Fatou (osserviamo che $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ perche' f e' crescente). □

La disuguaglianza puo' essere stretta. Un esempio e' la funzione di Cantor (discusso in classe). La classe delle funzioni in cui vale (7.13) richiede la nozione di assoluta continuità.

Definizione 7.14. *f e' assolutamente continua su $[a, b]$ se per ogni ε esiste δ tale che qualsiasi famiglia finita disgiunta $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_p, \beta_p)$ di sottointervalli di (a, b) soddisfa:*

$$\sum_{k=1}^{p}(\beta_k - \alpha_k) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{p}|f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \varepsilon$$

Osserviamo che
(1) se f e' Lipschitziana su $[a, b]$ allora e' anche assolutamente continua
(2) se f e' assolutamente continua allora e' uniformemente continua (prendere $p = 1$)
Nessuna delle due implicazioni si puo' rovesciare. In particolare, la funzione di Cantor e' uniformemente continua, ma non assolutamente continua.

Diamo un enunciato sulla validita' del Teorema fondamentale del calcolo, rimandando a ulteriori letture per enunciati piu' completi

Teorema 7.15. *Se f e' assolutamente continua su $[a, b]$, allora e' differenza di due funzioni monotone. Dunque e' derivabile quasi dappertutto. Inoltre $f' \in L^1(a, b)$ e vale l'uguaglianza*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx.$$