Appunti di Analisi geometrica

Laurea magistrale in matematica

28 aprile 2017

Avvertenza: chi dovesse trovare errori o avere commenti, gentilmente mandi un email a `daniele.morbidelli@unibo.it`. [1]

Indice

1. Teoremi di regolarità per equazioni ordinarie e flussi di campi vettoriali

1.1. Preliminari

Ricordiamo il seguente teorema. (1)

Teorema 1.1. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo aperto e sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto. Indichiamo con $(t, x) \in I \times \Omega$ le variabili. Supponiamo che $f : I \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ sia continua e localmente*

[1] Si ringraziano gli studenti dell'anno 15/16 per le segnalazioni di vari errori

lipschitziana in x:[2] *Allora per ogni* $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$ *il problema*

$$\dot{x} = f(t,x), \quad \text{con } x(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

ammette un'unica soluzione nel senso seguente: esiste un intervallo massimale $]\alpha, \beta[\ \subset I$ *e un'unica soluzione* $\psi \in C^1(]\alpha, \beta[, \Omega)$ *di* (1.2) *definita in tale intervallo aperto.*

Ricordiamo dalla teoria del prolungamento delle soluzioni che l'intervallo massimale $]\alpha, \beta[\ \subseteq I$ su cui è definita la soluzione ψ di (1.2) ha la seguente proprietà (usiamo le notazioni del teorema precedente):[3]

$$\text{se } \beta < \sup I, \text{ allora per ogni compatto } K \subset\subset \Omega \text{ esiste } t \in \,]t_0, \beta[\text{ tale che } \psi(t) \notin K. \tag{1.3}$$

Una proprietà analoga vale se $\inf I < \alpha$.

Osservazione 1.4 (Sistemi autonomi). *Se* $f(t,x) = a(x)$ *il sistema si dice autonomo e possiamo sempre ricondurci al caso* $t_0 = 0$.

Nel caso autonomo, la locale lipschitzianità di una funzione $f(t,x) = a(x)$ su un aperto Ω si esprime cosí: per ogni compatto $K \subset\subset \Omega$ vale

$$\mathrm{Lip}(a;K) := \sup_{x \neq y \in K} \frac{|a(x) - a(y)|}{|x-y|} < \infty.$$

Il numero $\mathrm{Lip}(a;K)$ si chiama *costante di Lipschitz di a su K*.

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e a localmente Lipschitziana su Ω (scriviamo $a \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^n)$) consideriamo il problema di Cauchy

$$\dot{y} = a(y) \quad \text{con} \quad y(0) = x$$

dove $x \in \Omega$ è un dato assegnato. Per ogni $x \in \Omega$ indichiamo con una delle notazioni

$$]\alpha(x), \beta(x)[\ = \mathcal{D}(a,x) \supset \{0\}$$

l'intervallo aperto massimale e, a seconda delle circostanze e dell'opportunità, con una delle scritture

$$t \mapsto \psi(t) = \psi_t^a(x) = \psi_t(x) = \psi(t,x) \tag{1.5}$$

la corrispondente soluzione massimale.

[2] Precisamente, per ogni $[a,b] \subset I$ e per ogni compatto $K \subset\subset \Omega$, esista una costante L tale che

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq L|x-y| \quad \text{per ogni } t \in [a,b] \text{ e } x, y \in K.$$

[3] Per una discussione completa sull'argomento, si veda ad esempio il libro: E. Lanconelli, Lezioni di Analisi Matrematica 2, Prima parte, Proposizione 3.1, p. 295.

1.2. Dipendenza continua dai dati della soluzione di un equazione ordinaria

Ora proviamo che, sotto ipotesi naturali, la soluzione $\psi(t,x)$ del problema di Cauchy autonomo

$$\dot{y} = a(y) \qquad y(0) = x$$

dipende con continuità (anzi in modo lipschitziano) dal dato iniziale $x \in \Omega$. [4]

Lemma 1.6 (Disuguaglianza di Gronwall)**.** *Se $u \in C([0,T])$ soddisfa*

$$0 \le u(t) \le C + K \int_0^t u(s)ds \quad \textit{per ogni } t \in [0,T],$$

per qualche $C, K \ge 0$, allora

$$u(t) \le Ce^{Kt} \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Dimostrazione. Svolta in classe. □

Proposizione 1.7. *[Dipendenza continua dal dato – versione debole] Sia $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$ localmente lipschitziana, e sia dato un aperto $O \subset\subset \Omega$.* [5] *Presi $x, y \in O$ e $T > 0$ tali che*

$$\psi_t(x), \psi_t(y) \in O \quad \textit{per ogni } t \in [0,T], \tag{1.8}$$

allora indicata con $L = \mathrm{Lip}(a; O) < \infty$, vale

$$|\psi_t(x) - \psi_t(y)| \le |x-y|e^{Lt} \qquad \textit{per ogni } t \in [0,T].$$

Dimostrazione. Svolta in classe usando la rappresentazione integrale delle soluzioni e la disuguaglianza di Gronwall. □

Osserviamo che la dipendenza non è solo continua, ma di fatto lipschitziana localmente. Nel prossimo teorema rimuoviamo le ipotesi restrittive dell'enunciato precedente.

Teorema 1.9 (Dipendenza continua dal dato)**.** *Sia $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$ localmente lipschitziana, sia $x \in \Omega$ e supponiamo che $\psi_t(x) \in \Omega$ definita su tutto l'intervallo chiuso $[0,T]$. Allora esiste $U \subset \Omega$ intorno di x tale che $t \mapsto \psi_t(y)$ è definita su tutto $[0,T]$ per ogni $y \in U$. Inoltre esiste $L > 0$ tale che valga la stima*

$$|\psi_t(x) - \psi_t(y)| \le |x-y|e^{Lt} \quad \textit{per ogni } y \in U \textit{ e } t \in [0,T].$$

Dimostrazione. Indichiamo con $\Gamma := \{\psi_t(x) : t \in [0,T]\}$ il percorso della curva integrale. Γ è compatto. Quindi esiste $\varepsilon > 0$ tale che, posto

$$O := \{y \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(y, \Gamma) < \varepsilon\},$$

[4] Seguiamo la presentazione del libro M. Hirsch, S. Smale, R. Devaney, Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos. Second edition. Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 60. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2004. xiv+417 pp. ISBN: 0-12-349703-5.

[5] Usiamo la notazione $A \subset\subset \Omega$ quando $\overline{A}$ è compatto contenuto in Ω. In particolare la distanza tra $\overline{A}$ e Ω^c è strettamente positiva.

l'insieme O ha chiusura compatta contenuta in Ω. Quindi

$$\mathrm{Lip}(a; O) < \infty$$

Fissiamo ora un numero $\delta > 0$ piccolo a sufficienza affinché $\delta e^{LT} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. e verifichiamo la seguente affermazione: se $|y - x| < \delta$, allora $t \mapsto \psi_t(y)$ è definita su un intervallo massimale $]\alpha(y), \beta(y)[\supset [0, T]$.

La cosa da provare è che $\beta = \beta(y) > T$. Supponiamo per assurdo che $\beta \leq T$ per qualche $y \in B(x, \delta)$. Allora per la proprietà (1.3), esisterebbe $s < \beta$ tale che

$$\psi_t(y) \in O \quad \forall t \in [0, s[\quad \text{e} \quad \psi_s(y) \notin O.$$

Allora risulterebbe per definizione di O,

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leq \mathrm{dist}(\psi_s(y); \Gamma) = \inf\{|\psi_s(y) - \psi_t(x)| : t \in [0, T]\} \\ &\leq |\psi_s(y) - \psi_s(x)|.\end{aligned}$$

D'altra parte, per ogni $t < s$ possiamo applicare la Proposizione 1.7 e troviamo

$$|\psi_t(y) - \psi_t(x)| \leq |y - x| e^{Lt} \leq \delta e^{LT} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Andando al limite per $t \to s-$ otteniamo una contraddizione. Quindi $\beta > T$. Di fatto abbiamo provato che se vale $|y - x| < \delta$, allora $\psi_t(y) \in O$ per ogni $t \in [0, T]$ e che inoltre vale

$$|\psi_t(y) - \psi_t(x)| \leq |y - x| e^{Lt} \quad \text{per } t \in [0, T],$$

che è la stima desiderata. □

Osservazione 1.10. *L'argomento della dimostrazione appena conclusa prova il seguente fatto riguardante le curve integrali di un campo $a \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$: se $x \in \Omega$ e se $\psi(t, x)$ è definita su tutto $[0, T]$ (cioè $]\alpha(x), \beta(x)[\supset [0, T]$), allora esiste $\delta > 0$ e un intorno aperto O della curva $\Gamma = \{\psi(t, x) : t \in [0, T]\}$ che ha chiusura compatta in Ω e tale che se $y \in B(x, \delta)$, allora vale quanto segue:* (3)

(i) $[0, T] \subset]\alpha(y), \beta(y)[$ e in piú la curva $\{\psi(t, y) : t \in [0, T]\}$ è contenuta per intero nell'intorno O;

(ii) vale la stima di lipschitzianità $|\psi_t(y) - \psi_t(x)| \leq |x - y| e^{Lt}$ su $[0, T]$.

Osservazione 1.11. *Come conseguenza del teorema precedente, possiamo affermare che se $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è localmente lipschitziano, allora l'insieme massimale $G(a) \subset \mathbb{R} \times \Omega$ su cui è definita la mappa $(t, x) \mapsto \psi(t, x)$,*

$$G(a) := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega \mid t \in \mathcal{D}(a, x)\}$$

è aperto. Piú precisamente, la funzione $x \mapsto \beta(x)$ è inferiormente semicontinua [6]e la funzione $x \mapsto \alpha(x)$ è superiormente semicontinua. Non si può affermanre però che sono continue (esempio: $a(x_1, x_2) = (1 + x_1^2, 0)$ su $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$. Scrivere $\psi_t(a, (0, x_2))$...)

Notiamo anche che, per $t \in \mathbb{R}$ fissato è definito l'insieme aperto (eventualmente vuoto)

$$\Omega_t^a = \{x \in \Omega : (t, x) \in G\} = \Omega_t^a = \{x \in \Omega : t \in]\alpha(x), \beta(x)[\} \subset \Omega$$

che costituisce il dominio naturale della mappa $\psi_t : \Omega_t \mapsto \psi_t(\Omega_t)$.

[6] Se $\beta(x) > T$ allora esiste $\delta > 0$ tale che $\beta(y) > T$ non appena $|y - x| < \delta$.

Osserviamo che se $a \in C^1(\Omega)$ è di classe C^1 su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, data una palla $B \subset\subset \Omega$, allora $\mathrm{Lip}(a; B) \leq \sup_B |da| < \infty$.

Lemma 1.12. *Se $a \in C^1(\Omega)$, allora per ogni compatto $K \subset \Omega$ vale $\mathrm{Lip}(a; K) < \infty$.*

Dimostrazione. SI vede per assurdo, supponendo che esistano $x_n, y_n \in K$ tali che risulti $|a(x_n) - a(y_n)| > n|x_n - y_n|$ per ogni n ed estraendo sottosuccessioni convergenti a $x, y \in K$. Ricordare che $\sup_K |a| = \max_K |a| < \infty$. □

Non è vero che se $a \in C^1(\Omega)$, allora a è Lipschitziana su Ω (esempio $\sqrt{x}$ su $\Omega = (0, 1)$). Non è nemmeno vero che se $a \in C^1(\Omega)$ e $\sup_\Omega |da(x)| < \infty$, allora a è Lipschitziana su Ω. Perché?

Esercizio 1.13. *Se $A \subset \mathbb{R}^n$, allora $x \mapsto \mathrm{dist}(x, A)$ è lipschitziana con costante di Lipschitz globale $L = 1$.*

1.3. Dipendenza C^1

Iniziamo richiamando il seguente fatto:

Proposizione 1.14. *Sia $A \in C(I, R^{n\times n})$ una funzione continua sull'intervallo aperto I, a valori nelle matrici $n \times n$ ad elementi reali. Allora il sistema lineare*

$$\dot{x} = A(t)x \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

ammette un'unica soluzione $x : I \to \mathbb{R}^n$ definita globalmente in tutto l'intervallo I. La soluzione dipende linearmente da $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. L'esistenza locale e l'unicità seguono dalla teoria dell'Analisi 2. Proviamo l'esistenza globale. Supponiamo che $]\alpha, \beta[\subseteq I =]\inf I, \sup I[$ sia l'intervallo massimale e supponiamo ad esempio $\beta < \sup I$. Allora per ogni $t < \beta$ risulta

$$|x(t)| = \Big| x_0 + \int_0^t A(s)x(s)ds \Big| \leq |x_0| + \max_{[0,\beta]} |A| \int_0^t |x(s)|ds.$$

Allora usando la disuguaglianza di Gronwall e scrivendo $M = \max_{[0,\beta]} |A|$ si trova

$$|x(t)| \leq |x_0| e^{Mt} \leq |x_0| e^{M\beta} \quad \text{per ogni } t \in [0, \beta[.$$

Dunque si contraddice la proprietà (1.3) dell'intervallo massimale.[7] □

Definizione 1.16 (Equazione variazionale)**.** *Se $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$ è di classe C^1 e se $\psi_t(x) = \psi(t, x)$ è una soluzione definita sull'intervallo $]\alpha, \beta[$, allora il sistema lineare nell'incognita $u = u(t) \in \mathbb{R}^n$*

$$u' = da(\psi_t(x))u$$

si chiama equazione variazionale lungo la soluzione ψ.

[7]Con un ragionamento analogo si può provare il seguente teorema di esistenza per tempi grandi:

Teorema 1.15. *Se $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è di classe $C^1_x \cap C^0_t$ e soddisfa per qualche C_1, C_2 la condizione di crescita*

$$|f(t, x)| \leq C_1 + C_2|x|, \quad \forall\, (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n,$$

allora la soluzione di $\dot{x} = f(t, x)$, con dato $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ è definita su tutto I.

L'equazione variazionale è lineare, e, per le proprietà dei sistemi lineari, il problema di Cauchy

$$u' = da(\psi_t(x))u \quad u(0) = \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.17}$$

ha un'unica soluziome $u_x(t,\xi)$ definita globalmente su $t \in]\alpha, \beta[$. Osserviamo che

$$\xi \mapsto u_x(t,\xi) \quad \text{è lineare.}$$

Se supponiamo che $(t,x) \mapsto \psi_t(x) = \psi(t,x)$ sia di classe C^2 su qualche aperto, si vede che la derivata $t \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j}\psi(t,x)$ soddisfa L'equazione variazionale (1.17) con dato $\xi = e_j$.

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j}\psi(t,x) = da(\psi(t,x))\frac{\partial}{\partial x_j}\psi(t,x).$$

Teorema 1.18. *SIa $a : \Omega \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 e sia $x \in \Omega$. Sia inoltre $[0,T] \subset \mathcal{D}(a,x)$. Allora vale*

$$\psi_t(x+\xi) - \psi_t(x) - u_x(t,\xi) = o(|\xi|), \tag{1.19}$$

uniformemente in $t \in [0,T]$. Inoltre, la funzione $x \mapsto u_x(t,\xi)$ è continua nella variabile x.

Siccome $\xi \mapsto u_x(t,\xi)$ è lineare, questo significa che il flusso $x \mapsto \psi_t(x)$ è differenziabile rispetto ad x:

$$d\psi_t(x)(\xi) = u_x(t,\xi) \quad \text{per ogni } (t,x) \in G \text{ e } \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Inoltre, la matrice jacobiana $x \mapsto d\psi_t(x) = [u_x(t,e_1), \dots, u_x(t,e_n)]$ è continua in x, In altre parole, $(t,x) \mapsto \psi(t,x)$ è di classe C^1 sull'insieme $G(a)$. Il Teorema 1.18 afferma anche che i passaggi

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_j}\psi(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial t}\psi(t,x) = da(\psi(t,x))\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(t,x)$$

sono corretti.

Prima della dimostrazione ricordiamo che se $a \in C^1(\Omega)$ e se $O \subset\subset \Omega$ ha chiusura compatta, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste δ_ε tale che per ogni $z, w \in O$ con $|z-w| < \delta_e$, scritto $a(z) - a(w) = da(w)(z-w) + R_w(z-w)$, vale la stima uniforme

$$|R_w(z-w)| < \varepsilon|z-w|. \tag{1.20}$$

Dimostrazione.

Passo 1 Proviamo la differenziabilità e la formula $d\psi_t(x)(\xi) = u_x(t,\xi)$.

Siano $x \in \Omega$ e $T < \beta(x)$. Fissiamo i corrispondenti O, δ, L come nell'Osservazione 1.10. Preso $|\xi| < \delta$, in particolare $\psi_t(x+\xi)$ è definita per ogni $t \in [0,T]$ e valgono le tre equazioni integrali

$$\psi_t(x+\xi) = x + \xi + \int_0^t a(\psi_s(x+\xi))ds$$

$$\psi_t(x) = x + \int_0^t a(\psi_s(x)ds$$

$$u_x(t,\xi) = \xi + \int_0^t da(\psi_s(x))u_x(s,\xi)ds$$

Sottraendo otteniamo per $t \in [0, T]$,

$$
\begin{aligned}
&|\psi_t(x+\xi) - \psi_t(x) - u_x(t,\xi)| \\
&\qquad = \Big|\int_0^t \Big\{ a(\psi_s(x+\xi)) - a(\psi_s(x)) - da(\psi_s(x))u_x(s,\xi)\Big\} ds\Big| \\
&\qquad = \Big|\int_0^t \Big\{ da(\psi_s(x))[(\psi_s(x+\xi)) - \psi_s(x)] + R_{\psi_s(x)}(\psi_s(x+\xi) - \psi_s(x)) - \\
&\qquad\qquad - da(\psi_s(x))u_x(s,\xi)\Big\} ds\Big|
\end{aligned}
$$

Poniamo anche $M = \sup_O |da| \geq \sup_{t\in[0,T]} |da(\psi_t(x))|$.. Inoltre vale la stima

$$|\psi_t(x+\xi) - \psi_t(x)| \leq |\xi| e^{LT}.$$

Se scegliamo $|\xi|e^{LT} < \delta_\varepsilon$, in modo che valga (1.20), troviamo:

$$\Big|R_{\psi_s(x)}(\psi_s(x+\xi) - \psi_s(x))\Big| \leq \varepsilon|\psi_s(x+\xi) - \psi_s(x)| \leq \varepsilon|\xi|e^{LT} \quad \forall s \in [0,T].$$

In definitiva:

$$
\begin{aligned}
0 &\leq |\psi_t(x+\xi) - \psi_t(x) - u_x(t,\xi)| \\
&\leq M\int_0^t |\psi_s(x+\xi) - \psi_s(x) - u_x(s,\xi)| ds + e^{LT}\varepsilon|\xi|
\end{aligned}
$$

e la tesi segue dalla disuguaglianza di Gronwall: infatti, ε è arbitrario e le costanti L, T dipendono dalla curva fissata $[0,T] \ni t \mapsto \psi_t(x)$.

Passo 2. Proviamo la continuità di $x \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j}\psi(t,x)$.

Siano $x \in \Omega$ e $T < \beta(x)$. Fissiamo i corrispondenti O, δ, L come nell'Osservazione 1.10. Intanto, poiché da è uniformemente continuo su O, preso ε esiste $\sigma_\varepsilon > 0$ tale che

$$|da(z) - da(w)| \leq \varepsilon \quad \text{se } z, w \in O \text{ e } |z-w| < \sigma_\varepsilon. \tag{1.21}$$

Inoltre, se indichiamo con $M = \sup_O |da|$, risulta

$$|d\psi_t(x)| \leq |I_n| + \Big|\int_0^t da(\psi_s(x))d\psi_s(x)ds\Big| \leq 1 + M\int_0^t |d\psi_s(x)|ds \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Quindi vale la stima $|d\psi_t(x)| \leq e^{Mt}$ per $t \in [0,T]$.

Ora, preso $y \in B(x,\delta)$, sarà

$$
\begin{aligned}
|d\psi_t(y) - d\psi_t(x)| &= \Big|\int_0^t \Big(da(\psi_s(x))d\psi_s(x) - da(\psi_s(y))d\psi_s(y)\Big)ds\Big| \\
&\leq \int_0^t |da(\psi_s(x) - da(\psi_s(y))||d\psi_s(x)|ds \\
&\quad + \int_0^t |da(\psi_s(y))|\,|d\psi_s(x) - d\psi_s(y)| \quad \forall\, t \in [0,T].
\end{aligned}
$$

Se ora rimpiccioliamo δ in modo che valga anche $\delta e^{LT} < \sigma_\varepsilon$ vale

$$|\psi_s(y) - \psi_s(x)| \leq |x-y|e^{LT} < \sigma_\varepsilon.$$

Quindi $|da(\psi_s(x) - da(\psi_s(y))| < \varepsilon$. Allora

$$|d\psi_t(y) - d\psi_t(x)| \le \varepsilon T e^{MT} + M \int_0^t |d\psi_s(y) - d\psi_s(x)| ds \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Dalla disuguaglianza di Gronwall otteniamo dunque che, se $|y - x| < \delta$, vale

$$|d\psi_t(y) - d\psi_t(x)| \le \varepsilon T e^{MT} e^{Mt} \le \varepsilon T e^{2MT}.$$

La continuità è provata. $\square$

1.4. Caso non autonomo, con parametri e regolarità piú alta

In questo paragrafo presentiamo in modo informale alcune considerazioni sulle equazioni dipendenti da parametri, non autonome e con a piú regolare.

Osservazione 1.22 (dipendenza dal tempo iniziale)**.** *Sia $a \in \mathrm{Lip}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e consideriamo il problema di Cauchy,*

$$y' = a(y) \quad y(t_0) = y_0.$$

Se indichiamo con $\eta(t, t_0, y_0)$ la soluzione massimale su $]\alpha(t_0, y_0), \beta(t_0, y_0)[$, per le proprietà dei sistemi autonomi, vale

$$\eta(t, t_0, y_0) = \psi^a_{t-t_0}(y_0) = \psi^a(t - t_0, y_0).$$

Da questa formula si capisce che $\frac{\partial \eta}{\partial t_0}(t, t_0, y_0) = -a(\eta(t, t_0, y_0))$ è una funzione continua sull'aperto $\{(t, t_0, y_0) : (t - t_0, y_0) \in G(a)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega$ su cui è definita.

Osservazione 1.23 (Caso non autonomo o dipendente da parametri)**.** *In generale, se $f : I \times \Omega \times O \to \mathbb{R}^n$ è una funzione C^1 sull'aperto $I \times \Omega \times O$, dove $t \in I \subset \mathbb{R}$ intervallo aperto, $y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $z \in O \subset \mathbb{R}^p$ aperto in uno spazio di parametri, possiamo considerare il problema di Cauchy*

$$y' = f(t, y, z_0) \qquad y(t_0) = y_0,$$

dove $t_0 \in I$, $y_0 \in \Omega$ e $z_0 \in O$ sono assegnati. Chiamiamo

$$]\alpha(t_0, y_0, z_0), \beta(t_0, y_0, z_0)[\ \ni s \mapsto \eta(s, t_0, y_0, z_0) \tag{1.24}$$

la soluzione massimale. Mostriamo che η è C^1 in tutte le variabili. Per vederlo trasformiamo t, z in variabili spaziali. Poniamo

$$\widehat{f} : I \times \Omega \times O \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p, \quad \widehat{f}(t, y, z) = (1, f(t, y, z), 0)$$

e analizziamo il problema autonomo:

$$\begin{cases} (t, y, z)' = \widehat{f}(t, y, z) := (1, f(t, y, z), 0) \\ (t, y, z)(s_0) = (t_0, y_0, z_0) \end{cases}$$

Questo avrà una soluzione massimale

$$]\widehat{\alpha}(s_0, t_0, y_0, z_0), \widehat{\beta}(s_0, t_0, y_0, z_0)[\ \ni s \mapsto \widehat{\eta}(s, s_0, t_0, y_0, z_0)$$

che dipende in modo almeno C^1 da tutte le variabili s, s_0, t_0, y_0, z_0. Considerando il caso $s_0 = t_0$, vediamo che

$$\widehat{\eta}(s, t_0, t_0, y_0, z_0) = (s, \eta(s, t_0, y_0, z_0), z_0)$$

Con questa uguaglianza si può ricavare la regolarità di η usando quella di $\widehat{\eta}$.

Osservazione 1.25 (Caso piú regolare). *Se a è di classe $C^2(\Omega)$, allora guardiamo la funzione $v_j(t,x) = \partial_{x_j}\psi_t(x)$ che soddisfa in G il problema non autonomo*

$$\dot{v}_i = da(\psi(t,x))v_j \qquad v_j(0) = e_j.$$

Siccome $(t,x) \mapsto da(\psi(t,x))$ è C^1, usando l'osservazione precedente, otteniamo che ogni funzione v_j è di classe C^1. Quindi, visto che $\partial_t\psi = a \circ \psi \in C^1$, risulta $\psi \in C^2(G)$.

1.5. Esercizi per casa

1. Provare a dimostrare la formula classica sul determinante del flusso: data $a \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ e detto $D(t,x) = \det d\psi_t(x)$, verificare che

$$\frac{d}{dt}D(t,x) = D(t,x)\operatorname{div} a(\psi_t(x))$$

dove $\operatorname{div} a(y) := \sum_{j=1}^n \partial_j a^j(y)$ è la divergenza di a. [8]

2. Dimostrare la seguente variante della disuguaglianza di Gronwall: se

$$0 \le f(t) \le at + b\int_0^t f(\tau)d\tau \quad \text{per ogni } t \in [0,T],$$

allora vale

$$f(t) \le a\frac{e^{bt}-1}{b} \quad \text{per ogni } t \in [0,T].$$

Dimostrare poi che se a è un campi C^1 su Ω, allora per ogni compatto $K \subset\subset \Omega$ esistono $\varepsilon, C > 0$ tali che

$$|d\psi_t(x) - I_n| \le C|t| \quad \text{per ogni } x \in K \text{ e } |t| \le \varepsilon,$$

Osserviamo che una conseguenza dell'esercizio 1 è il fatto che la funzione (5)

$$\psi_t : \Omega_t \to \psi_t(\Omega_t)$$

è un diffeomorfismo locale. Questo segue dalla formula esplicita

$$D(t,x) = \exp\Big(\int_0^t \operatorname{div} a(\psi_s(x))ds\Big) \neq 0$$

per ogni x e $t \in \mathcal{D}(a,x)$. Vedremo che ψ_t è anche iniettiva. In particoare, se $A \subset \Omega_t$ e se $\operatorname{div} a = 0$, vale

$$\mu(\psi_t(A)) = \int_A D(t,x)dx = \int_A dx\Big(\exp\Big(\int_0^t \operatorname{div} a(\psi_s(x))ds\Big) = \mu(A).$$

[8] Si può partire dalla formula del determinante con le permutazioni.

1.6. Notazioni per i campi vettoriali

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e sia $a \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Introduciamo l'operatore del primo ordine: $X = a \cdot \nabla$ definito per $f \in C^\infty(\Omega)$ come segue

$$Xf(x) = a(x) \cdot \nabla f(x) \equiv \langle a(x), \nabla f(x) \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) \partial_k f(x),$$

per ogni $x \in \Omega$. Chiameremo gli operatori del primo ordine *campi vettoriali*.

Osserviamo informalmente le seguenti cose.

- Dato X, campo C^∞ su Ω, se $c : \Omega \to \mathbb{R}$ è una funzione costante, vale $Xc = 0$. Inoltre è soddisfatta la regola di Leibnitz
$$X(fg)(x) = Xf(x)g(x) + f(x)Xg(x), \quad \forall x \in \Omega, \tag{1.26}$$
per ogni funzione $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$. Queste proprietà si esprimono dicendo che $X : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ è una derivazione.
- Se fissiamo un punto $x \in \Omega$, allora poniamo
$$X_x f := Xf(x),$$
per ogni $f \in C^\infty$ in qualche intorno di x. Allora X_x soddisfa la proprietà
$$X_x(fg) = f(x)X_x g + g(x)X_x f.$$
In tal caso i dice che X_x è una derivazione in x. Le derivazioni in x costituiscono un possibile modo di vedere la nozione di vettore tangente in x, anche nel contesto delle varietà.

Indentificheremo spesso il campo vettoriale $X = a \cdot \nabla$ con la funzione vettoriale a. Scriveremo quindi $\psi_t^X(x)$ oppure ψ_t^a indifferentemente.

Esempio 1.27. *Scrittura delle curve integrali di $X = \partial_{x_1} + x_2 \partial_{x_3}$ e di $Y = \partial_{x_1} + x_1 \partial_{x_2}$.*

Ricordiamo ancora che la funzione $(t, x) \mapsto \psi(t, x)$ è definita sull'insieme aperto

$$G := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega : t \in \mathcal{D}(X, x)\} = \bigcup_{x \in \Omega} \mathcal{D}(X, x) \times \{x\} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \{t\} \times \Omega_t^X.$$

Se per qualche $t \in \mathbb{R}$ l'aperto Ω_t^X è non vuoto, allora $\psi_t : \Omega_t^X \to \psi_t(\Omega_t^X)$ si chiama flusso del campo X.

Proposizione 1.28. *Se $X = a \cdot \nabla$ è un campo C^1 su Ω, allora:*

(1) se $x \in \Omega$, t e $t + s \in \mathcal{D}(X, x)$, allora $s \in \mathcal{D}(X, \psi_t(x))$ e vale
$$\psi_{t+s}^X(x) = \psi_t^X \psi_s^X(x);$$

(2) in particolare, se $x \in \Omega$,
$$\psi_{-t}^X \psi_t^X(x) = x \quad \text{per ogni } t \in \mathcal{D}(X, x);$$

(3) Infine, se λX indica il campo $\lambda a(x) \cdot \nabla_x$, si ha
$$\psi_{\lambda t}^X x = \psi_t^{\lambda X} x \quad \text{per ogni } x \in \Omega \text{ e } \lambda t \in \mathcal{D}(x, X).$$

Dimostrazione. Segue dall'unicità. Discussa in classe. □

La proprietà (3) rende non equivoca la notazione esponenziale:

$$e^{tX}x := \psi_t^X(x),$$

in cui tX sono aggregati in forma moltiplicativa. A proposito di tale notazione, osserviamo che se X è un campo C^∞ su Ω e se f è una funzione C^∞ su Ω, allora vale la formula comoda

$$\frac{d}{dt}f(e^{tX}x) = Xf(e^{tX}x).$$

per ogni x e per ogni $t \in \mathcal{D}(X,x)$. Si possono fare anche le derivate successive:

$$\frac{d^k}{dt^k}f(e^{tX}x) = X^k f(e^{tX}x),$$

qualora la regolarità di X e f lo permetta.

Proposizione 1.29. *Se $X = a \cdot \nabla$ è un campo C^1 su Ω, allora per ogni $t \in \mathbb{R}$ per cui $\Omega_t^X \neq \varnothing$, la funzione*

$$\psi_t^X : \Omega_t^X \to \psi_t^X(\Omega_t^X) \tag{1.30}$$

è un diffeomorfismo di classe C^1. Inoltre vale $(\psi_t^X)^{-1} = \psi_{-t}^X$

Dimostrazione. La formula sul determinante dice che ψ_t è un diffeomorfismo locale. La proprietà (2) prova l'iniettività globale. □

Se consideriamo due campi C^1 su Ω, $X = a \cdot \nabla$ e $Y = b \cdot \nabla$ possiamo osservare la funzione

$$(t,s,x) \mapsto \psi_s^Y \psi_t^X(x) = e^{sY}e^{tX}x.$$

Utilizzando gli argomenti seguiti nel caso di un solo campo, si può dimostrare che tale funzione è definita su un aperto nella variabili $(s,t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Omega$ ed è di classe C^1 su tale aperto. Osserviamo però che i due flussi in generale non commutano. Utilizzando tale proprietà, se partiamo da $e^{tX}e^{-tX}x = x$ e differenziamo, otteniamo la formula, che ritroveremo piú avanti

$$Xf(e^{tX}x) = X(f \circ e^{tX})(x), \tag{1.31}$$

valida ogni volta che $x \in \Omega$ e $t \in \mathcal{D}(X,x)$. [9]

In generale, prendendo campi $X_1, \dots, X_\nu$ di classe C^1 su Ω, la funzione $(t_1, \dots, t_\nu, x) \mapsto e^{t_1X_1}e^{t_2X_2} \cdots e^{t_\nu X_\nu}x$ è definita e di classe C^1 su un aperto di $\mathbb{R}^\nu \times \Omega$ contenente $\{0\} \times \Omega$.

2. Distanze associate a famiglie di campi vettoriali

2.1. Aspetti generali

Definizione 2.1 (Spazio metrico). *Sia X un insieme. Una funzione $d : X \times X \to \mathbb{R}$ si dice distanza su X se*

[9] Si può esprimere dicendo che $XE_t^X f = E_t^X Xf$, se indichiamo con $E_t^X f(\xi) = f(e^{tX}\xi)$ la traslazione finita lungo le curve integrali di X.

(i) $d(x,y) \geq 0$ *per ogni* $x, y \in X$;
(ii) $d(x,y) = 0$ *se e solo se* $x = y$;
(iii) $d(x,y) = d(y,x)$ *per ogni* $x, y \in X$.
(iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *per ogni* $x, y, z \in X$.
La coppia (X, d) *si chiama spazio metrico.*

Esempio 2.2. *Ecco alcuni esempi:*
(a) $\mathbb{R}^n$ *euclideo,* $d(x,y) = |x - y|$;
(b) $\mathbb{R}^n$ *con la norma* $|x|_p := \left(\sum_j |x_j|^p\right)^{1/p}$. *Qui* $p \in [1, \dots, \infty]$.
(c) $\mathbb{R}^n$ *con la metrica* $d(x,y) = |x - y|^\varepsilon$, *con* $0 < \varepsilon \leq 1$. [10]

Definizione 2.3 (cammino ammissibile e cammino subunitario). *Sia data una famiglia di m campi* $X_1 = a_1 \cdot \nabla, \dots, X_m = a_m \cdot \nabla$ *dove ciascun* X_j *è un campo* C^1 *su* $\mathbb{R}^n$. *Un cammino* γ *si dice* ammissibile *se è Lipschitz esiste una funzione vettoriale* <u>*limitata*</u> $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ *per la quale valga*

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j(t) X_j(\gamma(t)) \quad \textit{per quasi ogni } t \in [0, T].$$

Se vale

$$|\alpha(t)| := \Big\{ \sum_j \alpha_j(t)^2 \Big\}^{1/2} \leq 1 \quad \textit{quasiappertutto},$$

allora diciamo che il cammino è subunitario.

Esercizio 2.4 (Esercizio per casa). *Dato il campo in* $\Omega = \mathbb{R}^1$, $X = (1 + x^2)\partial_x$, *scrivere la funzione* $\psi_t^X(x)$. *Individuare* $\mathcal{D}(X, x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$, *fare un grafico nel piano* (t, x) *dell'insieme G. Descrivere l'insieme* Ω_t *per ogni* $t \in \mathbb{R}$, *e individuare l'insieme* $\psi_{\pi/4}(]0, 1[)$.

Osservazione 2.5. *Ogni cammino ammissibile può essere riparametrizzato linearmente e reso subunitario.* (7)

Esempio 2.6. *Visti i cammini subunitari nei seguenti esempi:*
(1) $\mathbb{R}^n$ *con i campi coordinati* $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$
(2) $\mathbb{R}^n$ *con una metrica Riemanniana g.*
(3) In caso $\mathbb{R}^2$ *con coordinate* (x_1, x_2) *e un solo campo* $X_1 = \partial_{x_1}$

Definizione 2.7 (Distanza di controllo (o di Carnot–Carathéodory)). *Siano dati* $X_1, \dots, X_m$ *campi* C^1 *in* $\mathbb{R}^n$. *Siano* x, y *due punti che possono essere connessi da almeno un cammino subunitario. Allora poniamo*

$$d(x,y) := \inf\{T : \textit{ esiste } \gamma : [0, T] \textit{ subunitaria e con } \gamma(0) = x, \gamma(T) = y.\}$$

La simmetria e la disuguaglianza triangolare sono facili da verificare. Definiamo anche

$$B(x,r) := \{y \in \mathbb{R}^n : d(x,y) < r\} = \{\gamma(T) : \gamma \text{ subunit su } [0,T] \text{ con } \gamma(0) = x \text{ e } T < r\}$$

Qualche volta scriveremo $d_{\rm cc}$ e $B_{\rm cc}$.

[10] Per dimostrare la disuguaglianza triangolare, confrontare le funzioni $f(t) = (1 + t)^\varepsilon$ e $g(t) := 1 + t^\varepsilon$ su $[0, +\infty[$ guardando il valore in 0 e le derivate.

Osservazione 2.8. *Se per una coppia di punti x e y non ci sono curve subunitarie che li connettono (ad esempio ciò avviene nel caso (3) dell'Esempio 2.6), si conviene di porre $d(x,y) = +\infty$.*

Esempio 2.9. *Discussione delle distanze generate tramite i cammini subunitari descritti nell'Esempio 2.6.*

Proposizione 2.10. *Se $X_1, \dots, X_m$ sono campi C^1 in $\mathbb{R}^n$, allora per ogni insieme limitato Ω, esiste C tale che*

$$|x-y| \le C d_{\mathrm{cc}}(x,y) \quad \forall x,y \in \Omega$$

(il membro di destra può essre $+\infty$).

Questa proposizione dimostra e quantifica il fatto che se $d_{\mathrm{cc}}(x,y) = 0$, allora $x = y$. Seguendo Hajłasz e Koskela,[11] iniziamo dal seguente lemma

Lemma 2.11. *Siano $X_1, \dots, X_m$ campi vettoriali in $\mathbb{R}^n$ e sia $B_{\mathrm{Euc}}(x,r)$ una palla euclidea. Poniamo $M = M(x,r) := \sup_{B(x,r)} \sum_j |X_j|$. Se γ è subunitaria e $\gamma(0) = x$, allora allora*

$$\gamma([0,T]) \subset B_{\mathrm{Euc}}(x,r) \quad \textit{per ogni } T < \frac{r}{M(x,r)}.$$

Dimostrazione. Supponiamo che la tesi non sia vera e indichiamo con t_0 il piú piccolo tempo per cui $|\gamma(t_0) - x| = r$. Allora

$$r = |\gamma(t_0) - x| \le \left| \int_0^{t_0} \dot\gamma(s) ds \right| = \left| \int_0^{t_0} \sum_j \alpha_j(s) X_j(\gamma(s)) ds \right| \le M t_0.$$

Quindi $t_0 \ge \frac{r}{M}$. □

Possiamo anche riformulare come segue:

$$B_{\mathrm{cc}}(x, r/M(x,r)) \subset B_{\mathrm{Euc}}(x,R) \quad \text{per ogni } r > 0 \text{ e } x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.12}$$

Facciamo ora variare $x \in \Omega$, insieme limitato e $r \le 1$, in modo che

$$M(x,r) \le M_0 := \sup_{\Omega_0} \sum_j |X_j| < \infty$$

(Ω_0 è l'intorno di raggio 1 di Ω). Allora troviamo l'inclusione

$$B_{\mathrm{cc}}\Big(x, \frac{r}{M_0}\Big) \subset B_{\mathrm{Euc}}(x,r) \quad \text{per ogni } r \in [0,1] \text{ e } x \in \Omega. \tag{2.13}$$

Dimostrazione della Proposizione 2.10. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e siano $x, y \in \Omega$.

Caso A: vale $|x-y| \ge 1$. Allora usiamo l'inclusione (2.13) con $r = 1$. Poiché $y \notin B_{\mathrm{Euc}}(x,1)$, sarà

$$d_{\mathrm{cc}}(x,y) \ge \frac{1}{M_0} \ge \frac{|x-y|}{M_0 \operatorname{diam} \Omega}.$$

[11] P. Hajłasz; P. Koskela, Sobolev met Poincaré. Mem. Amer. Math. Soc. 145 (2000), no. 688., reperibile alla url `http://www.pitt.edu/~hajlasz/OriginalPublications/HajlaszK-SobolevMetPoincare-test-MemoirsAMS-145-2000-no.688-101pp.pdf`

Caso B: vale $|x - y| < 1$. Allora usiamo ancora (2.13) con $r = |x - y|$. Poiché $y \notin B_{\mathrm{Euc}}(x, |x - y|)$, sarà

$$d_{cc}(x, y) \geq \frac{|x - y|}{M_0}.$$

□

Proposizione 2.14 (Caratterizzazione delle curve subunitarie)**.** *Se $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}^n$ è un acmmino lipschitziano assegnato, sono equivalenti le seguenti tre affermazioni:*

(i) Esiste $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ che soddisfa $|\alpha(t)| \leq 1$ per ogni t e tale che

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_j \alpha_j(t) X_j(\gamma(t)) \quad \textit{per quasi ogni } t.$$

(ii) Vale per quasi ogni t la disugusglianza

$$\langle \dot{\gamma}(t), \xi \rangle^2 \leq \sum_j \langle X_j(\gamma(t)), \xi \rangle^2$$

(iii) Esiste $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ misurabile *e con tutte le le proprietà del punto (i).*

Dimostrazione. Dimostriamo intanto che (i) equivale a (ii).

La parte non banale è (ii) ⇒ (i). Osserviamo che in generale non si assumiamo che i campi siano indipendenti. Riformuliamo l'enunciato con delle variabili piú convenienti: sia $v \in \mathbb{R}^n$ assegnato e siano $w_1, \ldots, w_m \in \mathbb{R}^n$ vettori assegnati. Dobbiamo dimostrare che se vale

$$\langle v, \xi \rangle^2 \leq \sum_j \langle w_j, \xi \rangle^2, \tag{2.15}$$

allora esiste $\alpha \in \mathbb{R}^m$ con $|\alpha| \leq 1$ tale che $\sum_j \alpha_j w_j = v$.

Applicando la (2.15) a ogni ξ ortogonale a $\operatorname{span}\{w_j\}$ si vede subito che $v \in \operatorname{span}\{w_j\}$.

Ora vediamo la parte quantitativa.[12] Se scriviamo $M := [w_1, \ldots, w_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$, possiamo riformulare la domanda sotto forma di ricerca di una soluzione $\alpha \in \mathbb{R}^m$ del sistema lineare $M\alpha = v$ che ha norma $|\alpha| \leq 1$. Osserviamo che l'insieme di tutte le soluzioni del sistema è il sottospazio affine $\widetilde{\alpha} + \ker M$ dove $\widetilde{\alpha} \in \mathbb{R}^m$ è una qualsiasi soluzione (c'è unicità se e solo se $\ker M$ è banale). Per le proprietà degli spazi euclidei, tra tutte queste soluzioni ce n'è una sola $\hat{\alpha}$ di norma minima caratterizzata della condizione $\hat{\alpha} \perp \ker M$ che equivale a $\hat{\alpha} \in (\operatorname{Im} M^T)$.[13] Quindi esiste almeno un β per il quale si può scrivere $\hat{\alpha} = M^T\beta$. Scegliamo un β con tale proprietà e calcoliamo la norma di $\hat{\alpha}$

$$|\hat{\alpha}|^2 = |M^T\beta|^2 = \langle M^T\beta, M^T\beta \rangle = \langle MM^T\beta, \beta \rangle = \langle v, \beta \rangle,$$

perché $v = M\alpha = MM^T\beta$. Ora usiamo la (2.15) con $\xi = \beta$ e troviamo

$$|\hat{\alpha}|^4 = \langle v, \beta \rangle^2 \leq \sum_j \langle w_j, \beta \rangle^2 = \sum_j (w_j^T\beta)^2 = |M^T\beta|^2 = |\hat{\alpha}|^2.$$

Quindi $|\hat{\alpha}| \leq 1$.

[12] Una dimostrazione di questa affermazione si trova nel libro: Bonfiglioli, Lanconelli e Uguzzoni, Stratified Lie groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians, Springer (2007), p. 330.

[13] Qui $\ker A$ e $\operatorname{Im} A$ indicano lo spazio nullo e lo spazio delle colonne di una matrice A.

La prova dell'implicazione (i)⇒(ii) segue applicando tale risultato di algebra lineare per ogni t punto di differenziabilità di γ.

Una dimostrazione diretta del fatto che (i) implica (iii) è contenuta nelle note di Agrachev Barilari e Boscain[14] Una dimostrazione alternativa si ottiene precisando il ragionamento sopra esposto. Guardiamo per quasi ogni t il sistema lineare

$$X(\gamma(t))\alpha(t) = \dot\gamma(t)$$

dove $X(\gamma(t)) = [X_1(\gamma(t)), \dots, X_m(\gamma(t))] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ è la matrice dei campi vettoriali. Basterà poi utilizzare il fatto (che non dimostriamo) che la matrice inversa generalizzata $X(\gamma(t))^\dagger \in \mathbb{R}^{m\times n}$ che fornisce la soluzione di minima norma $\hat\alpha(t) = X(\gamma(t))^\dagger\dot\gamma(t)$ dipende in modo misurabile da t. □

Esempio 2.16. *Calcolo della distanza dall'origine per il campo $X = (1 + x^2)\partial_x$ in $\mathbb{R}$. Osserviamo che $B_{\mathrm{cc}}(0, \pi/2) = \mathbb{R}$ è illimitata in senso euclideo.* (9)

2.2. Campi di tipo Grushin

Esempio 2.17. *Consideriamo i campi $X = \partial_x$ e $Y = x\partial_y$ in $\mathbb{R}^2$. Discussione della stima*

$$d((0,0),(0,y)) \le C|y|^{1/2}$$

per ogni $y \in \mathbb{R}$. Scegliamo $y > 0$ per semplicità e scegliamo un cammino fatto da tre spezzate integrali: preso un parametro $\xi > 0$ da scegliere in seguito, poniamo

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= e^{tX}(0,0) = (t,0) \quad t \in [0,\xi]\\
\gamma_2(t) &= e^{tY}(\xi,0) = (\xi,\xi t) \quad t \in [0,y/\xi]\\
\gamma_3(\tau) &= e^{-tX}(\xi,y) = (\xi - t, y) \quad t \in [0,\xi].
\end{aligned}$$

La lunghezza del cammino somma di tre tratti è: $T(\xi) = 2\xi + \frac{y}{\xi}$. Possiamo minimizzare la funzione al variare di $\xi > 0$ studiando la derivata. Si trova un punto di mimino $\xi_{\min}$ e la corrispondente stima della distanza

$$d((0,0),(0,y)) \le T(\xi_{\min}) = C|y|^{1/2},$$

con C indipendente da y.

La stima precedente è un caso particolare di un risultato generale dovuto a Franchi e Lanconelli. Per enunciarlo usiamo la notazione $I(c,r) = [c - r, c + r]$ per $c \in \mathbb{R}$ e $r > 0$ e poniamo poi

$$\mathrm{Box}((x,y).r) := I(x,r) \times I(y,(|x| + r)r).$$

Ad esempio, $\mathrm{Box}((0,0),r) = [-r,r] \times [-r^2,r^2]$ mentre $\mathrm{Box}((1,0),r) = I(1,r) \times I(y,(1 + r)r)$ è simile alla scatola euclidea $[1 - r, 1 + r] \times [-r,r]$ per r piccolo.

Teorema 2.18 (Franchi e Lanconelli). *Siano $X = \partial_x$ e $Y = x\partial_y$. Esistono costanti $c_1.c_2$ tali che*

$$\mathrm{Box}((x,y),c_2r) \subset B_{\mathrm{cc}}((x,y),r) \subset \mathrm{Box}((x,y),c_1r)$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $r \in]0,+\infty[$.

[14] Reperibili al link `http://cvgmt.sns.it/paper/2022/`

2.3. I campi del gruppo di Heisenberg

Consideriamo i due campi vettoriali in $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x, y, t)

$$\begin{aligned} X &= \partial_x + 2y\partial_t \simeq (1, 0, 2y) \quad \text{e} \\ Y &= \partial_y - 2x\partial_t \simeq (0, 1, -2x). \end{aligned} \tag{2.19}$$

Nonostante risulti $\dim \operatorname{span}\{X, Y\} = 2$ in ogni punto, riulta che la distanza è finita per ogni coppia di punti:

$$d((x, y, t), (x', y', t')) < \infty \quad \forall\, (x, y, t), (x', y', t') \in \mathbb{R}^3.$$

Nel seguito proveremo una stima piú precisa.

Lemma 2.20. *Una curva $\gamma \in \mathrm{Lip}([0, T], \mathbb{R}^3)$ è subunitaria se e solo se, scritto $s \mapsto \gamma(s) = (x(s), y(s), t(s))$, valgono le due condizioni*

$$\begin{cases} \dot t = 2y\dot x - 2x\dot y & \textit{quasi ovunque} \\ \dot x^2 + \dot y^2 \le 1 & \textit{quasi ovunque.} \end{cases} \tag{2.21}$$

In sostanza, un cammino è subunit se la sua proiezione nel piano x, y ha velocità euclidea ≤ 1 e se la funzione $t(s)$ soddisfa la condizione nella prima linea. Notiamo che assegnato un cammino Lipschitz $s \mapsto (x(s), y(s)) = z(s)$ con velocità ≤ 1 e assegnata una quota iniziale $t(0)$, è individuato univocamente un cammino subunitario $s \mapsto (x(s), y(s), t(s))$ che parte dal punto $(x(0), y(0), t(0))$ al tempo 0. Tale cammino si chiama "lifting" subunitario di z.

Esercizio 2.22. *Scrivere il lifting subunitario del cammino $s \mapsto (s^2, s)$ uscente dal punto $(0, 0, 1)$.*

Nel caso del gruppo di Heisenberg, una curva subunitaria soddisfa

$$t(T) - t(0) = \int_0^T \dot t(s) = \int_0^T (2y(s)\dot x(s) - 2x(s)\dot y(s))ds = \int_z 2ydx - 2xdy \tag{2.23}$$

dove l'integrale è inteso nel senso delle forme differenziali ed è esteso al cammino $s \mapsto (x(s), y(s)) =: z(s)$ con $s \in [0, T]$.

Osservazione 2.24. *Se $z : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ è una curva nel piano chiusa e orientata positivamente, allora la formula di Gauss Green mostra che*

$$t(T) - t(0) = \int_z 2ydx - 2xdy = -4A$$

dove A è l'area della regione di piano racchiusa da z.

Notiamo anche che l'integrale della forma differenziale su un tratto di curva contenuto in una linea passante per l'origine è nullo.

Proviamo ora il seguente lemma:

Lemma 2.25. *Se X, Y sono i campi in $\mathbb{R}^3$ introdotti in* (2.19)*, allora esiste C tale che*

$$d((0, 0, 0), (x, 0, t)) \le C(|x| + |t|^{1/2}) \quad \textit{per ogni } x, t \in \mathbb{R}. \tag{2.26}$$

Dimostrazione. Dividiamo la costruzione in due casi, assumendo sempre per semplicita' che sia $x, t \geq 0$:

Caso A. Prendiamo un punto $(x, 0, t)$ e supponiamo $x > t^{1/2}$. Sia $\xi > 0$ da stabilire. Partiamo dalla spezzata piana data dai tre cammini seguenti:

$$\begin{aligned} z_1(s) &= (0, s) \quad s \in [0, \xi] \\ z_2(s) &= (s, \xi) \quad s \in [0, x] \\ z_3(s) &= (x, \xi - s) \quad s \in [0, \xi] \end{aligned}$$

Teniamo presente che ponendo $z_4(s) = (x - s, 0)$ per $s \in [0, x]$ otteniamo un cammino semplice $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$ chiuso e orientato negativamente. L'intervallo di parametrizzazione del cammino somma di $z_1 + z_2 + z_3$ è $T = 2\xi + x$. Per individuare ξ ricordiamo che deve essere

$$t = \int_{z_1+z_2+z_3} 2ydx - 2xdy = \int_{z_1+z_2+z_3+z_4} 2ydx - 2xdy = 4\,\mathrm{Area} = 4\xi x.$$

Abbiamo usato il fatto che su z_4 l'integrale della forma è nullo e la formula di Gauss Green. Quindi troviamo $\xi = \frac{t}{4x}$. Pertanto

$$T = 2\xi + x = 2\frac{t}{4x} + x \leq \frac{1}{2}\sqrt{t} + x,$$

dove abbiamo usato il fatto che $\frac{\sqrt{t}}{x} \leq 1$.

Caso B. Supponiamo che sia $x \leq \sqrt{t}$. Costruiamo una spezzata di quattro tratti, lasciando sempre il primo di lunghezza $\xi > 0$ da precisare e prendendo il secondo di lunghezza $\sqrt{t}$.

$$\begin{aligned} z_1(s) &= (0, s) \quad s \in [0, \xi] \\ z_2(\sigma) &= (s, \xi) \quad s \in [0, \sqrt{t}] \\ z_3(s) &= (\sqrt{t}, \xi - s) \quad s \in [0, \xi] \\ z_4(s) &= (\sqrt{t} - s, 0) \quad s \in [0, \sqrt{t} - x] \end{aligned}$$

L'intervallo di parametrizzazione della curva somma è dunque $[0, T]$, con

$$T = 2\xi + \sqrt{t} + (\sqrt{t} - x) \leq 2\xi + 2\sqrt{t}.$$

Il vincolo d'area è $4\xi\sqrt{t} = t$, da cui si trova $\xi = \sqrt{t}/4$. La stima richiesta segue immediatamente. □

2.4. Esercizi per casa

(a) Dato il campo $X = (1 + x^2)\partial_x$, precisando il ragionamento fatto in classe, verificare che $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ per ogni x, y. La topologia di d_{cc} è equivalente a quella euclidea sulla retta?

(b) Considerare i campi lipschitziani $X = \partial_x$ e $Y = \max\{x, 0\}\partial_y$. Verificare che $d((-1, 0), (-1, y)) \geq 2$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e descrivere la palla $B_{cc}((-1, 0), r)$ per ogni $r \leq 1$. Verificare che $d(x, y), (\xi, \eta) < \infty$ per ogni x, y, ξ, η. Come si confrontano la topologia euclidea e quella della distanza di Carnot Carathéodory?

(c) Scrivere il lifting subunitario relativo ai campi X e Y del gruppo di Heisemberg del cammino circolare $z(s) = (1 - \cos s, \sin s)$ con $s \in [0, 2\pi]$ che esce dal punto $(0, 0, 0)$.

Proposizione 2.27 (Invarianza). *Se $s \mapsto (x(s), y(s), t(s)) = (z(s), t(s))$ è subunitaria, allora:* (11)

(a) per ogni $\theta \in \mathbb{R}$, la curva ruotata $s \mapsto (e^{i\theta} z(s), t(s))$ è subunitaria su $[0, T]$;

(b) per ogni $\lambda > 0$, la curva dilatata

$$s \mapsto (x_\lambda(s), y_\lambda(s), t_\lambda(s)) = \Big(\lambda x\Big(\frac{s}{\lambda}\Big), \lambda y\Big(\frac{s}{\lambda}\Big), \lambda^2 t\Big(\frac{s}{\lambda}\Big)\Big)$$

è subunitaria su $[0, \lambda T]$.

Dimostrazione. Svolta in classe. Per la prima parte usare il fatto che, scritto $z = x + iy$, $z' = x' + iy'$, risulta $2yx' - 2xy' = 2\operatorname{Im}(z\bar{z}')$. □

Come conseguenza, scopriamo le proprietà di invarianza per ogni $(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$

$$d((0, 0), (z, t)) = d((0, 0), (|z|, t)) = d((0, 0, 0), (|z|, 0, t)).$$

Quest'ultima la sappiamo stimare da sopra con $C(|z| + |t|^{1/2})$ Inoltre

$$d((0, 0), (\lambda z, \lambda^2 t)) = \lambda d((0, 0), (z, t)) \quad \forall \lambda > 0. \tag{2.28}$$

Usando quest'ultima possiamo ottenere la seguente stima da sotto della distanza.

Proposizione 2.29. *Sia d la distanza in $\mathbb{R}^3$ definita dai $X = \partial_x + 2y\partial_t$ e $Y = \partial_y - 2x\partial_t$. Allora esiste $C_1 > 0$ tale che*

$$d((0, 0), (z, t)) \geq C_1(|z| + |t|^{1/2}) \quad \forall (z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}. \tag{2.30}$$

Dimostrazione. Usiamo l'invarianza per dilatazione (2.28) e la stima da sotto locale della Proposizione 2.10. Siano

$$\Sigma = \{(z, t) : |z| + |t|^{1/2} = 1\}.$$

L'insieme Σ è compatto e non contiene l'origine. Per la Proposizione 2.10 esiste c_0 tale che per ogni $(z, t) \in \Sigma$ risulta

$$d((z, t), (0, 0)) \geq c_0 \, |(z, t)| \geq c_1$$

(minimo su un compatto di una funzione positiva strettamente).

Sia ora $(z, t) \neq (0, 0)$ qualsiasi. Troviamo il valore $\lambda > 0$ tale che $(\lambda z, \lambda^2 t) \in \Sigma$. Si vede subito che $\lambda = \frac{1}{|z| + |t|^{1/2}}$. Dunque, usando dall'invarianza per dilatazione si ottiene la stima

$$d((z, t), (0, 0)) = \frac{1}{\lambda} d((\lambda z, \lambda^2 t), (0, 0)) = (|z| + |t|^{1/2}) d((\lambda z, \lambda^2 t), (0, 0)) \geq c_1(|z| + |t|^{1/2}).$$

come si voleva. □

Per quello che riguarda la distanza da un punto qualsiasi, consideriamo l'operazione in $\mathbb{C} \times \mathbb{R} = \mathbb{H}$.

$$(\zeta, \tau) \circ (z, t) = (\zeta + z, \tau + t + 2\operatorname{Im}(\zeta\bar{z})).$$

Si verifica che $(\mathbb{R}^3, \circ)$ è un gruppo di Lie. Una discussione approfondita sarà effettuata nelle lezioni del modulo 1. Menzioniamo però il fatto che i campi X, Y sono campi invarianti a sinistra di tale gruppo.

Proposizione 2.31. *Se γ è un cammino subunitario, allora per ogni $(\zeta, \tau) \in \mathbb{H}$ il cammino $(\zeta, \tau) \circ \gamma$ è subunitario.*

Dimostrazione. Parametrizzato γ nella forma $s \mapsto (z(s), t(s))$, la curva traslata si scrive come segue

$$(z_1(s), t_1(s)) = (\zeta, \tau) \circ (z(s), t(s)) = (\zeta + z(s), \tau + t(s) + 2\operatorname{Im}(\zeta\bar{z}'(s))$$

A questo punto è immediato verificare che $t_1' = 2\operatorname{Im}(z_1\bar{z}_1')$ quasi ovunque usando il fatto che $t' = 2\operatorname{Im}(z_1\bar{z}_1')$ quasi ovunque. □

Una conseguenza di tale proposizione è la proprietà di "invarianza a sinistra" della distanza:

$$d((0,0),(z,t)) = d((z_0,t_0) \circ (z,t),(z_0,t_0)),$$

valida per ogni z_0, t_0, z, t. Ma allora la distanza tra due punto qualsiasi è

$$d((\zeta,\tau),(z,t)) = d((0,0),(-\zeta,-\tau) \circ (z,t)) \simeq |z-\zeta| + |t-\tau-2\operatorname{Im}\zeta\bar{z}|^{1/2}$$

dove $\simeq$ indica un'equivalenza attraverso costanti indipendenti da $z, \zeta, t\tau$. In altri termini ancora

$$B((z_0,t_0),r) = (z_0,t_0) \circ B((0,0),r)$$

2.5. Esistenza di cammini minimizzanti

In molti casi l'estremo inferiore nella definizione di distanza è un minimo.

Teorema 2.32 (Esistenza di cammini minimizzanti)**.** *Siano $X_1, \dots, X_m$ dei campi localmente Lipschitziani in $\mathbb{R}^n$. Siano x ed $r > 0$ tali che la palla $B_{cc}(x,r)$ sia limitata in senso euclideo. Allora per ogni $y \in B(x,r)$ esiste un cammino subunitario $\gamma : [0, d(x,y)] \to \mathbb{R}^n$ tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(d(x,y)) = y$.*

Prima delle dimostrazione osserviamo che:

1. L'ipotesi $B_{cc}(x,r)$ limitata è sempre soddisfatta per r sufficientemente piccolo. Vedere Proposizione 2.10.
2. Se tale ipotesi viene a mancare, il teorema è falso. [15]

[15] Un esempio è quello della distanza (subRiemanniana, ma anche Riemanniana) generata dai seguenti campi in $\mathbb{R}^2$: $X_1 = (1+|x|^2)\partial_{x_1}$, $X_2 = (1+|x|^2)\partial_{x_2}$. Si vede con un calcolo che tale distanza è quella di una sfera in coordinate stereografiche (verificarlo per esercizio). Pertanto punti del tipo $(-R,0)$ e $(R,0)$ con R molto grande non sono collegati da nessuna geodetica.

3. Non c'è unicità. Ad esempio, l'invarianza rispetto a rotazioni attorno all'asse t nel gruppo di Heisenberg prova che per ogni coppia di ounti $(0,0,0)$ e $(0,0,t_0)$ esistono infiniti cammini minimizzanti.
   Un esempio di cammino minimizzante in $\mathcal{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ è il lifting proposto nell'esercizio (c) del paragrafo 2.4.
4. Se γ è minimizzante tra x e y allora vale la "proprietà del segmento"

$$d(x,y) = d(x,z) + d(y,z) \quad \forall z \in \gamma([0,1]).$$

Infatti, scritto $z = \gamma(t)$, risulta

$$d(x,y) \le d(x,\gamma(t)) + d(\gamma(t),y) \le t + (d(x,y) - t) \le d(x,y)$$

Dimostrazione. [16] Sia $y \in B(x,r)$ e sia $\gamma_k : [0,T_k] \to \mathbb{R}^n$ una successione di curve subunitarie che connettono x e y, con $T_k \to d(x,y)$. Assumiamo T_k monotona decrescente e supponiamo che $T_1 < r$. Questo assicura che per ogni k, il percorso $\gamma_k([0,T_k])$ è tutto contenuto nel compatto $\overline{B(x,r)}$. Prolunghiamo tutti i cammini a uno stesso intervallo $[0,T_1]$ ponendo $\widetilde{\gamma}_k = \gamma_k$ su $[0,T_k]$ e $\widetilde{\gamma}_k(t) = y = \gamma_k(T_k)$ per $t \in [T_k,T_1]$. Vale per $t,s \in [0,T_1]$

$$|\widetilde{\gamma}_k(t) - \widetilde{\gamma}_k(s)| = \Big|\int_s^t \sum_{j=1}^m \alpha_k^j(\sigma) X_j(\gamma_k(\sigma))d\sigma\Big| \le \Big(\max_{z\in\overline{B(x,r)}} \sum_j |X_j(z)|\Big)|t-s|.$$

Qui abbiamo usato $|\alpha_k| = |(\alpha_k^1,\dots,\alpha_k^m)| \le 1$ quasi ovunque. Le funzoni sono equi-Lipschitziane e equilimitate, perché $\gamma_k[0,T_k] \subset \overline{B(x,r)}$. Allora per il Teorema di Ascoli Arzelà possiamo assumere che $\widetilde{\gamma}_k \to \widetilde{\gamma}$ uniformemente su $[0,T_1]$. Notiamo che $\widetilde{\gamma}$ è Lipschitziana e che

$$y = \lim_{k\to\infty} y = \lim_{k\to\infty} \widetilde{\gamma}_k(T_k) = \widetilde{\gamma}(d(x,y)).$$

L'ultima uguaglianza viene dalle proprietà della convergenza uniforme.

Ora facciamo vedere cha il cammino $\gamma := \widetilde{\gamma}_{[0,d(x,y)]}$, oltre ad essere Lipschitziano e a connettere x e y, è subunitario. Usiamo la caratterizzazione delle Proposizione 2.14. Sia t un punto di differenziabilità di γ. Allora, preso $\xi \in \mathbb{R}^n$, si scrive

$$\begin{aligned}
\Big\langle \frac{\gamma_k(t+h) - \gamma_k(t)}{h}, \xi \Big\rangle &= \Big\langle \fint_t^{t+h} \sum_{j=1}^m \alpha_k^j(\sigma) X_j(\gamma_k(\sigma))d\sigma, \xi \Big\rangle \\
&= \fint_t^{t+h} \sum_j \alpha_k^j(\sigma) \langle X_j(\gamma_k(\sigma)), \xi\rangle d\sigma \\
&\le \fint_t^{t+h} \Big\{\sum_j \langle X_j(\gamma_k(\sigma)), \xi\rangle^2\Big\}^{1/2} d\sigma.
\end{aligned}$$

(supponiamo per semplicità $h > 0$). Nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $|(\alpha_k^1(\sigma)),\dots,\alpha_k^m(\sigma)| = 1$ per ogni k e quasi ogni σ assieme alla disuguaglianza

[16] Questa dimostrazione si trova nel libro di Bonfiglioli Lanconelli Uguzzoni e nelle note di Agrachev Barilari e Boscain già citate nelle pagine precedenti. L'approccio metrico è illustrato nelle note di Ambrosio e Tilli, Topics on analysis in metric spaces. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 25. Oxford University Press, Oxford, 2004.

di Cauchy–Schwarz in $\mathbb{R}^m$. Passando allimite per $k \to \infty$ (convergenza dominata o addirittura convergenza uniforme a destra) si trova

$$\Big\langle \frac{\gamma(t+h)-\gamma(t)}{h}, \xi \Big\rangle \leq \fint_t^{t+h} \Big\{ \sum_j \langle X_j(\gamma(\sigma)), \xi \rangle^2 \Big\}^{1/2} d\sigma.$$

Ora, poiché l'integrando a destra è continuo in σ, per $h \to 0$ otteniamo

$$\langle \gamma'(t), \xi \rangle \leq \Big\{ \sum_j \langle X_j(\gamma(t)), \xi \rangle^2 \Big\}^{1/2}.$$

Poiché questa disuguaglianza vale per ogni t di differenziabilità di γ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, la dimostrazione è conclusa. $\square$

3. Calcolo non commutativo per campi vettoriali

3.1. Diffeomorfismi, differenziale e push-forward di un campo

Indichiamo con $d\Phi(x)$ il differenziale di un diffeomorfismo $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega)$ nel punto $x \in \Omega$. Possiamo anche definire il differenziale come segue:

$$d\Phi(x)\gamma'(0) = (\Phi \circ \gamma)'(0), \tag{3.1}$$

dove $\gamma :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^n$ è una qualsiasi curva derivabile in $t = 0$ cha soddisfa $\gamma(0) = x$.

Definizione 3.2 (Campo immagine (Push-forward)). *Sia $X = a(x) \cdot \nabla$ un campo di classe* (13)
C^1 su un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sia $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo di classe C^2. Indichiamo le variabili come $\Omega \ni x \mapsto \Phi(x) = y \in \Phi(\Omega)$. Poniamo

$$b(y) := b(\Phi(x)) := d\Phi(x)a(x) \quad \textit{per ogni } x \in \Omega \tag{3.3}$$

e definiamo il campo immagine *$\Phi_* X$ come segue:*

$$\Phi_* X := b \cdot \nabla.$$

Notiamo che nelle condizioni della definizione, $\Phi_* X$ è di classe C^1 su $\Phi(\Omega)$. In termini di componenti risulta

$$b_k(y) = b_k(\Phi(x)) = d\Phi_k(x)a(x) = \sum_j \partial_{x_j}\Phi_k(x)a_j(x) \quad \forall\, k = 1, \ldots, n.$$

Osservazione 3.4. *Il campo $\Phi_* X$ definito sopra agisce su una funzione derivabile $f : \Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ nel modo seguente: sia $y = \Phi(x) \in \Phi(\Omega)$. Allora*

$$(\Phi_* X)f(y) = (\Phi_* X)f(\Phi(x)) = X(f \circ \Phi)(x). \tag{3.5}$$

Scegliendo come f una funzione coordinata, $f(y) = y_k$, si vede che definire $\Phi_* X$ richiedendo (3.5) *per ogni f equivale alla Definizione 3.2.*

Esercizio 3.6. *(i) Calcolo di $\Phi_* X$ con $X = x\partial_x$ e $\Phi : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$, $\Phi(x) = e^x$.*

(ii) Data $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \Phi(\mathbb{R}^2)$, $\Phi(x) = (e^{x_1}, x_1^2 + e^{2x_2})$, *calcolo di* $\Phi_* X$ *con* $X = \partial_{x_1}$.

Osservazione 3.7 (Campo immagine e curve integrali)**.** *Vale la formula*

$$\Phi(e^{tX}x) = e^{t\Phi_* X}(\Phi(x))$$

sulla treasformazione delle curve integrali. Infatti

$$\frac{d}{dt}\Phi(e^{tX}x) = \sum_k \partial_k \Phi(e^{tX}x) \frac{d}{dt}(e^{tX}x)_k = \sum_k \partial_k \Phi(e^{tX}x) a_k (e^{tX}x)_k = b(\Phi(e^{tX}x))$$

Teorema 3.8 (rettificazione di un campo)**.** *Sia* $X = a(x) \cdot \nabla$ *un campo vettoriale in* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. *Sia* $z \in \Omega$ *tale che* $a(z) \neq 0$. *Allora esiste un intorno aperto* U_z *di* z *e un diffeomorfismo* $\Phi : U_z \to \Phi(U_z) \subset \mathbb{R}^n$ *tale che*

$$\Phi_* X = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

Dimostrazione. Senza perdita di generalità supponiamo che $z = 0$ e $a_1(0) \neq 0$. Scriviamo $x = (x_1, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Sia ora $\varepsilon > 0$ e consideriamo la scatola aperta $]-\varepsilon, \varepsilon[\times B'(0', \varepsilon) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$. Poniamo

$$\Psi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times B'(0', \varepsilon) \to \mathbb{R}^n, \qquad \Psi(t, u') = e^{tX}(0, u').$$

Con un calcolo si vede che

$$\det d\Psi(0,0) = \det[\partial_t \psi(0,0), \partial_{u_2}\psi(0,0), \dots, \partial_{u_n}\psi(0,0)] = a_1(0) \neq 0.$$

Quindi $\Psi :]-\varepsilon, \varepsilon[\times B'(0', \varepsilon) \to \Psi(]-\varepsilon, \varepsilon[\times B'(0', \varepsilon))$ e' un diffeomorfismo, per ε piccolo. Inoltre vale $\Psi_*(\partial_t) = X$. Infatti, per ogni funzione test $f \in C^\infty(\Psi(]-\varepsilon, \varepsilon[\times B'(0', \varepsilon)))$

$$\Psi_*(\partial_t) f(\Psi(t, u')) = \partial_t (f \circ \Psi)(t, u') = X f(\Psi(t, u'))$$

per ogni (t, u') nella scatola. Di conseguenza, la funzione inversa $\Phi := \Psi^{-1}$ è il diffeomorfismo cercato che rettifica X. □

3.2. Commutatori e derivate di Lie

Definizione 3.9 (Commutatore)**.** *Dati campi* $X = a \cdot \nabla$ *e* $Y = b \cdot \nabla$, *poniamo* $[X, Y] = XY - YX$. *Si vede che* $[X, Y]$ *è un operatore del primo ordine e che vale* $[X, Y] = (Xb - Ya) \cdot \nabla$

Proposizione 3.10. *Se* X, Y *sono campi su un aperto* Ω, *e se* $\Phi : \Omega \to \Phi(\Omega)$ *e' un diffeomorfismo, allora vale*

$$[\Phi_* X, \Phi_* Y] = \Phi_* [X, Y].$$

Dimostrazione. Se $h : \Phi(\Omega) \to \mathbb{R}$ e' regolare e Z e' un campo su Ω, (3.5) fornisce

$$(\Phi_* Z) h = (Z(h \circ \Phi)) \circ \Phi^{-1}.$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
[\Phi_* X, \Phi_* Y]f &= \Phi_* X \Phi_* Y f - \Phi_* Y \Phi_* X f \\
&= \Phi_* X\Big(\big(Y(f\circ\Phi)\big)\circ\Phi^{-1}\Big) - \Phi_* Y\Big(\big(X(f\circ\Phi)\big)\circ\Phi^{-1}\Big) \\
&= X\Big(Y(f\circ\Phi)\circ\Phi^{-1}\circ\Phi\Big)\circ\Phi^{-1} - Y\Big(X(f\circ\Phi)\circ\Phi^{-1}\circ\Phi\Big)\circ\Phi^{-1} \\
&= XY(f\circ\Phi)\circ\Phi^{-1} - YX(f\circ\Phi)\circ\Phi^{-1} \\
&= [X,Y](f\circ\Phi)\circ\Phi^{-1} \\
&= \Phi_*[X,Y]f
\end{aligned}
$$

come desideravamo. □

Nel disorso seguente identificheremo ripetutamente operatori differenziali e funzioni vettoriali.

Definizione 3.11 (Derivata di Lie)**.** *Definiamo dati due campi X e Y in Ω e un punto $x \in \Omega$,*

$$
\mathcal{L}_X Y(x) := \frac{\partial}{\partial t} e_*^{-tX} Y(x)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{e_*^{-tX}Y(x) - Y(x)\}.
$$

Notiamo che per ogni x, il vettore $e_*^{-tX}Y(x)$ esiste per tempi sufficientemente piccoli (precisamente per ogni $t \in \mathcal{D}(X,x)$). Assumendo per ora che il limite esista, data una funzione $f \in C^\infty(\Omega)$ e $x \in \Omega$, possiamo riscrivere

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X Y) f(x) \simeq \mathcal{L}_X Y(x)\cdot\nabla f(x) &:= \frac{\partial}{\partial t}(e_*^{-tX}Y)(x)\cdot\nabla f(x)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}(e_*^{-tX}Y)f(x)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{\partial}{\partial t}Y(f\circ e^{-tX})(e^{tX}x)\Big|_{t=0}
\end{aligned}
$$

dove abbiamo usato la caratterizzazione (3.5) del pushforward e i soliti abusi di notazione.

Il seguente teorema dà l'esistenza ed il valore del limite che appare nella definizione appena data.

Teorema 3.12. *Siano X, Y campi vettoriali di classe C^2 in un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Allora vale su Ω l'identità*

$$
[X,Y] = \mathcal{L}_X Y.
$$

La dimostrazione viene dal seguente teorema, che contiene un enunciato equivalente.

Teorema 3.13. *Siano Y, X dei campi vettoriali C^2 su Ω. Allora, per ogni funzione f regolare, per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $t \in \mathcal{D}(X,x)$ vale*

$$
\frac{\partial}{\partial t}Y(f\circ e^{-tX})(e^{tX}x) = [X,Y](f\circ e^{-tX})(e^{tX}x). \tag{3.14}
$$

Premessa alla dimostrazione. Ricordiamo che, dato un campo X di classe C^2 su Ω, allora il flusso $(t,x) \mapsto \psi(t,x) = e^{tX}x$ è di classe C^2 su un opportuno aperto massimale $G = \bigcup_{x\in\Omega} \mathcal{D}(X,x) \times \{x\} \subset \mathbb{R} \times \Omega$ contenente $\{0\} \times \Omega$. Quindi preso un aperto O con chiusura contenuta in Ω, esiste $\varepsilon > 0$ tale che il compatto $\overline{O} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ è contenuto in G. Pertanto la funzione $(t,x) \mapsto d_x\psi(t,x)$, essendo C^1 su G è Lipschitziana sul compatto $\overline{O} \times [-\varepsilon, \varepsilon]$. In particolare, esiste $L > 0$ tale che

$$|d_x e^{tX}(x) - I_n| \leq L|t| \quad \text{per ogni } x \in \overline{O} \text{ e } t \in [-\varepsilon, \varepsilon]. \tag{3.15}$$

Osserviamo che la stima (3.15) vale anche per campi C^1. Vedere l'esercizio 2 nel paragrafo 1.5.

Dimostrazione. Senza perdita di generalità dimostriamo la (3.14) per $t = 0$. Quindi dobbiamo calcolare: (15)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} Y(f \circ e^{-tX})(e^{tX}x)\Big|_{t=0} &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big\{Y(f \circ e^{-tX})(e^{tX}x) - Yf(e^{tX}x) + Yf(e^{tX}x) - Yf(x)\Big\} \\ &=: (1) + (2).\end{aligned}$$

È immediato vedere che $(2) \to XYf(x)$.

Ora analizziamo (1). Per t fissato si ha

$$\frac{1}{t}\big\{Y(f \circ e^{-tX})(e^{tX}x) - Yf(e^{tX}x)\big\} = b_j(e^{tX}x)\frac{1}{t}\big\{\partial_j(f \circ e^{-tX})(e^{tX}x) - \partial_j f(e^{tX}x)\big\}$$

(omettiamo le somme sugli indici ripetuti). Poniamo anche $e^{tX}x = \xi$ e calcoliamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}\big\{\partial_j(f \circ e^{-tX})(\xi) - \partial_j f(\xi) &= \fint_0^t \frac{\partial}{\partial \tau}\partial_{\xi_j} f(e^{-\tau X}\xi)d\tau \\ &= \fint_0^t \partial_{\xi_j}\frac{\partial}{\partial \tau} f(e^{-\tau X}\xi)d\tau \\ &= -\fint_0^t \partial_{\xi_j} Xf(e^{-\tau X}\xi)d\tau \\ &= -\fint_0^t \partial_k Xf(e^{-\tau X}\xi)\frac{\partial(e^{-\tau X}\xi)_k}{\partial \xi_j}d\tau\end{aligned}$$

Osa osserviamo che $\partial_k Xf$ è una funzione continua. Quindi

$$\partial_k Xf(e^{-\tau X}\xi) = \partial_k Xf(e^{(t-\tau)X}x) \to \partial_k Xf(x),$$

per $t \to 0$. Inoltre, grazie alla premessa alla dimostrazione, sappiamo che, per $|t|$ sufficientemente piccolo vale una stima del tipo

$$\Big|\frac{\partial(e^{-\tau X}\xi)_k}{\partial \xi_j} - \delta_{kj}\Big| \leq C|t|$$

Passando al limite per $t \to 0$ si trova la tesi. $\square$

Si può vedere che gli argomenti della dimostrazione appena fatta funzionano per campi solo di classe C^1. Questa dimostrazione segue grosso modo quelle del libro di Boothby e di Gallot-Hulin-Lafontaine. [17]

Corollario 3.16. *Se due campi X e Y su un aperto di Ω soddisfano $[X, Y] = 0$, allora per ogni x esiste un intorno dell'origine $U \subset \mathbb{R}^2$ tale che $e^{tX}e^{sY}x = e^{sY}e^{tX}x$ per ogni $(t, s) \in U$.*

Dimostrazione. SIa $x \in \Omega$ e sia $U =]-\varepsilon, \varepsilon[^2$ cone ε sufficientemente piccolo affinché $e^{\tau X}e^{\sigma Y}x$ ed $e^{\sigma Y}e^{\tau X}x$ siano definiti oer ogni $\tau, \sigma \in U$. Presa una funzione test $f \in C^\infty(\Omega)$, risulta

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}f(e^{tX}e^{sY}x) &= Y(f \circ e^{tX})(e^{sY}x) = Yf(e^{tX}e^{sY}x) + \int_0^t \frac{d}{d\tau}Y(f \circ e^{\tau X})(e^{(t-\tau)X}e^{sY}x)) \\ &= Yf(e^{tX}e^{sY}x).\end{aligned}$$

Quindi $\gamma(s) = e^{tX}e^{sY}x$ risolve l'equazione ordinaria $\dot\gamma(s) = Y(\gamma(s)$ con $\gamma(0) = e^{tX}x$. La dimostrazione segue dall'unicità della soluzione del problema di Cauchy. □

Vale anche il viceversa del corolario appena dimostrato:

Corollario 3.17. *SIano X, Y dei campi di classe C^2 in Ω. Supponiamo che per qualche $x \in \Omega$ valga $e^{tX}e^{sY}x = e^{sY}e^{tX}x$ per ogni (t, s) in un opportuno intorno dell'origine. Allora*

$$[X, Y](x) = 0.$$

Dimostrazione. Per ipotesi vale l'identità $e^{-sY}e^{tX}e^{sY}x = e^{tX}x$. Presa la solita funzione test, differenziamo rispetto a t

$$Xf(e^{tX}x) = \frac{\partial}{\partial t}f(e^{tX}x) = \frac{\partial}{\partial t}f(e^{-sY}e^{tX}e^{sY}x) = X(f \circ e^{-sY})(e^{tX}e^{sY}x)$$

Ma allora, valutando in $t = 0$ e derivando rispetto a s troviamo

$$0 = \frac{\partial}{\partial s}Xf(e^{tX}x) = \frac{\partial}{\partial s}X(f \circ e^{-sY})(e^{sY}x) = [Y, X](f \circ e^{-sY})(e^{sY}x).$$

Per $s = 0$ si trova la tesi. □

Corollario 3.18. *Se X e Y commutano in Ω, allora, per ogni x e per $|t|, |s|$ sufficientemente piccoli, vale*

$$e^{tX}e^{sY}x = e^{tX+sY}x$$

Dimostrazione. Prendiamo ε sufficientemente piccolo affinché $e^{\tau X}e^{\sigma Y}x$ ed $e^{\tau X+\sigma Y}x$ siano ben definiti per ogni $|\tau|, |s| \leq \varepsilon$. Fissiamo $t, s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ e, posto $Z = tX$ e $W = sY$,

[17] Una dimostrazione si trova anche nel libro "Tu, An introduction to manifolds", ma attenzione alla formula (20.6), e alla dimostrazione che segue (Theorem 20.4), nelle quali $\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(-t, p)$ va sostituito con $\dfrac{\partial\varphi^i}{\partial x^j}(-t, \varphi_t(p))$.

notiamo che Z e W commutano e analizziamo per guardiamo per $\sigma \in [0,1]$ la curva $e^{\sigma Z}e^{\sigma W}x$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\sigma}f(e^{\sigma Z}e^{\sigma W}x) &= Zf(e^{\sigma Z}e^{\sigma W}x) + W(f\circ e^{\sigma Z})(e^{\sigma W}x)\\ &= Zf(e^{\sigma Z}e^{\sigma W}x) + Wf(e^{\sigma Z}e^{\sigma W}x) + \int_0^\sigma \frac{\partial}{\partial\lambda}W(f\circ e^{\lambda Z})(e^{(\sigma-\lambda)Z}e^{\sigma W}x)d\lambda\\ &= (Z+W)f(e^{\sigma Z}e^{\sigma W}x).\end{aligned}$$

Quindi $\sigma \mapsto e^{\sigma Z}e^{\sigma W}x$ è una curva integrale di $Z+W$ con stessa condizione iniziale di $e^{\sigma(Z+W)}x$. Dunque esse coincidono e ponendo $\sigma = 1$ si conclude la dimostrazione. □

Proposizione 3.19. *Se X e Y sono campi regolari su Ω vale per ogni $x \in \Omega$*

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\left\{e^{-tY}e^{-tX}e^{tY}e^{tX}x - x\right\} = [X,Y](x). \tag{3.20}$$

Notiamo che il membro di sinistra è identicamente nullo per t piccolo se i campi commutano. La proposizione si può dimostrare in almeno tre modi: con la formula di Taylor, oppure con le tecniche della Formula di Dynkin o, infine, come corollario della formula integrale di Rampazzo e Sussmann.

Dimostrazione. Siano X ed Y dei campi regolari in Ω. Fissato $x \in \Omega$ e s, t sufficientemente vicini all'origine, presa $f \in C^\infty(\Omega)$, si ha

$$\begin{aligned}&f(e^{-tY}e^{-sX}e^{tY}e^{sX}x) - f(x)\\ &\quad= \int_0^t \frac{d}{d\tau}f(e^{-\tau Y}e^{-sX}e^{\tau Y}e^{sX}x)d\tau\\ &\quad= \int_0^t \{-Yf(e^{-\tau Y}e^{-sX}e^{\tau Y}e^{sX}x) + Y(f\circ e^{-\tau Y}\circ e^{-sX})(e^{\tau Y}e^{sX}x)\}d\tau \quad \text{(per (1.31))}\\ &\quad= \int_0^t \{-Y(f\circ e^{-\tau Y})(e^{-sX}e^{\tau Y}e^{sX}x) + Y(f\circ e^{-\tau Y}\circ e^{-sX})(e^{\tau Y}e^{sX}x)\}d\tau\\ &\quad= \int_0^t d\tau\int_0^s d\sigma\frac{d}{d\sigma}Y(f\circ e^{-\tau Y}\circ e^{-\sigma X})(e^{(\sigma-s)X}e^{\tau Y}e^{sX}x)\\ &\quad= \int_0^t d\tau\int_0^s d\sigma[X,Y](f\circ e^{-\tau Y}\circ e^{-\sigma X})(e^{(\sigma-s)X}e^{\tau Y}e^{sX}x)\end{aligned}$$

Dunque abbiamo la seguente rappresentazione integrale del commutatore:

$$e^{-tY}e^{-sX}e^{tY}e^{sX}x - x = \int_0^t d\tau\int_0^s d\sigma\,[X,Y](e^{-\tau Y}e^{-\sigma X})(e^{(\sigma-s)X}e^{\tau Y}e^{sX}x) \tag{3.21}$$

A questo punto, per dimostrare basta mandare $t = s$ a zero e usare i teoremi sulle equazioni ordinarie visti nelle lezioni precedenti che permettono di affermare che

$$\begin{aligned}(\tau,\sigma) \mapsto&[X,Y](f\circ e^{-\tau Y}\circ e^{-\sigma X})(e^{(\sigma-s)X}e^{\tau Y}e^{sX}x)\\ &= \left\langle [X,Y](e^{(\sigma-s)X}e^{\tau Y}e^{sX}x), \nabla(f\circ e^{-\tau Y}\circ e^{-\sigma X})(e^{(\sigma-s)X}e^{\tau Y}e^{sX}x)\right\rangle\end{aligned}$$

è continua in un intorno di $(\tau,\sigma) = (0,0)$. □

4. Distribuzioni e Teorema di Frobenius

Sia $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ una sottovarietà di classe C^k con $k \geq 2$. Un campo $X = a \cdot \nabla$ di classe C^1 in $\mathbb{R}^n$ si dice tangente a Σ se per ogni $x \in \Sigma$ vale $a(x) \in T_x\Sigma$. Valgono i seguenti fatti. (17)

- Se X è tangente a Σ, per ogni $x \in \Sigma$ vale $e^{tX}x \in \Sigma$ per t vicino a 0. Si vede usando una opportuna caratterizzazione della nozione di varietà e l'unicità delle curve integrali di X.
- Se X, Y sono tangenti a Σ allora anche $[X, Y]$ è tangente a Σ. Si vede dalla formula (3.20) e dal punto precedente.

4.1. Distribuzioni e Teorema di Frobenius

Data una famiglia $X_1, \dots, X_m$ di campi, poniamo per ogni $x \in \mathbb{R}^N$,

$$H_x := \operatorname{span}\{X_1(x), \dots, X_m(x)\} \subset T_x\mathbb{R}^N.$$

Definizione 4.1. *La distribuzione generata da $X_1, \dots, X_m$ è il seguente sottoinsieme del fibrato tangente TR^n:*

$$H := \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} H_x.$$

Se $\dim H_x =: p$ *non dipende da x, allora la distribuzione si dice regolare di rango p. Altrimenti si parla di distribuzione singolare.*

Definizione 4.2 (Famiglia involutiva)**.** *La famiglia $X_1, \dots, X_m$ di campi in $\mathbb{R}^n$ si dice involutiva se vale*

$$[X_j, X_k](x) \in H_x \quad \textit{per ogni } x \in \mathbb{R}^n, j, k \in \{1, \dots, m\}.$$

Osserviamo che se dei campi $X_1, \dots, X_m$ sono tangenti a una superficie Σ e se $\operatorname{span}\{X_j(x) : j = 1, \dots, m\} = T_x\Sigma$ per ogni $x \in \Sigma$, allora vale la condizione di involutività nei punti di Σ

$$[X_j, X_k](x) \in H_x \quad \forall j, k \quad \forall x \in \Sigma.$$

D'altra parte, la famiglia $X = \partial_x + 2y\partial_t$ e $Y = \partial_y - 2x\partial_t$ in $\mathbb{R}^3$ genera una distribuzione regolare di rango 2, ma un calcolo del commutatore mostra che la condizione di involutività è falsa in ogni punto. Pertanto la considerazione appena fatta dice che non esiste nessuna superficie bidimensionale Σ il cui spazio tangente è generato in ogni punto dai campi X, Y.

Teorema 4.3 (Jacobi–Clebsch–(Frobenius))**.** *Sia data una famiglia $X_1, \dots, X_m$ di campi C^k in $\mathbb{R}^n$ (con $k \geq 1$). Assumiamo che tale famiglia generi una distribuzione regolare e involutiva di rango p. Allora per ogni $\bar{x}$ esiste un intorno U di $\bar{x}$ e un diffeomorfismo $\Phi : U \to \Phi(U) = V' \times V'' \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ tale che*

$$\Phi_{*,x} H_x = \mathbb{R}^p \times \{0_q\} \quad \textit{per ogni } x \in U \tag{4.4}$$

Alcumi commenti sull'enunciato.

- Per ogni $c'' \in V'' \subset \mathbb{R}^{n-p}$, l'insieme $\Sigma := \Phi^{-1}(\{(y', c'') : y' \in V'\})$ è una sottovarietà p-dimensionale di $\mathbb{R}^n$. La formula (4.4) dice che $T_x\Sigma = H_x$. In questo caso si dice che Σ è una *varietà integrale* della distribuzione. L'intorno U è pertanto "foliato" da varietà integrali.

- Con un linguaggio ottocentesco potremmo riformulare le conclusioni del teorema dicendo che se i campi $X_1, \ldots, X_p$ generano una distribuzione involutiva di rango p, allora esiste in U un sistema massimale di $n-p$ "soluzioni indipendenti"[18] $g = (g_{p+1}, \ldots, g_n) : U \to \mathbb{R}^{n-p}$ del set di equazioni

$$X_j u = 0 \quad \text{in } U, \text{ per } j = 1, \ldots, p.$$

Precisamente tali funzioni possono essere ottenute a partire dalle funzioni $h_k(y) = y_k$ per $k \geq p+1$ e definendo $g_k(x) = h_k(\Phi(x))$ per $k = p+1, \ldots, n$.
Notiamo che, data una famiglia di rango p, indipendentemente dall'involutività, è impossibile che ci siano piú di $n-p$ soluzioni indipendenti (perché?). Possono essercene meno di $n-p$ addirittura nessuna nel caso non involutivo. Ad esempio nel caso $X = \partial_x + 2y\partial_t$ e $Y = \partial_y - 2x\partial_t$ è facile vedere che non esiste neanche una funzione g non costante e di classe C^2 su qualche aperto di $\mathbb{R}^3$ che risolva il sistema $Xu = Yu = 0$ (perché?).

Esercizio 4.5. *Rispondere ai due punti interrogativi delle osservazioni appena fatte.*

Dimostrazione. Indichiamo con p il rango della distribuzione.

Mostriamo che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$esiste un intorno di $U = U_{x_0}$ di x_0 e una famiglia di campi $Z_1, \ldots, Z_p$ su U tali che:

1. $\mathrm{span}\{Z_1(x), \ldots, Z_p(x)\} = H_x$ per ogni $x \in U$.
2. $[Z_j, Z_k] \equiv 0$ in U, per ogni $j, k = 1, \ldots, p$.

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Supponiamo senza perdita di generalità che $X_1(x_0), \ldots, X_p(x_0)$ siano indipendenti. Usando la notazione $X_j := \sum_{k=1}^n a_j^k \partial_k$ ed eventualmente riordinando le coordinate, possiamo assumere che la matrice $(a_j^k(x_0))_{j,k=1,\ldots,p}$ sia non singolare. Per continuità e per l'ipotesi di rango costante, ciò avverrà in tutti i punti di U, eventualmente restringendo quest'ultimo.

Definiamo le funzioni β_j^k tali che

$$\sum_{1 \leq k \leq p} \beta_i^k(x) a_k^\ell(x) = \delta_i^\ell \tag{4.6}$$

per ogni $i, \ell = 1, \ldots, p$. Le funzioni β_i^k sono uniche e hanno la stessa regolarità dei campi di partenza.

Introduciamo ora per ogni $x \in U$ e $\ell = 1, \ldots, p$ i nuovi campi

$$Z_{\ell,x} := \sum_{1 \leq k \leq p} \beta_\ell^k(x) X_{k,x} =: \partial_\ell + \sum_{p+1 \leq i \leq n} \varphi_\ell^i(x) \partial_i, \tag{4.7}$$

dove per $\ell \leq p$ e $i \geq p+1$ abbiamo posto $\varphi_\ell^i = \sum_{k=1}^p \beta_\ell^k a_k^i$. Notiamo che

$$\mathrm{span}\{Z_{1,x}, \ldots, Z_{p,x}\} = \mathrm{span}\{X_{1,x}, \ldots, X_{p,x}\} = H_x \tag{4.8}$$

per ogni $x \in U$.

[18] Cioè per le quali dg ha rango massimo in ogni punto

Per provare la commutatività, osserviamo che (4.7) assicura che

$$[Z_j, Z_k]_x \in \operatorname{span}\{\partial_{p+1}, \dots, \partial_n\} \quad \text{per ogni } j, k \in \{1, \dots p\} \quad x \in U. \tag{4.9}$$

D'altra parte,

$$[Z_j, Z_k] = \Big[\sum_{\ell=1}^{p} \beta_j^\ell X_\ell, \sum_{i=1}^{p} \beta_k^i X_i\Big] = \sum_{\ell, i \le p} \beta_j^\ell (X_\ell \beta_k^i) X_i - \beta_k^i (X_i \beta_j^\ell) X_\ell - \beta_j^\ell \beta_k^i [X_\ell, X_i]$$

Quindi per l'involutività, $[Z_j, Z_k](x) \in H_x$ per ogni $x \in U$. Allora per ogni x possiamo scrivere

$$[Z_j, Z_k](x) = \sum_{h=1}^{p} c_{jk}^h(x) Z_h(x) = \sum_{h=1}^{p} c_{jk}^h(x) \Big(\partial_h + \sum_{\alpha \ge p+1} \varphi_h^\alpha(x) \partial_\alpha\Big)$$

Ma questa è incompatibile con (4.9) a meno che non sia $c_{jk}^h \equiv 0$ su U.

Come ultimo passo, troviamo il cambio di variabile Φ richiesto. Scriviamo $H_{x_0}^\perp = \operatorname{span}\{\xi_{p+1}, \dots, \xi_n\}$. Poniamo allora, per $(u, v) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$, vicini all'origine

$$F(u, v) = e^{u_1 Z_1} e^{u_2 Z_2} \dots e^{u_p z_p} \Big(x_0 + \sum_{k=p+1}^{n} v_k \xi_k\Big).$$

Poiché i campi Z_j commutano, per il Corollario 3.18, possiamo riarrangiare gli esponenziali a nostro piacimento. Pertanto, per $(u, v) \in V' \times V''$ intorni convenientemente piccoli dell'origine,

$$\frac{\partial F}{\partial u_j}(u, v) = \frac{\partial}{\partial u_j} e^{u_1 Z_1} e^{u_2 Z_2} \dots e^{u_p Z_p} \Big(x_0 + \sum_{k=p+1}^{n} v_k \xi_k\Big) = Z_j(F(u, v)) \tag{4.10}$$

Inoltre dalla teoria delle equazioni ordinarie sappiamo che F è regolare in u, v tanto quanto i campi (quindi almeno C^1). Pertanto

$$\frac{\partial F}{\partial v_k}(0, 0) = \xi_k \quad \text{per } k = p+1, \dots, n.$$

Ma allora per invertibilità locale, ritoccando se necessario V' e V'', risulta che $F : V' \times V'' \to \Phi(V' \times V'')$ è un diffeomorfismo (di classe C^1 almeno) in un intorno di di x_0 in $\mathbb{R}^n$). Inoltre F soddisfa (4.10) e pertanto

$$F_{*,(u,v)}(\operatorname{span}\{\partial_{u_1}, \dots, \partial_{u_p}\}) = H_{F(u,v)}.$$

Il diffeomorfismo $\Phi = F^{-1}$ è il cambio di variabile cercato. $\square$

Osservazione 4.11. *La dimostrazione appena fatta mostra che, se i campi sono diclasse C^k, allora Φ è di classe C^k. Le "foglie" $F(V' \times \{c''\})$ sono però di classe C^{k+1}. Questo si vede da* (4.10).

4.2. Sistemi di tipo Jacobi

Consideriamo il sistema seguente: dati $G \subset \mathbb{R}^p_t$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n_y$ e una famiglia di funzioni $f_\alpha : G \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ con $\alpha = 1, \dots, p$. [19] Cerchiamo una funzione $y : G \to \mathbb{R}^n$ che soddisfi il sistema di equazioni a derivate parziali del primo ordine:

$$\frac{\partial y}{\partial t_\alpha} = f_\alpha(t, y) \quad \text{per } \alpha = 1, \dots, p. \tag{4.12}$$

Possiamo anche scrivere un set di equazioni scalari,

$$\frac{\partial y_k}{\partial t_\alpha} = f^k_\alpha(t, y) \quad \alpha = 1, \dots, p \quad k = 1, \dots, n. \tag{4.13}$$

Osserviamo che il sistema (4.12) ammette due casi particolari noti. Il primo è quello della ricerca della primitiva di forme differenziali ($f_\alpha = f_\alpha(t)$ indipendente da y). Il secondo è quello delle equazioni ordinarie $y' = f(t, y)$ (in cui $\mathbb{R}^p = \mathbb{R}^1$). Il primo sottocaso suggerisce che ci debbano essere delle condizioni necessarie per l'esistenza di soluzioni di (4.13). Le individuiamo euristicamente richiedendo che le derivate miste di una soluzione $y = y(t)$ commutino.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t_\alpha}\frac{\partial}{\partial t_\beta} y = \frac{\partial}{\partial t_\alpha} f_\beta(t, y) &= \partial_\alpha f_\beta(t, y) + \sum_k \partial_k f_\beta(t, y) \frac{\partial y_k}{\partial t_\alpha} \\
&= \partial_\alpha f_\beta(t, y) + \sum_k \partial_k f_\beta(t, y) f^k_\alpha(t, y). \\
&= X_\alpha f_\beta(t, y)
\end{aligned}$$

dove abbiamo introdotto il campo vettoriale in $G \times \Omega$

$$X_\alpha = \partial_{t_\alpha} + \sum_k f^k_\alpha(t, y) \partial_{y_k} \tag{4.14}$$

La condizione $X_\alpha f_\beta = X_\beta f_\alpha$ può anche essere scritta nella forma

$$[X_\alpha, X_\beta] = 0.$$

Tale condizione è anche sufficiente per la risolubilità del sistema.

Teorema 4.15. *Sia $G \times \Omega \subset \mathbb{R}^p_t \times \mathbb{R}^n_y$ e siano $f_\alpha : G \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ delle funzioni di classe C^1* (19)
per $\alpha = 1, \dots, p$. Supponiamo che la famiglia di campi

$$X_\alpha = \partial_{t_\alpha} + \sum_k f^k_\alpha(t, y) \partial_{y_k}$$

sia commutativa: $[X_\alpha, X_\beta] = 0$ identicamente in $G \times \Omega$. Allora per ogni $(\bar{t}, \bar{y})$ esiste $\delta > 0$ e una funzione $\varphi : B(\bar{t}, \delta) \subset G \to \Omega$ di classe C^2 che risolve il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t_\alpha} = f_\alpha(t, y) \quad \forall \alpha = 1, \dots, p \\ y(\bar{t}) = \bar{y}. \end{cases} \tag{4.16}$$

Se $\psi : B(\bar{t}, \delta) \to \Omega$ è un'altra soluzione dello stesso problema, allora $\psi = \varphi$ su $B(\bar{t}, \delta)$.

[19] Notazioni $(t_\alpha, y_k) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^n$.

Un'applicazione tipica del teorema di esistenza ora provato è il Teorema di Bonnet sull'esistenza di superfici con forme fondamentali assegnate (vedere libro di Do Carmo).

Dimostrazione. Applichiamo il Teorema di Frobenius. La distribuzione fgenerata dai campi X_α per $\alpha = 1, \dots, p$ è involutiva di rango costante p. Allora esiste una superficie p-dimensionale Σ (di classe C^2 perché i campi sono C^1) che contiene $(\bar{t}, \bar{y})$ e che è una varietà integrale della distribuzione. Cioè:

$$T_{(t,y)}\Sigma = \operatorname{span}\{X_\alpha(t,y)\} = \operatorname{span}\Big\{e_\alpha + \sum_k f_\alpha^k(t,y)e_k : \alpha = 1, \dots, p\Big\} \quad \forall\ (t,y) \in \Sigma. \quad (4.17)$$

Abbiamo indicato con e_α, e_k i versori coordinati in $\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n$. Eventualmente rimpicciolendola un po', possiamo scrivere Σ in forma di luogo di zeri di una funzione $u \in C^2(W, \mathbb{R}^n)$ con differenziale di rango massimo $= n$ in un intorno aperto W di $(\bar{t}, \bar{y})$. Cioè $\Sigma = \{(t,y) \in W : u(t,y) = 0\}$. Poiché Σ è una varietà integrale, risulta

$$X_\alpha u(t,y) = \partial_\alpha u(t,y) + \sum_k f_\alpha^k(t,u)\partial_k u(t,y) = 0 \quad \forall\ (t,y) \in \Sigma.$$

Questo dice che per ogni α risulta $\partial_\alpha u(\bar{t}, \bar{y}) \in \operatorname{span}\{\partial_k u(\bar{t}, \bar{y}) : k = 1, \dots, n\}$. Quindi, nel punto $(\bar{t}, \bar{y}) \in \Sigma$,

$$n = \operatorname{rango} du(\bar{t}, \bar{y}) = \operatorname{rango}[\partial_{t_1}u, \dots, \partial_{t_p}u, \partial_{y_1}u, \dots, \partial_{y_n}u] = \operatorname{rango}[0, \dots, 0, \partial_{y_1}u, \dots, \partial_{y_n}u]$$

Ma allora la matrice $\dfrac{\partial u}{\partial y}(\bar{t}, \bar{y})$ è nonsingolare. Dunque per il teorema della funzione implicita esiste un rettangolo aperto $V' \times V'' \subset G \times \Omega$ che contiene il punto $(\bar{t}, \bar{y})$ e una funzione $\varphi : V' \to V''$ di classe C^2 con $\varphi(\bar{t}) = \bar{y}$ tale che

$$\Sigma \cap (V' \times V'') = \{(t, \varphi(t)) : t \in V'\}.$$

Possiamo quindi scrivere per ogni $t \in V'$

$$T_{(t,\varphi(t))}\Sigma = \operatorname{span}\{\partial_{t_\beta}(t, \varphi(t)) : \beta = 1, \dots, p\} = \operatorname{span}\Big\{e_\beta + \sum_k \frac{\partial}{\partial t_\beta}\varphi_k(t)e_k : \beta = 1, \dots, p\Big\}$$

Riscrivendo (4.17) con $y = \varphi(t)$ e confrontando le due scritture dello spazio tangente, otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t_\beta}\varphi(t) = f_\beta(t, \varphi(t)) \quad \forall t \in V'.$$

Abbiamo trovato la soluzione cercata.

Ora vediamo l'unicità. Se $\varphi, \psi : B(\bar{t}, \delta) \to \Omega$ sono soluzioni del problema (4.16) e se $t \in B(\bar{t}, \delta)$ è fissato, consideriamo $h(s) = \varphi(\bar{t} + s(t - \bar{t}))$ e $k(s) = \psi(\bar{t} + s(t - \bar{t}))$ con $s \in [0,1]$. Allora h soddisfa l'equazione ordinaria

$$h'(s) = \sum_\alpha \partial_\alpha \varphi(\bar{t} + s(t - \bar{t}))(t_\alpha - \bar{t}_\alpha) = \sum_\alpha f_\alpha(\bar{t} + s(t - \bar{t}), h(s))(t_\alpha - \bar{t}_\alpha) =: F(s, h(s)).$$

È facile vedere che k soddisfa la stessa equazione e che $h(0) = k(0)$. Dunque $h(1) = k(1)$ e la tesi segue dal teorema di unicità per le equazioni ordinarie. $\square$

Esercizio 4.18 (Per casa). *Verificare che i campi*

$$X_1 = \partial_{x_1} + \frac{2x_1x_3}{1+x_1^2+x_3^2}\partial_{x_3} \quad e \quad X_2 = \partial_{x_2} + \frac{2x_2x_3}{1+x_1^2+x_3^2}\partial_{x_3}$$

commutano. Calcolare i flussi $e^{tX_1}(z_1,z_2,z_3)$ *e* $e^{tX_2}(z_1,z_2,z_3)$*. Costruire infine, come fatto nalla dimostrazione del Teorema di Clebsch-Jacobi-Frobenius, la foglia bidimensionale* $\Sigma_{(0,0,z_3)}$ *contenente il punto* $(0,0,z_3)$*,*

$$\Sigma_{(0,0,z_3)} = \{e^{sX_2}e^{tX_1}(0,0,z_3) : (s,t) \in \mathbb{R}^2\} = \{e^{tX_2}e^{sX_1}(0,0,z_3) : (s,t) \in \mathbb{R}^2\}$$

4.3. Teorema di Bonnet

A titolo di applicazione dei risultati precedenti, prensentiamo il classico teorema di Bonnet sull'esistenza di (iper)superfici con prima e seconda forma fondamentale assegnate.

Un po' di preliminari. Consideriamo $U \subset \mathbb{R}^n$, un aperto contenennte $u = 0$ e una parametrizzazione $\Phi : U \mapsto \Phi(U) =: \Sigma$ di una superficie regolare $\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ immersa in $\mathbb{R}^{n+1}$. Prendiamo un punto $u \in U$ e indichiamo $P = \Phi(u)$ se ci fa comodo. Lo spazio tangente $T_P\Sigma$ è

$$T_{\Phi(u)}\Sigma = \operatorname{span}\{\Phi_\alpha(u) : \alpha = 1, \dots, n\}.$$

Usiamo equivalentemente le varie notazioni $\Phi_\alpha(u) = \Phi_{u_\alpha}(u) = \frac{\partial \Phi}{\partial u_\alpha}$ e via dicendo per indicare la derivata nel punto u. Identifichiamo tali vettori tangenti con gli operatori differenziali X_α, $\Phi_\alpha(u) \sim X_\alpha \in T_P\Sigma$ dove $X_\alpha g(P) = X_\alpha g(\Phi(u)) := \frac{\partial}{\partial u_\alpha}(g \circ \Phi)(u)$. Introduciamo il versore normale

$$N(u) = \nu(\Phi(u)) := \frac{\Phi_1 \times \Phi_2 \times \cdots \times \Phi_n}{|\Phi_1 \times \Phi_2 \times \cdots \times \Phi_n|}(u)$$

Dunque abbiamo le funzioni $N : U \to \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $\nu : \Sigma \to \mathbb{S}^n$. La mappa ν si chiama *mappa di Gauss* associata alla parametrizzazione Φ. La metrica euclidea su $T_P\Sigma$ la indichiamo con g. Dunque $g(X,Y) = \langle X, Y\rangle_{\text{Euc}}$ per $X, Y \in T_P\Sigma$. Nella base $\Phi_1, \dots, \Phi_n$ di $T_P\Sigma$ la matrice della forma quadratica è $g_{\alpha\beta}(u) := \langle \Phi_\alpha(u), \Phi_\beta(u)\rangle_{\text{Euc}}$ con $\alpha, \beta = 1, \dots, n$.

La mappa di Weingarten (anche detta *shape operator*) si definisce cosí: $L : T_P\Sigma \equiv T_{\Phi(u)}\Sigma \to \mathbb{R}^{n+1}$,

$$L(X) := -d\nu(P)X, \quad \text{per } X \in T_P\Sigma.$$

Se $X = \partial_\alpha \Phi(u) \equiv \Phi_\alpha = \frac{d}{dt}\Phi(u + te_\alpha)|_{t=0}$, allora

$$L(\Phi_\alpha) = -d\nu(P)\Big(\frac{d}{dt}\Phi(u+te_\alpha)|_{t=0}\Big) = -\frac{d}{dt}\nu\Phi(u+te_\alpha)|_{t=0} = -\partial_{u_\alpha}N(u) \equiv -N_\alpha(u)$$

Proprietà:

(i) L prende valori in $T_P\Sigma$. Infatti $0 = \partial_\alpha\langle N, N\rangle = 2\langle \partial_\alpha N, N\rangle = -2\langle L(\Phi_\alpha), N\rangle$ per ogni $\alpha = 1. \dots, n$.

(ii) Vale $L = L^t$, rispetto al prodotto euclideo. Infatti, per ogni α, β,

$$\langle L\Phi_\alpha, \Phi_\beta\rangle = \langle -\partial_{u_\alpha}N, \Phi_\beta\rangle = -\partial_\alpha\langle N, \Phi_\beta\rangle + \langle N, \partial_{\alpha\beta}\Phi\rangle = \langle N, \partial_{\alpha\beta}\Phi\rangle. \tag{4.19}$$

Poiché a destra c'è simmetria tra α, β, risulta $L = L^t$. Indichiamo con h_α^β le componenti di L nella base $\Phi_1, \dots \Phi_n$. Cioè

$$L\Phi_\alpha =: h_\alpha^\beta \Phi_\beta, \quad \text{sommato sull'indice ripetuto } \beta.$$

(iii) Alla luce del conto precedente, la funzione $(X, Y) \mapsto II(X, Y) := \langle LX, Y \rangle$ è una forma bilineare simmetrica sullo spazio tangente. Possiamo rappresentarla attraverso la matrice $h_{\alpha\beta}(u) := \langle L\Phi_\alpha, \Phi_\beta \rangle(u)$ per ogni α, β. Notiamo che

$$h_{\alpha\beta} = \langle L\Phi_\alpha, \Phi_\beta \rangle = g(h_\alpha^\gamma \Phi_\gamma, \Phi_\beta) = h_\alpha^\gamma g_{\gamma\beta}$$

Ora ricerchiamo delle condizioni necessarie e sufficienti affinché due assegnate funzioni matriciali $g_{\alpha\beta}$ e $h_{\alpha\beta}$ su un aperto U possano essere prima e seconda forma fondamentale di una superficie parametrizzata $\Sigma = \Phi(U)$.

Partiamo dalle condiziioni necessarie che si ottengono prendendo una parametrizzazione Φ, differenziando gli $n+1$ campi $\Phi_1, \dots, \Phi_n, N$ e vedendo cosa succede. Ricordiamo subito che $\langle \Phi_{\alpha\beta}, N \rangle = h_{\alpha\beta}$. Dunque, otteniamo le formule

$$\Phi_{\beta\gamma} =: \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \Phi_\sigma + h_{\alpha\gamma} N \tag{4.20}$$

$$N_\alpha = -h_\alpha^\sigma \Phi_\sigma \tag{4.21}$$

I termini h_α^σ e $h_{\alpha\gamma}$ sono quelli per la definizione della seconda forma e per (4.19). I coefficienti $\Gamma_{\beta\gamma}^\sigma$ sono definiti univocamente dalla prima riga e si chiamano simboli di Christoffel. Osserviamo la simmetria $\Gamma_{\beta\gamma}^\sigma$. Notiamo anche che i simboli possono essere espressi in termini della metrica g. Basta prendere la relazione

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = \partial_\alpha \langle \Phi_\beta, \Phi_\gamma \rangle = \langle \Phi_{\alpha\beta}, \Phi_\gamma \rangle + \langle \Phi_\beta, \Phi_{\alpha\gamma} \rangle,$$

inserire la (4.20) a destra e permutare gli indici opportunamente. Si trova

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\gamma\mu} \{ \partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} \}. \tag{4.22}$$

Ora richiediamo l'uguaglianza $\partial_\alpha \Phi_{\beta\gamma} - \partial_\beta \Phi_{\alpha\gamma} = 0$. Fatti un po' di conti si trova che

$$\partial_\alpha \Phi_{\beta\gamma} = \dots = \big(\partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda + \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \Gamma_{\alpha\sigma}^\lambda - h_{\beta\gamma} h_\alpha^\lambda \big) \Phi_\lambda + (\partial_\alpha h_{\beta\gamma} + \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma h_{\alpha\sigma}) N$$

dove abbiamo separato comonente normale e tangente. Scambiando α, β e sottraendo si trovano le due equazioni

$$\partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda + \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \Gamma_{\alpha\sigma}^\lambda - \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\lambda - h_{\beta\gamma} h_{\alpha\mu} g^{\mu\sigma} + h_{\alpha\gamma} h_{\beta\mu} g^{\mu\lambda} = 0 \quad \text{Gauss} \tag{4.23}$$

e

$$\partial_\alpha h_{\beta\gamma} - \partial_\beta h_{\alpha\gamma} + \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma h_{\alpha\sigma} - \Gamma_{\alpha\gamma}^\alpha h_{\beta\sigma} = 0 \quad \text{Codazzi} \tag{4.24}$$

[20] L'analisi della condizione $\partial_\alpha N_\beta = \partial_\beta N_\alpha$ conduce di nuovo all'equazione di Codazzi (verifica omessa).

Abbiamo trovato delle condizioni necessarie – le equazioni di Gauss e Codazzi – affinché due funzioni matriciali $g > 0$ e h possano essere prima e seconda forma di una parametrizzazione Φ. Ora la parte che ci interessa, cioè la parte sufficiente.

[20] Se si introduce la connessione Riemanniana ∇ sulla superficie e la sua curvatura R, tali equazioni si esprimono elegantemente cosí:

$$R_{\alpha\beta\gamma\lambda} = -h_{\alpha\lambda} h_{\beta\gamma} + h_{\alpha\gamma} h_{\beta\lambda} \quad \text{e } \nabla_\alpha h_{\beta\gamma} - \nabla_\beta h_{\alpha\gamma}. \tag{4.25}$$

Notiamo che il membro di sinistra della prima dipende solo dalla g e non dalla h.

Teorema 4.26 (Esistenza di ipersuperfici con forme assegnate)**.** *Sia U è un aperto di $\mathbb{R}^n$ e siano assegnate $g : U \to \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica e positiva per ogni u e $h : U \to \mathbb{R}^{n\times n}$, simmetrica. Supponiamo che, definite $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ come in (4.22), risultino soddisfatte le equazioni di Gauss e Codazzi. Allora, dato $\overline{u} \in U$, assegnato un punto $\overline{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$, dei vettori $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ che soddisfino $\langle v_\alpha, v_\beta\rangle = g_{\alpha\beta}(\overline{u})$, esiste $\delta > 0$ ed esiste una (unica) funzione $\Phi : B(\overline{u}, \delta) \to \mathbb{R}^{n+1}$ che soddisfa $\Phi(\overline{u}) = \overline{x}$, $\partial_j\Phi(0) = v_j$, che soddisfa $g(\Phi_\alpha(u), \Phi_\beta(u)) = g_{\alpha\beta}(u)$ e la cui seconda forma fondamentale rispetto alla normale $\frac{\Phi_1\times\cdot\times\Phi_n}{|\Phi_1\times\cdot\times\Phi_n|}$ è $h_{\alpha\beta}(u)$ per ogni $u \in B(\overline{u}, \delta)$.*

Dimostrazione. Siano $g_{\alpha,\beta}, h_{\alpha\beta}$ le funzioni assegnate su U e sia $\overline{u} \in U$, assieme alla famiglia di vettori v_α tali che $\langle v_\alpha, v_\beta\rangle = g_{\alpha\beta}(\overline{u})$. [21]. Definiamo le funzioni $u \mapsto \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}(u)$ come in (4.22).

Passo 1. Individuiamo intanto le derivate della funzione Φ, o piú precisamente la $(n+1)$-pla candidata per i campi $\Phi_1(u), \dots, \Phi_n(u), N(u)$.

Cerchiamo funzioni $u \mapsto (\xi_1(u), \dots, \xi_n(u), \eta(u)) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \cdots \mathbb{R}^{n+1}$ dove $u \in \mathbb{R}^n$ è vicino a $\overline{u} = 0$ e che soddisfino il sistema di PDE

$$\begin{cases} \partial_\alpha\xi_\beta = \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\xi_\gamma + h_{\alpha\beta}\eta \\ \partial_\alpha\eta = -h^{\sigma}_{\alpha}\xi_\sigma \\ \text{con } \xi_\alpha(0) = v_\alpha \text{ e } \eta(0) = \dfrac{v_1\times\cdots\times v_n}{|v_1\times\cdots\times v_n|} \end{cases} \tag{4.27}$$

Questo è un sistema di tipo Jacobi. L sue condizioni di integrabilità sono esattamente le equazioni di Gauss e Codazzi. Dunque, in un opportuno intorno sv=ferico dell'origine abbiamo una soluzione unica $u \mapsto (\xi_1(u), \dots, \xi_n(u), \eta(u))$.

Passo 2. Proviamo $\langle\xi_\alpha(u), \xi_\beta(u)\rangle = g_{\alpha\beta}(u)$, che $\langle\xi_\alpha(u), \eta(u)\rangle = 0$ e infine che $|\eta(u)| = 1$ per ogni u vicino a 0, oltre che in $u = 0$. Consideriamo ora le funzioni

$$u \mapsto (\langle\xi_\alpha(u), \xi_\beta(u)\rangle, \langle\xi_\alpha(u), \eta(u)\rangle, |\eta(u)|^2) =: (G_{\alpha\beta}(u), G_{\alpha 0}(u), G_{00}(u)).$$

Usando (4.27) si vede che tali funzioni soddisfano il sistema (lineare) di PDE di tipo Jacobi seguente:

$$\begin{cases} \partial_\gamma G_{\alpha\beta} = \Gamma^{\sigma}_{\gamma\alpha}G_{\sigma\beta} + h_{\alpha\gamma}G_{\beta 0} + \Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma}G_{\alpha\sigma} + h_{\beta\gamma}G_{\alpha 0} \\ \partial_\gamma G_{\alpha 0} = \Gamma^{\sigma}_{\alpha\gamma}G_{\sigma 0} + h_{\alpha\gamma}G_{00} - h^{\sigma}_{\gamma}G_{\alpha\sigma} \\ \partial_\gamma G_{00} = -2h^{\sigma}_{\gamma}G_{\sigma 0} \end{cases} \tag{4.28}$$

Per costruzione, le funzioni

$$u \mapsto (g_{\alpha\beta}(u), 0_n, 1)$$

risolvono lo stesso sistema di equazioni con le stesse condizioni iniziali. Di conseguenza, dall'unicità per questo tipo di sistemi, si ottiene l'uguaglianza di queste due famiglie ei funzioni.

[21]Data una matrice simmetrica positiva $g = g_{\alpha\beta}(0)$, esiste sempre una famiglia (non unica) $v_1, \dots, v_n$ di vettori nello spazio eucludeo $\mathbb{R}^n$ che soddisfino $\langle v_\alpha, v_\beta\rangle = g_{\alpha\beta}(0)$

Passo 3. Costruiamo la funzione $\Phi : B(0,\delta) \to \mathbb{R}^{n+1}$ cercandola sotto forma di soluzione del sistema

$$\begin{cases} \partial_\alpha \Phi(u) = \xi_\alpha(u) \\ \Phi(0) = \overline{x} \end{cases} \tag{4.29}$$

La forma differenziale è integrabile, perché il sistema (4.27) assicura che $\partial_\alpha \xi_\alpha = \partial_\beta \xi_\alpha$.

Basta infine osservare che, dette $g^\Phi_{\alpha\beta}(u) = \langle \Phi_\alpha(u), \Phi_\beta(u) \rangle$, e indicata la normale associata a Φ con $N^\Phi(u) := \frac{\Phi_1 \times \cdot \times \Phi_n}{|\Phi_1 \times \cdot \times \Phi_n|}(u)$, risulta, come volevamo

$$g^\Phi_{\alpha\beta}(u) = g_{\alpha\beta}(u) \quad \forall u.$$

Inoltre, la seeconda forma associata a Φ risulta, in ogni punto u dove è definita Φ,

$$h^\Phi_{\alpha\beta} := \langle \Phi_{\alpha\beta}, N^\Phi \rangle = \langle \partial_\alpha \xi_\beta, N^\Phi \rangle = \left\langle \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \Phi_\sigma + h_{\alpha\beta} N^\Phi, N^\Phi \right\rangle = h_{\alpha\beta},$$

come si voleva. □

5. Campi di Hörmander

Definizione 5.1 (Orbita)**.** *Data $\mathcal{H} = \{X_1, \dots, X_m\}$, famiglia di campi C^1 in $\mathbb{R}^n$, definiamo l'orbita uscente da x come l'insieme dei punti che si possono connettere a x con una spezzata integrale di campi di $\mathcal{H}$*

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_x \equiv \mathcal{O}_x = \{ y \in \mathbb{R}^n & \textit{che si scrivono nella forma } y = e^{t_1 Z_1} \circ \cdots \circ e^{t_\nu Z_\nu} x \\ & \textit{per opportuni } \nu \in \mathbb{N}, t_j \in \mathbb{R} \textit{ e } Z_j \in \mathcal{H} \ \} \end{aligned}$$

Se introduciamo la relazione $x \sim y$ quando $y \in \mathcal{O}_x$, allora abbiamo una relazione di equivalenza e $\mathbb{R}^n$ si scrive come unione disgiunta di orbite. Inoltre osserviamo che punti sulla stessa orbita hanno distanza cc finita:

$$d_{\mathrm{cc}}(e^{t_1 Z_1} \circ \cdots \circ e^{t_\nu Z_\nu} x, x) \le |t_1| + \cdots + |t_\nu|. \tag{5.2}$$

Ora introduciamo la condizione di Hörmander. Notazioni: data una parola $w = w_1 w_2 \cdots w_\ell$ di lunghezza ℓ nell'alfabeto $\{1, 2, \cdots, m\}$ (cioè $w_j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ per ogni j), poniamo

$$X_w = [X_{w_1}, [X_{w_2}, \dots, [X_{w_{\ell-1}}, X_{w_\ell}] \cdots]]$$

Diciamo che X_w è un commutatore di lunghezza $|w| = \ell$.

Definizione 5.3 (Campi di Hörmander)**.** *La famiglia $X_1, \dots, X_m$ di campi C^∞ in $\mathbb{R}^n$ si dice di Hörmander se per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esiste $s \in \mathbb{N}$ tale che*

$$\operatorname{span}\{X_w(x) : |w| \le s\} = \mathbb{R}^n. \tag{5.4}$$

Se $\operatorname{span}\{X_w(x) : |w| \le s\} = \mathbb{R}^n$ *per ogni x in un aperto Ω, diciamo che i campi hanno passo s in Ω.*

Esempio 5.5. *Ecco alcuni esempi.*

- *I campi $X = \partial_x$ e $Y = x^k \partial_y$ nel piano.*
- *I campi $X = \partial_x + 2y\partial_t$ e $Y = \partial_y - 2x\partial_t$.*
- *I campi $X = \partial_x + 2m|z|^{2(m-1)} y \partial_t$ e $Y = \partial_y - 2m|z|^{2(m-1)} x \partial_t$ con $m = 1, 2, \dots$ in $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \ni (x, y, t) = z, t)$*
- *I campi $X = \partial_x$ e $Y = \exp(-1/x^2)\partial_y$.*

5.1. Il Teorema di connettività di Chow–Rashevskii

Teorema 5.6 (Teorema di Chow–Rashevskii). *Siano $X_1, \dots, X_m$ dei campi di classe C^∞ in $\mathbb{R}^n$ che soddisfano la condizione di Hörmander. Allora ogni coppia di punti $x, y \in \mathbb{R}^n$ può essere connessa tramite una spezzata integrale di campi della famiglia $X_1, \dots, X_m$. Inoltre la distanza di Carnot–Carathéodory definita dai campi $X_1, \dots, X_m$ è continua: cioè per ogni $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ vale*

$$\lim_{|x-x_0|\to 0} d_{cc}(x, y_0) = d_{cc}(x_0, y_0). \tag{5.7}$$

Osservazione 5.8. *Il teorema di Chow–Rashevskii, assieme alla Proposizione 2.10, prova che la topologia indotta dalla distanza di CC è la topologia euclidea in $\mathbb{R}^n$. Questo però non significa che le distanze sono equivalenti.*

Premettiamo il seguente lemma. [22]

Lemma 5.9. *Sia $\mathcal{H} = \{X_1, \dots, X_m\}$ una famiglia di campi vettoriali di Hörmander in $\mathbb{R}^n$. Proviamo che per ogni punto x_0 e per ogni intorno dell'origine $V =]-\varepsilon, \varepsilon[^n \subset \mathbb{R}^n$ esistono campi $Z_1, \dots, Z_n \in \mathcal{H}$ ed esiste $(\widehat{s}_1, \dots, \widehat{s}_n) \in V$ in modo che la funzione*

$$\psi(s) := e^{s_n Z_n} \cdots e^{s_2 Z_2} e^{s_1 Z_1} x_0$$

abbia differenziale non singolare in $\widehat{s}$.

Osservazione sul lemma.

- La catena di esponenziali è fatta esattamente da n tratti, dove n è la dimensione dello spazio ambiente.
- Non si può scegliere $\hat{s} = 0$, a meno che i campi non generino uno spazio di dimensione n in x_0 (condizione di Hörmander "di passo uno").
- Esempio. Analisi nel caso dei campi di Heisenberg della nonsingolarità di

$$\psi(s_1, s_2, s_3) = e^{s_3 X} e^{s_2 Y} e^{s_1 X}(0, 0, 0).$$

Dimostrazione. Sia x_0 un punto fissato sia $\varepsilon > 0$. (21)

Passo 1. Esiste $Z_1 \in \mathcal{H}$ tale che $Z_1(x_0) \neq 0$. Altrimenti sarebbe violata la condizione di Hörmander. Dunque è definita una varietà di dimensione uno

$$\Sigma_1 := \{e^{sZ_1} x_0 : |s| < \delta\}$$

dove $\delta < \varepsilon$ è piccolo abbastanza affinché $e^{tZ_1} x_0$ esista su $(-\delta, \delta)$. Notiamo che Z_1 è tangente a Σ_1 ed è non nullo in ogni punto di Σ_1.

Passo 2. Ci sono due possibilità :

(A): $X_j(e^{sZ_1} x_0)$ è tangente a Σ_1 per ogni $|s| < \delta$ e per ogni $j = 1, \dots, m$;

(B) Esiste un tempo $\bar{s}_1 \in (-\delta, \delta)$ ed esiste $Z_2 \in H$ tale che $Z_2(e^{\bar{s}_1 Z_1} x_0)$ non è tangente a Σ_1.

Notiamo che la possibilità (A) non può verificarsi; altrimenti sarebbe violata la condizione di Hörmander. Quindi deve valere (B). Consideriamo la funzione

$$\psi_2(s_1, s_2) = e^{s_2 Z_2} e^{s_1 Z_1} x_0,$$

[22] Seguiamo la dimostrazione nelle note di Agrachev, Barilari e Boscain già menzionate.

definita in un piccolo aperto contenente $(\bar{s}_1, 0)$. Osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial s_2}\psi_2(\bar{s}_1, 0) = Z_2(e^{\bar{s}_1 Z_1}x_0) \quad \text{e} \qquad \frac{\partial}{\partial s_1}\psi_2(\bar{s}_1, 0) = Z_1(e^{\bar{s}_1 Z_1}x_0)$$

sono indipendenti. A questo punto il Lemma è provato se siamo in $\mathbb{R}^2$. Altrimenti, se $n \geq 3$, scegliamo $\sigma > 0$ tale che $]\bar{s}_1 - \sigma, \bar{s}_1 + \sigma[\times]-\sigma, \sigma[\subset]-\varepsilon, \varepsilon[^2$. Se σ è sufficientemente piccolo, l'insieme

$$\Sigma_2 := \{\psi_2(s) = e^{s_2 Z_2} e^{s_1 Z_1} x_0 : s \in]\bar{s}_1 - \sigma, \bar{s}_1 + \sigma[\times]-\sigma, \sigma[\}$$

è una varietà bidimensionale parametrizzata da ψ_2. In particolare $\frac{\partial}{\partial s_1}\psi_2(s_1, s_2)$ e $\frac{\partial}{\partial s_2}\psi_2(s_1, s_2)$ sono indipendenti e generano $T_{\psi_2(s)}\Sigma_2$ per ogni $s \in]\bar{s}_1 - \sigma, \bar{s}_1 + \sigma[\times]-\sigma, \sigma[$.

Passo 3. Ci sono due possibilità :

(A) tutti i vettori $X_j \in \mathcal{H}$ sono tangenti a Σ_2;

(B) esiste un campo Z_3 ed esiste $(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) \in]\bar{s}_1 - \sigma, \bar{s}_1 + \sigma[\times]-\sigma, \sigma[$ tale che $Z_3(e^{\tilde{s}_2 Z_2} e^{\tilde{s}_1 Z_1} x_0)$ non è tangente a Σ_2.

Il caso (A) contraddice la condizione di Hörmander. Allora poniamo

$$\psi_3(s_1, s_2, s_3) = e^{s_3 Z_3} e^{s_2 Z_2} e^{s_1 Z_1} x_0.$$

I tre vettori

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial s_1}\psi_3(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, 0) &= \frac{\partial}{\partial s_1}\psi_2(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) \in T_{\psi_2(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)}\Sigma_2, \\
\frac{\partial}{\partial s_2}\psi_3(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, 0) &= \frac{\partial}{\partial s_2}\psi_2(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) \in T_{\psi_2(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)}\Sigma_2 \quad \text{e} \\
\frac{\partial}{\partial s_3}\psi_3(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, 0) &= Z_3(\psi_3(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, 0)) = Z_3(\psi_2(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)) \notin T_{\psi_2(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)}\Sigma_2
\end{aligned}$$

sono indipendenti. La dimostrazione è conclusa se $n = 3$.

Iterando il ragionamento al massimo n volte, il Lemma è provato. □

Dimostrazione del teorema di Chow. Fissiamo x_0, ε e applichiamo il Lemma precedente che fornisce la mappa

$$\psi(s_1, \ldots, s_n) = e^{s_n Z_n} \cdots e^{s_1 Z_1} x_0.$$

Tale mappa è un diffeomorfismo da un intorno aperto $U_\varepsilon \subset]-\varepsilon, \varepsilon[^n$ di $(\widehat{s}_1, \ldots, \widehat{s}_n)$ sull'aperto $\psi(U_\varepsilon)$ contenente $\psi(\widehat{s})$.

Ora definiamo

$$\varphi(y) = e^{-\widehat{s}_1 Z_1} \cdots e^{-\widehat{s}_n Z_n} y$$

per y vicino a $\psi(\widehat{s})$. Notiamo che $\varphi(\psi(\widehat{s})) = x_0$. Inoltre, per le proprietà dei flussi di campi vettoriali, φ è un diffeomorfismo con dominio un aperto contenente $\psi(\widehat{s})$ (vedere la stima sul determinante del paragrafo 1.5).

Dunque, per s in un aperto convenientemente piccolo $G \subset]-\varepsilon, \varepsilon[^n$ e contenente $\widehat{s}$ possiamo definire

$$F(s) = \varphi \circ \psi(s) = e^{-\widehat{s}_1 Z_1} \cdots e^{-\widehat{s}_n Z_n}(e^{s_n Z_n} \cdots e^{s_1 Z_1} x_0).$$

Poiché $dF(\widehat{s}) = d\varphi(\psi(\widehat{s}))d\psi(\widehat{s})$ è non singolare, per il teorema di invertibilità locale, la funzione F è aperta in $\widehat{s}$. In particolare, esistono σ e $\delta > 0$ tali che $B(\widehat{s}, \sigma) \subset G$ e

$$F(B_{\mathrm{Euc}}(\widehat{s}, \sigma)) \supset B_{\mathrm{Euc}}(x_0, \delta). \tag{5.10}$$

Essendo ciascuna delle spezzate integrali che compongono F lunga al massimo ε, per ogni punto $z \in F(B_{\mathrm{Euc}}(\widehat{s}, \sigma))$ vale $d_{\mathrm{cc}}(z, x_0) \leq 2n\varepsilon$.

In sintesi, abbiamo verificato quanto segue: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$d_{\mathrm{cc}}(z, x_0) \leq 2n\varepsilon \quad \text{per ogni } z \text{ che soddisfi } |z - x_0| < \delta.$$

Dunque

$$\lim_{|z-x_0|\to 0} d_{\mathrm{cc}}(z, x_0) = 0 \tag{5.11}$$

per ogni $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Questo prova la continuità della distanza sulla diagonale.

Per riconoscere che ogni coppia di punti può essere connessa tramite una spezzata integrale, ricordiamo che, data una qualsiasi famiglia di campi, $\mathbb{R}^n$ si decompone come unione disgiunta di orbite della famiglia. Ma l'inclusione (5.10) prova che ciascuna di tali orbite è aperta nella topologia euclidea. Di conseguenza, per connessione, possiamo affermare che c'è una sola orbita $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$. In particolare $d_{\mathrm{cc}}(x, y) < \infty$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

La continuità scritta in (5.7) segue subito da (5.11) e dalla disuguazlianza triangolare per d_{cc}. $\square$