

Appunti di Analisi matematica

Laurea magistrale LMSSFA Rimini

21 settembre 2014

Indice

1	Numeri reali	2
1.1	Massimo, minimo estremo superiore e inferiore	2
2	Successioni e serie di numeri reali	4
2.1	Successioni numeriche	4
2.2	Sottosuccessioni e Teorema di Bolzano–Weierstrass.	6
2.3	Esercizi per casa	7
2.4	Successioni di Cauchy	8
2.5	Serie numeriche	9
2.6	Esercizi per casa	12
3	Lo spazio \mathbb{R}^d	13
3.1	Prodotto scalare, norma e loro proprietà	13
3.2	Successioni convergenti in \mathbb{R}^d	14
3.3	Topologia elementare di \mathbb{R}^d	15
3.4	Funzioni	16
3.5	Esercizi per casa	18
3.6	Successioni di funzioni convergenti puntualmente e uniformemente	19
4	Elementi di teoria della misura	21
4.1	Funzioni iniettive/suriettive/biiettive	21
4.2	Insiemi numerabili	21
4.3	Misure su σ -algebre	22
4.4	Esercizi per casa	25
4.5	Scatole e misura esterna di Lebesgue in \mathbb{R}^d	26
4.6	Insiemi misurabili secondo Lebesgue in \mathbb{R}^d	28
4.7	Funzioni misurabili e integrale	29
4.8	Misurabilità e passaggi al limite	33
4.9	Teoremi di riduzione	37
4.10	Convergenza in media e in misura	38
5	Esercizi di riepilogo con soluzioni	39
5.1	Soluzioni	42
6	Esercizi tratti da prove scritte recenti	45

Riferimenti bibliografici

- [L] J. Lebl, Basic Analysis: Introduction to Real Analysis , reperibile liberamente, assieme ad altro materiale, al link <http://www.aimath.org/textbooks/textbooklist.html>
- [SB] C. P. Simon, L. E. Blume, Matematica 2, per l’Economia e la Scienze sociali, Università Bocconi Editore. Reperibile in biblioteca.
- [R] W.. Rudin, Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. ¹

¹Reperibile in biblioteca <http://sol.unibo.it/SebinaOpac/Opac?sysb=UBORI>

Il libro [L] contiene materiale ed esercizi su successioni e serie. Il testo [SB] contiene nella parte iniziale una discussione su insiemi aperti, chiusi e funzioni continue in più variabili. Il libro [R] tratta la teoria della misura.

1. Numeri reali

Richiamiamo le notazioni per i numeri naturali

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\},$$

per i numeri *interi*

$$\mathbb{Z} := \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$$

e per i numeri *razionali*

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ogni numero $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ si può scrivere come allineamento decimale “numero con la virgola” limitato o illimitato periodico. Esempi di numeri razionali sono

$$-\frac{3}{4} = -0.75 \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{3} = 0.\bar{3} \quad \text{oppure} \quad \frac{103}{33} = 3.\bar{12}.$$

Ci sono però numeri che non sono razionali. Essi sono allineamenti decimali illimitati non periodici. Ad esempio, si può dimostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\pi = 3.14\dots \notin \mathbb{Q}$.

L'insieme costituito dai numeri decimali di qualsiasi tipo (limitati o illimitati) è l'insieme dei numeri reali

$$\mathbb{R} = \{a_0, a_1 a_2 a_3 \dots : a_0 \in \mathbb{Z} \text{ e } a_k \in \{0, 1, \dots, 9\} \text{ se } k \geq 1\}.$$

Abbiamo l'inclusione (stretta) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.²

Nell'insieme dei numeri reali, consideriamo la relazione di disuguaglianza \leq , con le consuete proprietà. In particolare, ricordiamo che tra due qualsiasi numeri reali x e y vale *esattamente una* delle seguenti tre proprietà:

$$x < y, \quad x = y \quad \text{o} \quad x > y.$$

Una conseguenza di tale fatto è la seguente proposizione

Proposizione 1.1. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Se vale $a \leq b + \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, allora è $a \leq b$.*

Dimostrazione. Assumiamo per assurdo $a > b$. Nell'ipotesi $a \leq b + \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ scegliamo $\varepsilon = (a - b)/2$. Questo produce

$$a \leq b + \frac{a - b}{2},$$

che implica $a \leq b$. Quindi abbiamo una contraddizione. □

1.1. Massimo, minimo estremo superiore e inferiore

Definizione 1.2 (massimo e minimo). *Sia $A \subset \mathbb{R}$ è un insieme di numeri reali. Un numero $b \in \mathbb{R}$ si dice massimo di A se*

- $b \in A$
- $b \geq a$ per ogni $a \in A$.

In tal caso si scrive $b = \max A$.

Un numero $b \in \mathbb{R}$ si dice minimo di A se

² Uno studio dettagliato del sistema dei numeri reali è fuori dallo scopo di questo corso. Ad esempio: qual è il significato concreto di un allineamento decimale $a_0, a_1 a_2 \dots$? Se $x = a_0.a_1 a_2 \dots$ e $y = b_0.b_1 b_2 \dots$, che cos'è xy ?

- $b \in A$
- $b \leq a$ per ogni $a \in A$.

In tal caso si scrive $b = \min A$.

Osserviamo subito che, se esistono, $\max A$ e $\min A$ sono unici.

Esempio 1.3. $A = [0, 1[$ ha minimo 0, ma non esiste $\max A$. L'insieme $B =]-\infty, 2]$ non ha minimo.

Definizione 1.4 (maggioranti e minoranti di un insieme di numeri reali). Un numero $b \in \mathbb{R}$ si dice maggiorante di $A \subset \mathbb{R}$ se risulta

$$b \geq a \quad \text{per ogni } a \in A.$$

Un numero $b \in \mathbb{R}$ si dice minorante di $A \subset \mathbb{R}$ se risulta

$$b \leq a \quad \text{per ogni } a \in A.$$

Ad esempio, 3 è un maggiorante di $[0, 1[$. Entrambi i numeri -2 e 0 sono minoranti dello stesso insieme $[0, 1[$. Infine, $[0, +\infty[$ non ha maggioranti.

Definizione 1.5 (insieme superiormente/inferiormente limitato). Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice superiormente limitato se ammette maggioranti. Si dice inferiormente limitato se ammette minoranti. Infine diciamo che $A \subset \mathbb{R}$ è limitato se è sia superiormente che inferiormente limitato.

Ad esempio, \mathbb{N} è inferiormente ma non superiormente limitato.

Definizione 1.6 (estremo superiore/inferiore). Sia $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato. L'estremo superiore di A è il più piccolo di tutti i maggioranti di A . Esso si indica con il simbolo $\sup A$:

$$\sup A := \min\{\text{maggioranti di } A\}.$$

Se A è inferiormente limitato, allora l'estremo inferiore di A è il più grande di tutti i minoranti di A . Esso si indica con il simbolo $\inf A$:

$$\inf A := \max\{\text{minoranti di } A\}.$$

Se $A \subset \mathbb{R}$ non è superiormente limitato, allora si scrive/dice che $\sup A = +\infty$. Se infine $A \subset \mathbb{R}$ non è inferiormente limitato, allora si scrive/dice che $\inf A = -\infty$.

In altre parole, un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è estremo superiore di A se valgono:

- λ è un maggiorante di A .
- $\lambda \leq \mu$ per ogni μ maggiorante di A .

Osservazione 1.7. Osserviamo che:

- un insieme A può non avere estremo superiore/inferiore (ad esempio $A = [0, +\infty[$ non ha estremo superiore perché non ha maggioranti). In tal caso si dice che $\sup A = +\infty$.
- Se l'estremo superiore $\sup A$ esiste, allora esso è unico. Lo stesso vale per $\inf A$.
- Se $b = \max A$, allora $b = \sup A$. Il viceversa non è vero. Analizzare ad esempio l'insieme $A = [0, 1[$.

Esempio 1.8. Se $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, allora $\max A = \sup A = 1$, mentre $\inf A = 0$. L'insieme A non ha minimo.

Proposizione 1.9 (Proprietà di approssimazione). Sia $A \subset \mathbb{R}$, con $\sup A \in \mathbb{R}$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $a_\varepsilon \in A$ tale che $a_\varepsilon > \sup A - \varepsilon$. Se invece A non è superiormente limitato ($\sup A = +\infty$), allora per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste $a_\lambda \in A$ tale che $a_\lambda > \lambda$.

Scambiando inf e sup, si trova l'affermazione equivalente: se $\inf A \in \mathbb{R}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $a_\varepsilon < \inf A + \varepsilon$. Infine, se $\inf A = -\infty$, possiamo trovare per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ un numero $a_\lambda \in A$ con $a_\lambda < \lambda$.

Proprietà di completezza di \mathbb{R} . Ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ammette estremo superiore.³

Osservazione 1.10. Sato $A \subset \mathbb{R}$, superiormente limitato. Poniamo $-A = \{-a : a \in A\}$. È facile verificare che $\sup(-A) = -\inf A$ (farlo come esercizio). Usando questo fatto, si trova l'affermazione equivalente: ogni insieme inferiormente limitato è dotato di estremo inferiore.

2. Successioni e serie di numeri reali

2.1. Successioni numeriche

Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di numeri $a_n \in \mathbb{R}$ indicizzata da un parametro $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 2.1 (successione convergente). Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. La successione si dice convergente se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ con la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - \lambda| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > n_\varepsilon.$$

In tal caso si scrive $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda$.

Definizione 2.2 (successione divergente). Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice divergente a $+\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $n_M > 0$ tale che

$$a_n > M \quad \text{per ogni } n > n_M.$$

In tal caso si scrive $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Con ovvie modifiche si definisce una successione divergente a $-\infty$. Può infine avvenire che una successione non sia né convergente, né divergente.

Esempio 2.3. Discussione degli eventuali limiti delle successioni di termini a_n definiti sotto:

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_n = (-1)^n, \quad a_n = n^2.$$

Osservazione 2.4 (Calcolo dei limiti tramite passaggio al continuo). Sia (a_n) una successione e sia $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione che soddisfa $f(n) = a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda$, risulta anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lambda$.

I seguenti fatti sull'algebra dei limiti sono del tutto analoghi a quelli studiati nei corsi elementari:

Proposizione 2.5. Se $a_n \rightarrow \lambda$ e $b_n \rightarrow \mu$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora:

- $a_n + b_n \rightarrow \lambda + \mu$;
- $a_n b_n \rightarrow \lambda \mu$;
- $a_n / b_n \rightarrow \lambda / \mu$, purché $\mu \neq 0$.⁴

³Si può dimostrare che la proprietà di completezza è falsa in \mathbb{Q} . Ad esempio, l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ non ammette estremo superiore $\lambda \in \mathbb{Q}$, pur essendo superiormente limitato.

⁴Osserviamo che se $b_n \rightarrow \mu \neq 0$, allora $b_n \neq 0$ per n sufficientemente grande. Quindi a_n / b_n è ben definita, almeno per n grande.

Nel caso in cui λ o μ assumano valori $\pm\infty$, si usano le consuete regole sull'algebra dei limiti. Infine, le forme $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ e 1^∞ sono forme indeterminate.

Proposizione 2.6 (unicità del limite). Se $a_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ e $a_n \rightarrow M \in \mathbb{R}$, allora $L = M$.

Dimostrazione. Assumiamo per assurdo che $a_n \rightarrow L$ e $a_n \rightarrow M$, supponendo che $L < M$. Applicando la definizione di limite con $\varepsilon = |M - L|/4$, troviamo che esiste $n' \in \mathbb{N}$ tale che

$$L - \frac{M - L}{4} < a_n < L + \frac{M - L}{4} \quad \forall n \geq n'.$$

Inoltre esiste n'' tale che

$$M - \frac{M - L}{4} < a_n < M + \frac{M - L}{4} \quad \forall n \geq n''.$$

Unendo le disuguaglianze (*) e (**) troviamo che per ogni n più grande di entrambi n' e n'' vale

$$M - \frac{M - L}{4} < a_n < L + \frac{M - L}{4} \Rightarrow M - L \leq \frac{M - L}{2}.$$

Ciò è in contraddizione con il fatto che stiamo assumendo $M - L > 0$. □

Teorema 2.7 (Teorema del confronto (o dei due carabinieri)). Siano (a_n) , (b_n) e (x_n) successioni in \mathbb{R} . Se $a_n \leq x_n \leq b_n$ per ogni n e se a_n e b_n hanno lo stesso limite L , allora anche $x_n \rightarrow L$.

Dimostrazione. Usiamo la definizione di limite: poiché $a_n \rightarrow L$, abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$. Inoltre esiste \tilde{n}_ε tale che $L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$ per ogni $n > \tilde{n}_\varepsilon$. Quindi, se $n \geq \max\{n_\varepsilon, \tilde{n}_\varepsilon\}$, risulta

$$L - \varepsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < L + \varepsilon.$$

Ciò dimostra che $x_n \rightarrow L$, come richiesto. □

Usando il Teorema appena provato e la proprietà di approssimazione, si può provare che esistono successioni approssimanti per l'estremo superiore e inferiore.

Corollario 2.8. Se $A \subset \mathbb{R}$. Allora esiste (x_n) successione in A tale che $x_n \rightarrow \sup A$ e esiste (y_n) successione in A tale che $y_n \rightarrow \inf A$.

Dimostrazione. Proviamo l'esistenza di (x_n) nel caso $\sup A < \infty$. Se $\sup A = \max A$, allora basta scegliere $x_n = \max A$, la successione costante. Se l'insieme non ha massimo, usiamo la proprietà di approssimazione scegliendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in A$ che soddisfa $x_n > \sup A - \frac{1}{n}$. La successione così costituita soddisfa

$$\sup A - \frac{1}{n} \leq x_n \leq \sup A.$$

Quindi per il Teorema del confronto, $x_n \rightarrow \sup A$. □

Definizione 2.9 (successione monotona). Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice monotona crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice monotona decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. (4)

Esercizio 2.10. Verificare che $a_n = \frac{n+1}{n}$ è monotona decrescente usando la definizione.

Per sapere se una successione ha limite, si usa a volte in seguente teorema, che è una conseguenza della proprietà di completezza di \mathbb{R} .

Teorema 2.11 (limiti di successioni monotone). *Se una successione è monotona, allora essa ammette limite $\lim a_n$.*

Dimostrazione. Studiamo il caso in cui (a_n) è monotona crescente. Indichiamo con $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ l'insieme dei valori assunti dai termini della successione. Dividiamo la prova in due casi.

Caso A. La successione è limitata superiormente. In tal caso l'insieme A ammette estremo superiore. Proviamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ esiste e che precisamente vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup A.$$

Usiamo la proprietà di approssimazione. Per $\varepsilon > 0$, esiste $a \in A$ tale che $a > \sup A - \varepsilon$. Tale a è un elemento di A e quindi ha la forma $a = a_{n_\varepsilon}$ per un opportuno $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$. Quindi vale $a_{n_\varepsilon} > \sup A - \varepsilon$. Quindi, poiché a_n è monotona crescente, risulta

$$a_n > \sup A - \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon.$$

D'altra parte è sempre $a_n \leq \sup A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi la prova è conclusa.

Caso B. La successione non è limitata superiormente. In questo caso si prova che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

La prova è lasciata al lettore. □

Esempio 2.12. Non è vero che una successione che ha limite è monotona. La successione $\frac{(-1)^n}{n}$ tende a 0 ma non è monotona.

2.2. Sottosuccessioni e Teorema di Bolzano–Weierstrass.

Definizione 2.13. Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice limitata se esiste un numero $M \geq 0$ tale che

$$-M \leq a_n \leq M \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 2.14. Verificare che la successione $a_n = \frac{n + (-1)^n n}{n}$ è limitata.

È utile considerare le sottosuccessioni di una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Per costruire una sottosuccessione, scegliamo una famiglia monotona crescente strettamente di indici

$$1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$$

e consideriamo la nuova successione $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Esempio 2.15. Se $a_n = (-1)^n$, allora $a_{2n} = 1$ e $a_{2n-1} = -1$.

Teorema 2.16 (Teorema di Bolzano–Weierstrass). *Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione limitata in \mathbb{R} . Allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ ed esiste una sottosuccessione (a_{k_n}) convergente a λ .*

Osserviamo che l'ipotesi di limitatezza è indispensabile. Ad esempio, la successione $a_n = n^2$ tende a $+\infty$ e ogni sua sottosuccessione tende a $+\infty$. Quindi essa non ammette sottosuccessioni convergenti.

Il Teorema di Bolzano–Weierstrass è una conseguenza immediata del seguente fatto.

Teorema 2.17. *Ogni successione (a_n) di numeri reali ammette una sottosuccessione monotona.*

Dimostrazione. Sia (a_n) una successione. Introduciamo la seguente terminologia. Un numero $k \in \mathbb{N}$ si dice *picco* di (a_n) se $a_k > a_j$ per ogni $j > k$. Chiamiamo $P \subset \mathbb{N}$ l'insieme dei picchi.

Caso 1. L'insieme P ha infiniti elementi. Allora, se elenchiamo in ordine crescente i picchi, $k_1 < k_2 < \dots$, la successione $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente strettamente.

Caso 2. L'insieme P è vuoto o ha un numero finito di elementi. In tal caso, scegliamo un numero $k_1 \in \mathbb{N}$ che sia più grande strettamente di tutti i picchi. Poiché k_1 non è un picco, esisterà $k_2 > k_1$ tale che $a_{k_1} \leq a_{k_2}$. Ma nemmeno k_2 è un picco. Quindi esiste $k_3 > k_2$ tale che $a_{k_2} \leq a_{k_3}$. Proseguendo in questo modo si costruisce una successione monotona crescente $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$.

La dimostrazione è conclusa □

Dimostrazione del Teorema di Bolzano–Weierstrass. Sia (a_n) limitata. Per il teorema appena provato, esiste $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ sottosuccessione monotona. Tale successione è convergente in quanto monotona. Inoltre il suo limite è un numero reale (perché (a_{k_n}) è limitata). □

2.3. Esercizi per casa

1. Verificare che se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda \in \mathbb{R}$, allora ogni sottosuccessione a_{k_n} converge a λ .
2. Verificare che se una successione (a_n) è convergente a $a_n \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$, allora (a_n) è limitata.
3. Verificare usando la definizione che la successione $\left(\frac{n+1}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona decrescente.
4. Se $a_n > 0$ e $b_n > 0$ per ogni n e se (a_n) è crescente e (b_n) è decrescente, provare che $\frac{a_n}{b_n}$ è crescente.
5. Siano (a_n) e (b_n) due successioni. Supponiamo che $a_n \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$ e che (b_n) sia limitata. Provare che $(a_n b_n)$ è limitata.
6. Letta la dimostrazione del Teorema 2.17, dire quali sono i picchi della successione $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Quali sono i picchi della successione $a_n = (-1)^n$? Quali quelli della successione definita come segue:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq n \leq 3 \\ 2 & \text{se } 4 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{se } n \geq 7. \end{cases}$$

7. Sia (a_n) una successione. Verificare che se $a_n \rightarrow +\infty$ e $|a_n| \geq 2n$, allora $a_n - n \rightarrow +\infty$. Sia (b_n) una successione che soddisfa $|b_n| \leq n$ per ogni n . Dimostrare che $\lim_n b_n - 2n = -\infty$.
8. Sia (a_n) una successione limitata e sia (b_n) una successione che tende a 0. Provare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = 0$.
9. Calcolare, eventualmente passando a variabile continua, i limiti seguenti:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} b^n \quad \text{per ogni valore di } b > 0 \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - n^2}{n^3 + 1} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(1+n)}{n} \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin(1/n) \quad (\text{suggerimento: porre } \frac{1}{n} = x) \\ & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n - e^{n^2}}{1 + e^{2n}} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2(e^{1/n} - 1) \end{aligned}$$

Osserviamo, usando l'esercizio 1. proposto sopra, che una successione che ammette due sottosuccessioni convergenti a limiti differenti non ha limite. Ad esempio, la successione $((-1)^n)$ ha le due sottosuccessioni costanti $(-1)^{2n} = 1$ e $(-1)^{2n-1} = -1$. Quindi non ha limite.

2.4. Successioni di Cauchy

Ricordiamo preliminarmente la *disuguaglianza triangolare*

(6)

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

(verifica immediata passando ai quadrati).

Definizione 2.18 (successione di Cauchy). Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice di Cauchy se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n, m \geq n_\varepsilon.$$

Esercizio 2.19 (svolti in classe). Verificare usando la definizione quale delle seguenti successioni è di Cauchy.

$$a_n = \frac{1}{n} \quad a_n = (-1)^n \quad a_n = n \quad a_n = \frac{n+1}{n}.$$

Proposizione 2.20. Una successione di Cauchy in \mathbb{R} è limitata.

Dimostrazione. Prendiamo $\varepsilon = 1$. Esiste \bar{n} tale che $|a_n - a_k| < 1$ per ogni $n \geq \bar{n}$. Quindi

$$|a_n| = |a_n - a_{\bar{n}} + a_{\bar{n}}| \leq |a_n - a_{\bar{n}}| + |a_{\bar{n}}| \leq 1 + |a_{\bar{n}}| \quad \forall n \geq \bar{n}.$$

D'altra parte

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{\bar{n}-1}|\} \quad \forall n \leq \bar{n} - 1.$$

Mettendo assieme le due stime, concludiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$|a_n| \leq \max\{|a_1|, \dots, |a_{\bar{n}-1}|, 1 + |a_{\bar{n}}|\} =: M.$$

Quindi (a_n) è limitata dal numero $M > 0$. □

La condizione di Cauchy caratterizza le successioni convergenti in \mathbb{R} .

Teorema 2.21. Una successione (a_n) di numeri reali è convergente se e solo se è di Cauchy.

Dimostrazione. Sia $a_n \rightarrow \lambda$ per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$. Preso $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che

$$|a_n - \lambda| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Ma allora

$$|a_n - a_k| = |a_n - \lambda + \lambda - a_k| \leq |a_n - \lambda| + |a_k - \lambda| < 2\varepsilon \quad \forall n, k \geq n_\varepsilon.$$

Questo prova che ogni successione convergente è di Cauchy.

Ora proviamo la parte più significativa. Sia (a_n) una successione di Cauchy in \mathbb{R} . Ci proponiamo di provare che esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \rightarrow \lambda$ per $n \rightarrow +\infty$. Per la proposizione precedente, a_n è limitata. Quindi, per il Teorema di Bolzano–Weierstrass, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ e esiste una sottosuccessione $a_{k_n} \rightarrow \lambda$, per $n \rightarrow \infty$. Sia ora $\varepsilon > 0$. Sappiamo le seguenti due cose: dal fatto che $a_{k_n} \rightarrow \lambda$, otteniamo

$$\exists n' \in \mathbb{N} : |a_{k_n} - \lambda| < \varepsilon \quad \forall n \geq n'; \quad (*)$$

dalla condizione di Cauchy abbiamo invece:

$$\exists n'' \in \mathbb{N} : |a_n - a_k| < \varepsilon \quad \forall n, k \geq n''. \quad (**)$$

Scegliamo ora $\bar{n} = \max\{n', n''\}$. Unendo unendo (*) e (**) troviamo, per ogni $n \geq \bar{n}$,

$$|a_n - \lambda| \leq |a_n - a_{k_{\bar{n}}}| + |a_{k_{\bar{n}}} - \lambda| < 2\varepsilon,$$

Questo prova che $a_n \rightarrow \lambda$. □

2.5. Serie numeriche

Definizione 2.22 (serie numerica). Prendiamo una successione (a_n) in \mathbb{R} e consideriamo la successione $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita per ogni n come segue: (7)

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k$$

La coppia di successioni $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (s_n)_{n \in \mathbb{N}})$ si chiama serie numerica di termine generale a_n . e viene spesso indicata con il simbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Definizione 2.23 (serie convergente/divergente/oscillante). La serie di termine generale a_n si dice convergente se esiste finito il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Si dice divergente a $+\infty$ se il limite è $+\infty$ e divergente a $-\infty$ se $s_n \rightarrow -\infty$. Se infine il limite $\lim s_n$ non esiste, la serie si dice oscillante o irregolare.

Notazione. Se il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ esiste (finito o $\pm\infty$), allora tale limite si chiama somma della serie e si indica con

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k$$

Esempio 2.24. Discusi in classe i seguenti esempi:

- (a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ di termine generale $a_n = 1$ diverge a $+\infty$. Infatti $s_n = n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$.
- (b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge e risulta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Infatti, usando la formula $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, si ottiene

$$s_n = a_1 + \dots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$$

per $n \rightarrow +\infty$

Osservazione 2.25 (Serie a termini non negativi). Una particolare classe di serie è quella in cui il termine generale soddisfa $a_n \geq 0$ per ogni n . In tal caso si vede subito che la successione (s_n) è monotona crescente (vale infatti per ogni n la disuguaglianza $s_{n+1} = s_n + a_n \geq s_n$). Quindi una serie a termini non negativi può fare due cose:

- convergere a una somma non negativa;
- divergere a $+\infty$.

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k = \lambda, \quad \text{con } \lambda \in [0, +\infty].$$

Dal Teorema 2.21 ricaviamo il seguente criterio di convergenza:

Teorema 2.26 (criterio di Cauchy). Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon \text{ e } p \geq 0.$$

Dimostrazione. Per definizione, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente se e solo se la successione s_n è di Cauchy, cioè se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon > 0 : |s_{n-1} - s_{n+p}| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad p \geq 0.$$

Visto che $s_{n+p} - s_{n-1} = \sum_{k=n}^{n+p} a_k$ la dimostrazione è conclusa. \square

Una prima conseguenza del criterio di Cauchy è la seguente condizione necessaria di convergenza.

Proposizione 2.27 (condizione necessaria di convergenza). Se una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente, allora deve essere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Sia $\sum a_n$ convergente. Scriviamo la condizione di Cauchy con $p = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon > 0 : |a_n| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Questo corrisponde esattamente al fatto che $a_n \rightarrow 0$. \square

La condizione è solo necessaria ma non sufficiente, come testimonia l'esempio che segue.

Esempio 2.28 (serie armonica). Vale

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Osserviamo innanzitutto che essendo la serie a termini non negativi, se essa non converge a una somma finita, allora di certo diverge a $+\infty$. Assumiamo per assurdo che la serie sia convergente. Allora varrebbe la condizione di Cauchy

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \left| \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k} \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad p \geq 0.$$

Scegliendo $p = 2n$, troviamo la somma di $n + 1$ addendi

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \geq (n+1) \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

Quindi la condizione di Cauchy è violata non appena scegliamo, ad esempio, $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Questo prova che la serie ha somma $+\infty$.

Esercizio 2.29. Verificare che:

- Se (x_n) è una successione e $x_n \rightarrow \lambda$, allora per ogni $q \in \mathbb{N}$ vale $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+q} = \lambda$.
- Sia $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie. Provare che, dato $q \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{n=q}^{\infty} a_n$ converge. Verificare inoltre che

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \dots + a_{q-1} + \sum_{n=q}^{\infty} a_n$$

La serie geometrica

Partiamo dalla formula seguente valida per ogni $q \neq 1$ e $n \in \mathbb{N}$:⁵

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \text{per ogni } q \neq 1. \quad (2.2)$$

Esempio 2.30 (serie geometrica). Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, dove $q \in \mathbb{R}$ è un parametro assegnato.

Usiamo (2.2) e otteniamo:

$$s_n := \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Valgono quindi le seguenti cose:

(a) Se $|q| < 1$, allora $q^{n+1} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$. Quindi la serie è convergente e vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q};$$

(b) Se $q \geq 1$, allora la serie diverge a $+\infty$. Questo segue dalla discussione dell'esempio 2.24, se $q = 1$. Se invece $q > 1$, si ha $q^{n+1} \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$. Quindi

$$\lim s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \infty}{1 - q} = +\infty$$

(c) Se $q \leq -1$, la serie è oscillante (perché la successione q^{n+1} non ha limite, se $q \leq -1$).

Esercizio 2.31 (svolto in classe). Calcolo di $\sum_{k=p}^{\infty} q^k$ con $|q| < 1$ e $p \in \mathbb{N}$ assegnato

Teorema 2.32 (Criterio del confronto). Siano (a_n) e (b_n) due successioni non negative. $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$ per ogni n . Supponiamo che la successione (b_n) domini a_n nel senso seguente:

$$\exists C > 0 \quad q \in \mathbb{N} : \quad 0 \leq a_n \leq C b_n \quad \forall n \geq q.$$

Allora:

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge a una somma finita, anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a una somma finita.
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, allora anche $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

Dimostrazione. Dimostriamo la prima affermazione soltanto. La seconda è analoga. Ricordiamo intanto che se $q \in \mathbb{N}$, una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge se e solo se la "coda" che parte dal termine q , cioè la serie $\sum_{n=q}^{\infty} x_n$, converge.

Assumiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. Allora $\sum_{n=q}^{\infty} b_n$ converge. Quindi esiste $\mu \in \mathbb{R}$

$$b_q + \dots + b_{q+n} \rightarrow \mu,$$

per $n \rightarrow \infty$, in modo monotono. Ma allora

$$a_q + \dots + a_{q+n} \leq C(b_q + \dots + b_{q+n}) \leq C\mu.$$

⁵Verifica: basta osservare che

$$\begin{aligned} (1 + q + q^2 + \dots + q^n)(1 - q) &= 1(1 - q) + q(1 - q) + \dots + q^n(1 - q) \\ &= (1 - q) + (q - q^2) + (q^2 - q^3) + \dots + (q^n - q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}. \end{aligned}$$

Il numero $C\mu$ è quindi un maggiorante della successione monotona $s_n = a_q + \dots + a_{q+n}$. Quindi

$$\sum_{n=q}^{\infty} a_n \leq C\mu.$$

Dunque la serie $\sum_{n=q}^{\infty} a_n$ converge. Ma allora anche la serie completa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a un numero finito. \square

Esercizio 2.33 (svolti in classe). *Studio della convergenza delle serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + \sqrt{n}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Calcolo del limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k}{q^n} \quad \text{con } k \in \mathbb{N} \text{ e } q > 1.$$

Studio della convergenza delle serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n2^n} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n + 2^n}$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{2^n} \quad (\text{svolto confrontando con } \sum_{n \geq 1} \left(\frac{3}{4}\right)^n).$$

2.6. Esercizi per casa

1. Verificare usando la definizione che la successione $\left(\frac{n^2+n+1}{n^2}\right)$ è di Cauchy. (9)
2. Sono date due successioni $(a_n), (b_n)$ con termini positivi $a_n > 0$ e $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo di sapere che il loro quoziente converge a un limite λ finito e strettamente positivo:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in]0, +\infty[$$

Quele delle seguenti affermazioni è vera o falsa? (Alcune possono essere vere o false a seconda delle situazioni. Fare i dovuti commenti).

- (a) Esiste \bar{n} tale che $a_n \leq 2\lambda b_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$.
- (b) Esiste \bar{n} tale che $a_n \leq \frac{1}{2}\lambda b_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$.
- (c) $a_n \leq 2\lambda b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- (d) Esiste \bar{n} tale che $a_n \leq \lambda b_n$ per ogni $n \geq \bar{n}$.
- (e) Esiste $M > 0$ tale che $a_n \leq M b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. (Ricordare che una successione convergente è limitata ...).

Se la serie $\sum b_n$ diverge a $+\infty$, cosa possiamo dire di $\sum a_n$? Se la serie $\sum b_n$ è convergente, cosa possiamo dire di $\sum a_n$?

3. Studiare la convergenza di:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \frac{2}{3^n} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{2 + (-1)^n}{n^2 + 1} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{3^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + 3n}{n^3} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}.$$

4. È noto che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge a una somma finita se $\alpha > 1$ e diverge a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^{1/4}} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^p+1} \quad \text{al variare di } p > 0 \text{ numero reale.}$$

5. Sia $q \in \mathbb{N}$ un numero fissato. Poniamo

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } 1 \leq n \leq q \\ 2^{-n} & \text{se } n \geq q+1 \end{cases} \quad \text{e} \quad b_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{se } 1 \leq n \leq q \\ 2^n & \text{se } n \geq q+1 \end{cases}$$

Discutere la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

6. Sia $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri naturali. Assumiamo di sapere che $p_n \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow +\infty$. Provare che se una successione a_n tende a un limite λ , allora anche $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{p_n} = \lambda$.

È vero il viceversa?

7. Siano $a_n \geq 0$ e $\lambda_n \geq 0$ due successioni non negative. Provare i seguenti due fatti:

(a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente, allora anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ è convergente.

(b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente e se $\lambda_n \rightarrow \lambda > 0$ per $n \rightarrow \infty$, allora $\sum_{n \geq 1} \lambda_n a_n$ è convergente anch'essa.

3. Lo spazio \mathbb{R}^d

3.1. Prodotto scalare, norma e loro proprietà

Utilizzeremo lo spazio euclideo

$$\mathbb{R}^n := \{x : x = (x_1, \dots, x_n), \quad \text{con } x_j \in \mathbb{R} \text{ per ogni } j = 1, \dots, n\}$$

con le operazioni standard di somma tra vettori e prodotto di un vettore con uno scalare.

Definizione 3.1 (Prodotto scalare standard). *Definiamo per ogni $x = (x_1, \dots, x^d)$ e $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$,*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

Proprietà verificate:

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- $\langle (\lambda x + \lambda' x'), y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x', y \rangle$, per ogni $x, x', y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$.
- $\langle x, x \rangle \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$. Inoltre $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$, il vettore nullo.

Definizione 3.2 (vettori ortogonali). x e $y \in \mathbb{R}^n$ si dicono ortogonali se vale $\langle x, y \rangle = 0$.

Definizione 3.3 (Norma euclidea). *Poniamo*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^d x_j^2}.$$

- Vale $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.
- Vale $\|x\| \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$. Inoltre $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$.
- Vale la *disuguaglianza triangolare* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definizione 3.4. *La distanza tra due punti x e y in \mathbb{R}^n è il numero $\|x - y\|$.*

Notazione. In molti libri di analisi si utilizza il simbolo $|x|$ al posto di $\|x\|$ per indicare la norma di un vettore di \mathbb{R}^d . ANche in questi appunti a volte si userà tale convenzione.

Esercizio 3.5. Siano $x = (1, 2, 2)$ e $y = (2, 1, 3)$. Calcolare inoltre la distanza tra x e y .

Esercizio 3.6. Trovare tutti i vettori ortogonali a $v = (1, 2, 1)$. Trovare poi tutti i vettori simultaneamente ortogonali a $u = (1, 1, 0)$ e $v = (0, 1, 1)$.

Definizione 3.7 (normalizzato di un vettore di \mathbb{R}^d). Se $x \neq 0$, tra tutti i vettori λx , con $\lambda > 0$ ne esiste uno solo con norma unitaria. Esso corrisponde alla scelta $\lambda = \frac{1}{\|x\|}$ ed ha dunque la forma

$$\frac{1}{\|x\|} x = \frac{x}{\|x\|}.$$

Tale vettore si chiama normalizzato di x :

Esercizio 3.8. Normalizzare il vettore $x = (1, 2)$.

Esercizio 3.9. Verificare usando le proprietà del prodotto scalare, che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2. \quad (3.1)$$

Osservazione 3.10. Se x e y sono ortogonali, allora vale il Teorema di Pitagora

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Teorema 3.11 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (senza dimostrazione)). Vale

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|, \quad (3.2)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$. Inoltre vale l'uguaglianza in (3.2) se e solo se x e y sono linearmente dipendenti.⁶

Corollario 3.12. Vale la disuguaglianza triangolare $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \text{per Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned} \quad \square$$

Definizione 3.13 (Palla euclidea). Definiamo, dati $x \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$, la palla di centro x e raggio r .

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| < r\}.$$

Esempio 3.14. La palla $B((0, 0), r) \subset \mathbb{R}^2$. La palla unidimensionale $B(x, r) =]x - r, x + r[$.

3.2. Successioni convergenti in \mathbb{R}^d

Una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^d è una famiglia di vettori $(x_n^1, \dots, x_n^d) \in \mathbb{R}^d$, indicizzati da $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 3.15 (Successione convergente). Una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n^1, \dots, x_n^d)_{n \in \mathbb{N}}$ di vettori in \mathbb{R}^d si dice convergente a $x = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon > 0$ tale che

$$\|x_n - x\| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

In tal caso, si scrive $x_n \rightarrow x$ oppure $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$.

⁶Cioè $\lambda x + \mu y = 0$ per una opportuna scelta di scalari λ, μ che soddisfino $\lambda^2 + \mu^2 > 0$.

Esercizio 3.16. Verificato che la successione in \mathbb{R}^2 definita da $x_n = (1/n, (n+1)/n)$ converge al vettore $(0, 1)$, per $n \rightarrow +\infty$

Teorema 3.17. Una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ha limite $x = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d$ se e solo se per ogni $k = 1, \dots, d$, la successione in \mathbb{R} $(x_n^k)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x^k .

La dimostrazione è molto elementare. Altrettanto elementare è la generalizzazione in dimensione d del Teorema di Bolzano–Weierstrass. La nozione di successione limitata in \mathbb{R}^d si generalizza come segue:

Definizione 3.18 (successione limitata). Una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^d si dice limitata se esiste $M > 0$ tale che

$$\|x_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(In altri termini una successione è limitata se tutti i suoi termini sono contenuti in una palla di raggio M sufficientemente grande.)

Teorema 3.19 (Bolzano–Weierstrass). Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione limitata in \mathbb{R}^d , allora esiste $x \in \mathbb{R}^d$ ed esiste (x_{k_n}) sottosuccessione di (x_n) tale che $x_{k_n} \rightarrow x$, per $n \rightarrow \infty$.

La dimostrazione è omessa, perché non contiene alcuna novità sostanziale rispetto al caso unidimensionale.

3.3. Topologia elementare di \mathbb{R}^d

Definizione 3.20 (Insieme aperto). Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice insieme aperto se per ogni $x \in \Omega$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$.

Definizione 3.21 (Insieme chiuso). Un insieme $F \subset \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se vale $F = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ con Ω insieme aperto.

Una notazione per l'insieme complementare di $A \subset \mathbb{R}^d$ è anche

$$A^c := \mathbb{R}^d \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^d : x \notin A\}.$$

Si conviene di assumere che l'insieme vuoto \emptyset è aperto. Lo spazio \mathbb{R}^d intero è banalmente aperto, ma è anche chiuso, in quanto complementare di un aperto. Si può dimostrare che, \emptyset e \mathbb{R}^d sono gli unici insiemi sia aperti che chiusi in \mathbb{R}^d .

Esempio 3.22. Ecco alcuni esempi di insiemi aperti e chiusi:

(12)

- Gli intervalli a estremi esclusi $]a, b[\subset \mathbb{R}$ sono aperti.
- Le palle $B(x, r) \subset \mathbb{R}^d$ sono aperte per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e $r > 0$. Dimostrato in classe usando la disuguaglianza triangolare.
- L'esterno di una palla $\{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| > r\}$ è un insieme aperto. Quindi le palle chiuse $\{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| \leq r\}$ sono insiemi chiusi per ogni $r \geq 0$. In particolare, se $r = 0$ vediamo che i singoli punti $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ sono insiemi chiusi.

Proposizione 3.23. Valgono le seguenti proprietà sulle unioni e intersezioni di aperti:

1. Se $(\Omega_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia qualsiasi di insiemi aperti indicizzati da un parametro $\lambda \in \Lambda$, allora $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Omega_\lambda$ è aperto.
2. Se $\Omega_1, \dots, \Omega_p$ sono p insiemi aperti (famiglia finita), allora $\Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_p$ è aperto.
3. Non è vero che un'intersezione qualsiasi di insiemi aperti è aperta. Ad esempio, gli insiemi $\Omega_n = B(0, 1/n)$ sono aperti per ogni n , ma la loro intersezione $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Omega_n = \{0\}$ non è aperta.

Dimostrazione. Proviamo la prima affermazione: sia $x \in \bigcup_{\lambda} \Omega_{\lambda}$. Scegliamo un qualsiasi $\lambda \in \Lambda$ tale che $x \in \Omega_{\lambda}$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subset \Omega_{\lambda}$. In particolare sarà $x \in \bigcup_{\lambda} \Omega_{\lambda}$. Questo prova il punto 1.

Proviamo la seconda affermazione. La proviamo per due insiemi Ω_1 e Ω_2 . Sia $x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Allora $x \in \Omega_1$ che è aperto. Quindi esiste ε_1 tale che $B(x, \varepsilon_1) \subset \Omega_1$. Ripetendo per Ω_2 troviamo che per un opportuno $\varepsilon_2 > 0$ vale $B(x, \varepsilon_2) \subset \Omega_2$. Scegliendo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ è facile vedere che $B(x, \varepsilon) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$. \square

È utile anche osservare il seguente fatto: gli insiemi chiusi contengono tutti i limiti delle successioni convergenti in essi contenuti. Precisamente:

Proposizione 3.24. *Se (x_n) è una successione di elementi di un chiuso $F \subset \mathbb{R}^d$ e se (x_n) è convergente a qualche $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n \in \mathbb{R}^d$, allora*

$$x \in F.$$

Dimostrazione. Sia $x_n \in F$ per ogni n con F insieme chiuso. Supponiamo per assurdo che $x_n \rightarrow x \notin F$. Poiché F^c è aperto, esiste una palla $B(x, \varepsilon) \subset F^c$. Poiché $x_n \rightarrow x$, esiste anche n_{ε} per cui $|x_n - x| < \varepsilon$ se $n \geq n_{\varepsilon}$. Quindi per tutti gli $n \geq n_{\varepsilon}$ vale $x_n \in F^c$. Questo contraddice però l'ipotesi secondo cui $x_n \in F$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. \square

3.4. Funzioni

Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$, con $A \subset \mathbb{R}^d$ è una legge che ad ogni elemento x di A associa un elemento $f(x) \in \mathbb{R}^q$.

Linguaggio. *Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}^d$ è una funzione, l'insieme A si chiama dominio di f . Il grafico di f è l'insieme*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q : x \in A, y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q.$$

Se $E \subset A$, allora l'insieme

$$f(E) := \{f(x) : x \in E\}$$

si chiama immagine di E attraverso f . Se infine $G \subset \mathbb{R}^q$, allora l'insieme

$$f^{-1}(G) := \{x \in A : f(x) \in G\}$$

si chiama controimmagine o preimmagine di G attraverso f .

Esercizio 3.25 (svolto in classe). *Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, individuare:*

- il grafico di f ;
- l'insieme $f([0, 2])$;
- l'insieme $f^{-1}(]1, 4])$.

Definizione 3.26 (funzione continua). *Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che:*

- f è continua in un punto $x \in A$ se per ogni successione $x_n \in A$, $x_n \rightarrow x$, risulta $f(x_n) \rightarrow f(x)$;
- f è continua nell'insieme A se è continua in ogni punto $x \in A$.⁷

Discussione informale:

- se è data una funzione continua di una variabile, $\mathbb{R} \ni x \mapsto g(x) \in \mathbb{R}$, allora la funzione $f(x_1, x_2) = g(x_1)$ è una funzione continua delle variabili $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ a valori in \mathbb{R} .
- Somme, prodotti, quozienti (a denominatori non nulli) e composizioni di funzioni continue sono continue.

⁷A volte si scrive $f \in C(A)$, per indicare che f è continua su A .

Esempio 3.27. Alla luce dei punti evidenziati, osserviamo ad esempio che la funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ è continua, perché $x \mapsto g(x) = x$ è continua da \mathbb{R} ad \mathbb{R} . Quindi $f_1(x_1, x_2) = x_1$ e $f_2(x_1, x_2)$ sono continue nelle due variabili $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e infine la loro somma è continua. Molte altre funzioni possono essere riconosciute come continue in base ad argomenti simili.

La continuità può essere anche caratterizzata senza successioni, come segue:

Proposizione 3.28. Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$. Allora f è continua in $x \in A$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall y \in A \quad |y - x| < \delta_\varepsilon.$$

Dimostrazione. Sia f continua in $x \in A$. Supponiamo per assurdo che esista un numero $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ possiamo trovare $y \in A$ con $|y - x| < \delta$ e $|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon_0$. Scegliendo ad esempio $\delta = \frac{1}{n}$ troviamo allora che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un punto $x_n \in A$ che soddisfi

$$|x_n - x| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon_0.$$

Andando al limite per $n \rightarrow \infty$ si trova una contraddizione con il fatto che f è continua in x .

Ora, viceversa assumiamo che f sia continua in un certo $x \in A$, cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall y \in A \quad \text{che soddisfi} \quad |y - x| < \delta_\varepsilon.$$

Sia ora $x_n \in A$, $x_n \rightarrow x$. Applicando la definizione di limite con $\delta = \delta_\varepsilon$, possiamo affermare che esiste $n_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tale che $|x_n - x| < \delta_\varepsilon$ per ogni $n \geq n_{\delta_\varepsilon}$. Ma allora questo implica che $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ per gli stessi n . Quindi abbiamo dimostrato che f è continua in x . \square

Usando questa caratterizzazione si può ottenere il seguente corollario, che ci permette di individuare facilmente molti insiemi aperti/chiusi in \mathbb{R}^d e che sarà utile al momento dello studio delle funzioni misurabili.

Corollario 3.29. Se $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^q$ è continua, allora per ogni sottoinsieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^q$, risulta $f^{-1}(\Omega)$ aperto nel dominio \mathbb{R}^d . Brevemente, controimmagini di insiemi aperti attraverso funzioni continue sono aperti.

Per evitare complicazioni questo corollario è formulato solo per funzioni definite su tutto lo spazio $A = \mathbb{R}^d$.

Dimostrazione. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ un aperto (non vuoto per evitare banalità) e sia $x \in f^{-1}(\Omega)$. Questo significa che $f(x) \in \Omega$. Poiché Ω è aperto, esiste un $\varepsilon > 0$ piccolo a sufficienza affinché $B(f(x), \varepsilon) \subset \Omega$. Scegliendo il δ_ε fornito dalla definizione di continuità in x , avremo che per ogni $y \in \mathbb{R}^d$ che soddisfi $|y - x| < \delta_\varepsilon$, sarà $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ e quindi $f(y) \in \Omega$. Questo dice che $B(x, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(\Omega)$. Quindi abbiamo riconosciuto che $f^{-1}(\Omega)$ è aperto. \square

Osservazione 3.30. In particolare, il corollario precedente ci dice che se una funzione a valori scalari $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora gli insiemi definiti da disuguaglianze strette del tipo

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > b\} \quad \text{e} \quad \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < b\}$$

sono aperti per ogni scelta di $b \in \mathbb{R}$. Infatti, vale $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > b\} = f^{-1}(]b, +\infty[)$, cioè la controimmagine dell'aperto $]b, +\infty[\subset \mathbb{R}$. Per passaggio al complementare, troviamo che insiemi definiti da disuguaglianze deboli del tipo

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq b\} \quad \text{e} \quad \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq b\}$$

sono chiusi per ogni b . È ovviamente sempre sottointeso che le funzioni coinvolte devono essere continue.

Esempio 3.31. Usando l'osservazione precedente, verificato in classe che $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$ è aperto e che $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^d : 1 < \|x\| < 2\}$ è aperto. Basta ricordare che la funzione norma è continua e scrivere $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, dove $\Omega_1 = \{x : \|x\| > 1\}$ e $\Omega_2 = \{x : \|x\| < 2\}$ sono entrambi aperti e la loro intersezione è quindi aperta.

Teorema 3.32 (Teorema di Weierstrass). Se $A \subset \mathbb{R}^d$ è chiuso e limitato e se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, (15) allora esistono $x_-, x_+ \in A$ tali che

$$f(x_-) = \min f(A) \quad e \quad f(x_+) = \max f(A).$$

Gli insiemi chiusi e limitati in \mathbb{R}^d si chiamano anche insiemi *compatti*. Osserviamo che il teorema di Weierstrass è falso se rimuoviamo l'ipotesi di chiusura o di limitatezza. Basta osservare le funzioni

$$f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x},$$

che ha minimo ma non massimo sull'insieme $]0, 1]$ (che è limitato ma non chiuso), e

$$g : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x},$$

che ha massimo ma non ha minimo sull'insieme (chiuso ma non limitato) $[1, +\infty[$.

3.5. Esercizi per casa

(1) Siano $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 5\} \subset \mathbb{R}$. Dire chi sono gli insiemi $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.

(2) Verificare che dati due insiemi $A, B \subset \mathbb{R}^d$, vale $(A \cup B)^c = B^c \cap A^c$. Verificare che se $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia di insiemi in \mathbb{R}^d , allora $(\cup_\lambda A_\lambda)^c = \cap_\lambda A_\lambda^c$. Che cos'è l'insieme $(\cap_{x \in \mathbb{R}} \{x\}^c)^c$?

(3) Usando l'esercizio precedente e "passando al complementare" la Proposizione (3.23), dimostrare che se $(F_\lambda)_\lambda$ è una famiglia di chiusi in \mathbb{R}^d , allora $\cap_\lambda F_\lambda$ è chiuso. Che cosa si può dire di $\cup F_\lambda$? Che cosa si può dire di una unione finita $F_1 \cup \dots \cup F_p$ di p insiemi chiusi in \mathbb{R}^d ? L'unione di insiemi chiusi $\bigcup_{\lambda \in]0, 1[} [-\lambda, \lambda]$ è chiusa?

(4) Definiamo la differenza simmetrica tra A e B .

$$A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Cos'è $] -1, 2] \Delta [0, 3]$? Verificare che in generale vale $A \Delta B = B \Delta A$ e che risulta anche $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Verificare poi che $A \Delta B = \emptyset$ se e solo se $A = B$.

(5) Sia (a_n) una successione in \mathbb{R} con $a_n > 0$ per ogni n . Supponiamo di sapere che esiste una sottosuccessione $(a_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ che converge a zero. Verificare che $\cap_{n \in \mathbb{N}} [0, a_n] = \{0\}$.

Sia poi $r_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo di sapere che esiste $r_{k_n} \rightarrow +\infty$ per $n \rightarrow \infty$. Trovare $\cup_{n \in \mathbb{N}} B(0, r_n)$, dove $B(0, r_n)$ è la palla in \mathbb{R}^d . È possibile che risulti anche $\cap_{n \in \mathbb{N}} B(0, r_n) = \{0\}$?

(6) Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme limitato e sia $B \subset \mathbb{R}^d$ un sottoinsieme qualsiasi. Di quale tra i seguenti insiemi possiamo dire che è limitato? $A \cap B, A \cup B, A \setminus B, B \setminus A, A^c$.

⁸Ricordiamo che $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\} = A \cap B^c$.

(7) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 3 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Trovare $f^{-1}(]a, +\infty[)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Dire se è aperto o meno, al variare di a .

(8) Dire quale dei seguenti insiemi è aperto, chiuso, oppure ne' aperto ne' chiuso.

- $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1, x \neq 0\}$;
- $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq 0\}$;
- $]0, 1[\times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$;
- $]0, 1[\times \{1\} \subset \mathbb{R}^2$.
- $\{2\} \times [0, 1]$;
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n - 2^{-n}, n + 2^{-n}[$.

(9) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Individuare gli insiemi $f^{-1}(]b, +\infty[)$, al variare di $b \in \mathbb{R}$.

3.6. Successioni di funzioni convergenti puntualmente e uniformemente

Una successione di funzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di funzioni $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ definite tutte su uno stesso insieme $A \subset \mathbb{R}^d$. (15)

Definizione 3.33 (Successione convergente puntualmente). Sia $A \subset \mathbb{R}^d$. Una successione di funzioni $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ si dice convergente puntualmente a $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{per ogni fissato } x \in A.$$

In altre parole, se vale quanto segue:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x \in A \exists n_{\varepsilon, x} \in \mathbb{N} \text{ tale che } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_{\varepsilon, x}. \quad (3.3)$$

Notiamo che la scrittura $n_{\varepsilon, x}$ indica che il numero in questione dipende da entrambi x ed ε .

Esempio 3.34. Analisi delle seguenti successioni.

(a) $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x+n}{n^2}$ tende puntualmente a alla funzione identicamente nulla

$f(x) = 0$ per ogni x .

(b) $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ tende puntualmente al limite

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Osserviamo che il limite è una funzione discontinua, sebbene le funzioni f_n siano tutte continue su $[0, 1]$.

(c) $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$, tende alla funzione identicamente zero, per $n \rightarrow +\infty$.

Una condizione di convergenza piú forte delle convergenza puntuale è la convergenza uniforme.

Definizione 3.35 (successione convergente uniformemente). Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ e sia $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ una successione di funzioni. Si dice che f_n converge uniformemente alla funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ se vale quanto segue:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tale che } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \forall x \in A. \quad (3.4)$$

Nella condizione (3.4) abbiamo usato il simbolo n_ε per evidenziare il fatto che il numero in questione dipende solo da ε e non da $x \in A$. D'altro canto, in (3.3) il numero $n_{\varepsilon,x}$ dipende, come già detto, da entrambi ε ed x .

Si può riformulare la convergenza uniforme (3.4) nella forma compatta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Osservazione 3.36. La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale. Questo si vede confrontando (3.4) e (3.3). NON È VERO che la convergenza puntuale implica la convergenza uniforme.

Esempio 3.37. Discussi in classe:

1. $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}$$

La successione tende puntualmente al limite $f(x) = 0$, se $0 < x \leq 1$ e $f(0) = 1$. La convergenza non è uniforme.

2. La successione $f_n(x) = \frac{x+n}{n^2}$ tende al limite 0 puntualmente su \mathbb{R} . Il limite non è uniforme. Il limite diventa uniforme se definiamo $f_n : [-M, M] \rightarrow \mathbb{R}$, sempre $f_n(x) = \frac{x+n}{n^2}$.
3. La successione $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ tende al suo limite puntuale

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

ma la convergenza non è uniforme. Infatti $\sup_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$ per ogni fissato $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 3.38 (funzione caratteristica). Sia $A \subset \mathbb{R}^d$. La funzione $\mathbb{1}_A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^d \setminus A \end{cases}$$

si chiama funzione caratteristica o indicatore dell'insieme A .

Esercizio 3.39. Studia la convergenza uniforme e puntuale di $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$ e di $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = \frac{1}{n} \mathbb{1}_{[n,n+1]}$.

Teorema 3.40. Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ e sia $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}^q$ una famiglia di funzioni continue su A che converga uniformemente a un limite $f : A \rightarrow \mathbb{R}^q$. Allora la funzione limite f è continua su A .

Dimostrazione. Dobbiamo provare che per ogni fissato $x \in A$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$y \in A \quad |y - x| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Sappiamo per ipotesi che f_n converge uniformemente a f . Quindi per ogni ε esiste n_ε tale che $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ per ogni $n \geq n_\varepsilon$ e $z \in A$. In particolare

$$|f_{n_\varepsilon}(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \forall z \in A. \quad (3.5)$$

Allora scriviamo, per $y \in A$ e usando la disuguaglianza triangolare,

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &\leq |f(y) - f_{n_\varepsilon}(y)| + |f_{n_\varepsilon}(y) - f_{n_\varepsilon}(x)| + |f_{n_\varepsilon}(x) - f(x)| \\ &\leq \varepsilon + |f_{n_\varepsilon}(y) - f_{n_\varepsilon}(x)| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Abbiamo usato la convergenza uniforme (3.5) per stimare il primo e terzo termine. Ora poiché la funzione f_{n_ε} è continua, esiste δ_ε tale che $|f_{n_\varepsilon}(y) - f_{n_\varepsilon}(x)| < \varepsilon$ se $y \in A$ e $|y - x| < \delta_\varepsilon$. Questo conclude la dimostrazione. \square

4. Elementi di teoria della misura

4.1. Funzioni iniettive/suriettive/biiettive

Definizione 4.1 (funzione iniettiva–suriettiva–biiettiva). Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione. La funzione f si dice (17)

- iniettiva se per ogni $a, a' \in A$ con $a \neq a'$ risulta $f(a) \neq f(a')$.⁹
- Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice suriettiva se $f(A) = B$. Cioè se per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$.
- Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice biiettiva se è iniettiva e suriettiva.

Esempio 4.2. Alcuni esempi:

- $f : \{1, 2\} \rightarrow \{3, 4, 5\}$, $f(1) = 3$ e $f(2) = 5$
- $g : \{1, 2\} \rightarrow \{3, 4, 5\}$, $g(1) = 4$, $g(2) = 4$.
- $h : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{3, 4, 5\}$, $h(0) = 3$, $h(1) = 4$, $h(2) = 5$
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
- $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$, $f(x) = x^2$
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$
- $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$, $f(x) = e^x$

4.2. Insiemi numerabili

Per la costruzione della teoria della misura sono importanti gli insiemi *numerabili*. Detto in termini informali, sono quegli insiemi i cui elementi possono essere enumerati usando i numeri naturali.

Definizione 4.3 (Insieme finito). Un insieme A si dice finito con n elementi se esiste $n \in \mathbb{N}$ e una funzione $f : A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ biiettiva. In tal caso si dice che l'insieme ha n elementi.

Conveniamo che l'insieme vuoto è finito con 0 elementi.

Definizione 4.4 (insieme infinito numerabile). Un insieme A si dice infinito numerabile (o più semplicemente numerabile) se non è finito e se esiste una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ iniettiva.

Osservazione 4.5. Se A è un insieme infinito numerabile, allora gli elementi di A possono essere "etichettati" usando come indici i numeri naturali:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}. \quad (4.1)$$

Per convincersene basta notare che $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ è un sottoinsieme infinito di \mathbb{N} . Dunque possiamo scrivere $f(A) = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$, dove gli n_j sono in ordine crescente: $1 \leq n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Quindi, poiché la $f : A \rightarrow f(A)$ è iniettiva e suriettiva, per ciascun n_j esiste un unico a_j tale che $f(a_j) = n_j$. Questo fornisce l'enumerazione scritta in (4.1). Osserviamo che $f(A)$ non può essere finito, altrimenti sarebbe finito anche A .

Notiamo infine che la funzione $\varphi : A \rightarrow \mathbb{N}$, definita da $\varphi(a_j) = j$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ è iniettiva e suriettiva.

⁹Equivalentemente, se a ed $a' \in A$ soddisfano $f(a) = f(a')$, allora risulta $a = a'$.

Mostriamo ora alcuni esempi di insiemi numerabili.

- Esempio 4.6.** • L'insieme dei numeri naturali $A = \mathbb{N}$ è banalmente numerabile. Basta scegliere $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ la funzione identità, $f(n) = n$ per ogni n .
 Sempre scegliendo la funzione identità si riconosce facilmente che l'insieme dei numeri pari $A = \{2, 4, 6, \dots\}$ e quello dei numeri dispari $\{1, 3, 5, \dots\}$ sono numerabili.
 • L'insieme dei numeri $Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ è numerabile.

Esempio 4.7. L'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile. Verificato in classe che la funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$,

$$f(k, n) = 2^k 3^n$$

è iniettiva.

Esempio 4.8. Utilizzando un ragionamento simile a quello precedente, è possibile dimostrare che l'insieme dei razionali $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{r}{s} : r \in \mathbb{Z} \ s \in \mathbb{N} \right\}$ è numerabile.

Non tutti gli insiemi infiniti sono numerabili.

Teorema 4.9 (Cantor). Ogni intervallo non banale $[a, b] \subset \mathbb{R}$ di numeri reali non è numerabile.

Dimostrazione. Non presentata. □

Un'ulteriore proprietà importante della numerabilità è il suo "buon comportamento" rispetto a unioni numerabili.

Teorema 4.10. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di insiemi finiti o numerabili, tutti contenuti in un insieme X , allora l'unione $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ è finita o numerabile.

Dimostrazione. Non svolta in classe, ma si veda l'esercizio (g) nel paragrafo 4.4 per il caso semplificato di due soli insiemi. □

4.3. Misure su σ -algebre

Questa parte di corso è svolta seguendo il testo [R].

Definizione 4.11 (σ -algebra su un insieme X). Sia X insieme. Sia \mathcal{A} una famiglia di sottoinsiemi di X . Si dice che \mathcal{A} è una σ -algebra su X se vale quanto segue:

- (1) $X \in \mathcal{A}$;
- (2) se $E \in \mathcal{A}$ allora $E^c := X \setminus E \in \mathcal{A}$;
- (3) se $E_n \in \mathcal{A}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

Linguaggio. Gli insiemi di una σ -algebra si chiamano insiemi misurabili. La coppia (X, \mathcal{A}) si chiama "spazio misurabile".

Dunque una σ -algebra è "chiusa" rispetto a passaggio al complementare e a unioni numerabili.

Osservazione 4.12. Se \mathcal{A} è una σ -algebra su un insieme X , allora:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$. Infatti $\emptyset = X^c$
- Se $E_n \in \mathcal{A}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$. Infatti,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \right)^c \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c \in \mathcal{A}.$$

Ma quest'ultima affermazione è vera, perché, essendo $E_n \in \mathcal{A}$ per ogni n , è anche $E_n^c \in \mathcal{A}$.

- Se $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A}$, allora $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.

Due esempi elementari di σ -algebre sono i seguenti:

Esempio 4.13 (La σ -algebra banale). Se X è un'insieme, allora

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, X\}$$

è una σ -algebra.

Esempio 4.14. Se X è un insieme, allora l'insieme della parti di X , cioè

$$2^X := \text{l'insieme di tutti i sottoinsiemi di } X, \text{ compresi lo stesso } X \text{ e l'insieme vuoto } \emptyset.$$

è una σ -algebra (chiamata a volte σ -algebra discreta).

Esercizio 4.15. Scrivere l'insieme delle parti $2^{\{1,2,3\}}$. Risulta

$$2^{\{1,2,3\}} = \left\{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \right\}.$$

La famiglia di insiemi appena elencata è una σ -algebra su $\{1,2,3\}$.¹⁰

Definizione 4.16 (misura). Sia \mathcal{A} una σ -algebra su un insieme X . Una misura su \mathcal{A} è una funzione $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ tale che:

- (1) $\mu(\emptyset) = 0$;
- (2) se $E_n \in \mathcal{A}$ per ogni n e la famiglia $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è disgiunta, allora

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \quad (4.2)$$

Linguaggio.

- La tripla (X, \mathcal{A}, μ) si chiama spazio con misura.
- La proprietà (2) si chiama additività numerabile.

Osservazione 4.17. Osserviamo le seguenti cose.

- (a) Riguardo alla proprietà di additività numerabile (2), notiamo che, se $\mu(E_n) = +\infty$ per qualche n , oppure se la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ diverge, allora l'uguaglianza va interpretata come $+\infty = +\infty$.
- (b) Se E_1, \dots, E_p sono p insiemi misurabili e disgiunti, allora vale l'additività finita:

$$\mu(E_1 \cup \dots \cup E_p) = \mu(E_1) + \dots + \mu(E_p).$$

Per riconoscere tale proprietà basta usare l'additività numerabile per la famiglia numerabile $E_1, E_2, \dots, E_p, \emptyset, \emptyset, \dots$ con infiniti insiemi vuoti che seguono i p insiemi assegnati.

- (c) Se A e B sono insiemi misurabili e se vale $A \subseteq B$, allora possiamo scrivere

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

In particolare, poiché $\mu(B \setminus A) \geq 0$, vale $\mu(A) \leq \mu(B)$.

- (d) L'additività numerabile (2) può anche essere enunciata nella forma seguente: per ogni famiglia $(E_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ di insiemi disgiunti a coppie e con Λ insieme numerabile, vale

$$\mu\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda\right) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \mu(E_\lambda),$$

purché si faccia qualche precisazione in più sul significato della somma al membro di destra.

¹⁰Non è un caso che l'insieme delle parti dell'insieme con 3 elementi $\{1,2,3\}$ sia formato da 2^3 elementi.

Esempio 4.18 (misura di conteggio). Se X è un insieme qualsiasi, allora, sulla σ -algebra 2^X , possiamo definire:

$$\mu(E) = \begin{cases} +\infty & \text{se } E \text{ è un insieme infinito} \\ n & \text{se } E \text{ è finito e ha } n \text{ elementi.} \end{cases}$$

Si verifica che μ è una misura.

Esempio 4.19 (massa di Dirac). Su \mathbb{R}^d , prendiamo $\mathcal{A} = 2^{\mathbb{R}^d}$ e fissiamo un punto $z \in \mathbb{R}^d$. Poniamo, per $E \subset \mathbb{R}^d$,

$$\mu_z(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \in E \\ 0 & \text{se } z \notin E. \end{cases}$$

Definizione 4.20 (misura di probabilità). Sia X un insieme, \mathcal{A} una σ -algebra su X e μ una misura su \mathcal{A} . La misura μ si dice misura di probabilità se $\mu(X) = 1$.

Ora analizziamo il comportamento delle misure positive rispetto a unioni “crescenti” di insiemi.

Proposizione 4.21. Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura. Sia E_n una famiglia di insiemi misurabili che soddisfino $E_n \subseteq E_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora vale (20)

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n).$$

Osserviamo che è cruciale che la famiglia $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sia monotona (cioè che valga la condizione $E_n \subseteq E_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). Questo si capisce ad esempio considerando la famiglia $E_1 = \{1, 2\}$, $E_n = \{1\}$ per ogni $n \geq 2$ di sottoinsiemi di $X = \{1, 2, 3\}$ equipaggiato con la misura di conteggio.

Dimostrazione. Osserviamo che, ponendo $B_1 = E_1$, $B_2 = E_2 \setminus E_1, \dots$, $B_n = E_n \setminus E_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta per ogni $p \in \mathbb{N}$

$$E_n = \bigcup_{k=1}^n E_k = \bigcup_{k=1}^n B_k \quad \text{e} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Qui abbiamo usato il fatto che la successione di insiemi soddisfa $E_n \subseteq E_{n+1}$ per ogni n . Notiamo che gli insiemi B_n sono disgiunti a coppie. Quindi possiamo usare l’additività numerabile:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \stackrel{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \stackrel{(**)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \mu(B_k) \\ &\stackrel{(+)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n B_k\right) \stackrel{(++)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n), \end{aligned}$$

Confrontando il primo e l’ultimo termine di questa catena di uguaglianze si ottiene la prova della proposizione. Nell’uguaglianza $(*)$ abbiamo usato l’additività numerabile. Nell’uguaglianza $(**)$ la definizione di somma di una serie; in $(+)$ abbiamo utilizzato l’additività finita e in $(++)$ il fatto che $\bigcup_{k=1}^n B_k = \bigcup_{k=1}^n E_k = E_n$. \square

La versione “al complementare” della proposizione precedente è la seguente.

Proposizione 4.22. Sia (X, \mathcal{A}, μ) uno spazio con misura. Sia E_n una famiglia di insiemi misurabili che soddisfino $E_n \supseteq E_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo inoltre che almeno uno degli insiemi E_n abbia misura finita.¹¹ Allora vale

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n).$$

Dimostrazione. Non svolta in classe. \square

¹¹Questa ipotesi non è necessaria nella proposizione riguardante l’unione di insiemi.

4.4. Esercizi per casa

- (a) Sia $f_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f_n(x) = \frac{1}{nx}$. Studiare convergenza puntuale e uniforme di f_n per $n \rightarrow +\infty$. Studiare la convergenza puntuale e uniforme della successione (f_n) sull'insieme $[b, +\infty[$, con $b > 0$ numero fissato.
- (b) Sia $A_n = [0, n] \times [0, 1/n]$. Dire chi è $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
Sia poi $E_n = B\left(0, \frac{1}{n} + n + (-1)^n n\right)$. Descrivere l'insieme $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.
- (c) Usando la disuguaglianza triangolare, dimostrare che se $w \in \mathbb{R}^d$ è un vettore non nullo e se R e r sono due numeri positivi con $R + r \leq \|w\|$, allora $B(0, R) \cap B(w, r) = \emptyset$.
- (d) Sia $v \in \mathbb{R}^d$ un vettore fissato di norma unitaria $\|v\| = 1$. Sia $f_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n = \mathbb{1}_{B(nv, 1)}$. Studiare la convergenza puntuale e uniforme di f_n . Suggerimento: usare l'esercizio (c).
- (e) Sono date due funzioni $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$, entrambe iniettive. Supponiamo che $B \subseteq C$. Verificare che la funzione composta $g \circ f : A \rightarrow D$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ è iniettiva.
- (f) Verificare che le funzioni $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \{\text{numeri pari}\}$, $\varphi(n) = 2n$ e $\psi : \mathbb{N} \rightarrow \{\text{numeri dispari}\}$, $\psi(n) = 2n - 1$ sono iniettive e suriettive.
- (g) Siano A e B due sottoinsiemi di un assegnato insieme X entrambi numerabili e disgiunti (cioè $A \cap B = \emptyset$). Verificare usando i due esercizi precedenti, che $A \cup B$ è numerabile.
L'affermazione è valida anche se $A \cap B \neq \emptyset$. Come si potrebbe modificare lo svolgimento dell'esercizio in questo caso?
- (h) Sono date due funzioni $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^d$. Provare che se vale $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in A$, allora vale anche $\sup_A f \leq \sup_A g$.
È vero che se vale $\sup_A f \leq \sup_A g$, allora è anche $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in A$?
- (i) Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni assegnate, verificare che valgono le disuguaglianze:

$$\sup_A (f + g) \leq \sup_A f + \sup_A g \quad \text{e}$$

$$\sup_A |f + g| \leq \sup_A |f| + \sup_A |g|.$$

Osservazione 4.23 (additività e subadditività). *Supponiamo di avere una misura $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$. Sappiamo che, se $(A_n)_n$ è una famiglia disgiunta di insiemi in \mathcal{A} , allora vale l'additività*

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Se non assumiamo che gli insiemi siano disgiunti si ottiene, ad esempio per due insiemi, $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ di misura finita

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2). \quad (4.3)$$

Per verificare la formula (4.3) scriviamo dapprima $A_1 \cup A_2$ come unione disgiunta e usiamo l'additività:

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1). \quad (*)$$

D'altra parte, però, si ha, scrivendo come unione disgiunta $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap A_1^c)$ troviamo

$$\mu(A_2) = \mu(A_2 \cap A_1) + \mu(A_2 \cap A_1^c) = \mu(A_2 \cap A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) \quad (**)$$

Unendo (*) e (**) in modo da eliminare $\mu(A_2 \setminus A_1)$, si trova (4.3)

In generale, se sono dati $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, vale

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

Andando al limite per $n \rightarrow +\infty$ si ottiene, nel membro di destra, per definizione di somma di una serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Nel membro di sinistra, considerando gli insiemi $E_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$, risulta $E_n \subset E_{n+1}$ e anche $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Quindi, il membro di sinistra si scrive

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \mu(E_n) \rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Il risultato del limite si ottiene applicando la Proposizione 4.21. Abbiamo quindi ottenuto la proprietà di subaddittività numerabile

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k),$$

valida per ogni famiglia $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di insiemi in \mathcal{A} .

4.5. Scatole e misura esterna di Lebesgue in \mathbb{R}^d

Definizione 4.24 (Scatole in \mathbb{R}^d). Una scatola è il prodotto cartesiano di intervalli chiusi e limitati

$$S = I_1 \times \dots \times I_d = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d.$$

Richiediamo che $a_j \leq b_j$ per ogni j . Se una scatola ha almeno un lato nullo ($a_j = b_j$ per qualche j) la chiamiamo scatola degenera.

Definizione 4.25. La misura elementare di una scatola $S = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$ è:

$$\text{mis}(S) = \text{mis}([a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_d - a_d).$$

Ad esempio, in \mathbb{R} $\text{mis}[1, 3] = 2$. In \mathbb{R}^2 ,

$$\text{mis}([0, 2] \times [0, 3]) = 6, \quad \text{mis}([2, 2] \times [3, 4]) = 0.$$

Le scatole degeneri hanno misura elementare nulla.

Definiamo ora la misura esterna di Lebesgue. Sia

Definizione 4.26 (ricoprimento di un insieme attraverso scatole). Se $E \subset \mathbb{R}^d$, una famiglia di scatole $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento di E se vale $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.

Notiamo che ogni insieme ammette almeno un ricoprimento con la famiglia di scatole $(S_n) = ([-n, n] \times \dots \times [-n, n])_{n \in \mathbb{N}}$.

Nelle parti che seguono sarà a volte sottointeso che insiemi del tipo S_n, S_k , etc. indicano scatole. Inoltre, tutti i ricoprimenti che interverranno saranno effettuati attraverso famiglie di scatole.

Definizione 4.27 (misura esterna di Lebesgue). Dato un qualsiasi $E \subset \mathbb{R}^d$, definiamo

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \text{mis}(S_n) : (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ è un ricoprimento di } E \right\} \in [0, +\infty] \quad (4.4)$$

In sostanza, la misura esterna è quel numero (eventualmente $+\infty$) che “ottimizza” la somma $\sum_n \text{mis } S_n$ al variare di tutti i possibili ricoprimenti dell’insieme assegnato E . Se per ogni ricoprimento (S_n) la somma delle misure è $+\infty$, allora la misura esterna è $+\infty$.

Osservazione 4.28. Se $A = I_1 \times \cdots \times I_d$, con I_1, \dots, I_d intervalli limitati (aperti, chiusi, semiaperti a destra o a sinistra) di estremi $a_1 \leq b_1, \dots, a_d \leq b_d$, si può dimostrare che

$$\mu^*(A) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d) = \text{mis}(A),$$

cioè che la misura esterna coincide con la misura elementare. Mostrare l’uguaglianza non è però banale come sembra. ¹²

Proposizione 4.29 (Proprietà della misura esterna $\mu^* : 2^{\mathbb{R}^d} \rightarrow [0, +\infty]$). La misura esterna di Lebesgue ha le seguenti proprietà:

- (a) $\mu^*(\emptyset) = 0$;
- (b) se $E \subset F$, allora $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$;
- (c) Se $E_n \subset \mathbb{R}^d$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

Dimostrazione. La dimostrazione di (a) è immediata. Basta scegliere il ricoprimento $S_n = \{0\}$ per ogni n , in cui ogni scatola è la scatola degenerata formata da un solo punto.

La prova di (b) si può effettuare come segue: se $\mu^*(F) = +\infty$, allora non c’è nulla da dimostrare. Se invece $\mu^*(F) < \infty$, allora, per la proprietà di approssimazione dell’estremo inferiore, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un ricoprimento $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di F tale che

$$\mu^*(F) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \text{mis}(S_n).$$

Ma, poiché $E \subset F$, il ricoprimento (S_n) è anche un ricoprimento di E . Quindi avremo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{mis}(S_n) \geq \mu^*(E)$$

e la prova è conclusa.

Ora proviamo la (c). Supponiamo che $\sum_{n \geq 1} \mu^*(E_n) < \infty$, altrimenti non c’è nulla da dimostrare. In particolare sarà $\mu^*(E_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $\varepsilon > 0$ un numero positivo. Per la proprietà di approssimazione dell’estremo inferiore, per ogni n fissato, possiamo trovare un ricoprimento di scatole $(S_{n,j})_{j \in \mathbb{N}}$ che copre l’insieme E_n e che soddisfi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \text{mis}(S_{n,j}) < \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Osserviamo anche che la famiglia $(S_{n,j})_{(n,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ è un ricoprimento numerabile di $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Ma allora

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{(n,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \text{mis}(S_{n,j}) \stackrel{(\#)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \text{mis}(S_{n,j}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Lasciando tendere ε a zero, si ottiene la prova del punto (c). ¹³ □

¹²Per una discussione sulla misura esterna si può vedere il libro: T. Tao, An introduction to measure theory. Graduate Studies in Mathematics, 126. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011, del quale è disponibile un draft alla url <http://terrytao.files.wordpress.com/2011/01/measure-book1.pdf>

¹³L’uguaglianza $(\#)$ è corretta, ma darne una spiegazione rigorosa richiederebbe un piccolo approfondimento che non facciamo.

Notiamo che tramite la misura esterna si può “misurare” qualsiasi insieme. Non vale però la additività numerabile per famiglie disgiunte di insiemi qualsiasi.

Definizione 4.30 (Insieme di misura esterna nulla). Diciamo che $E \subset \mathbb{R}^d$ ha misura nulla se $\mu^*(E) = 0$. In altre parole, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento di scatole chiuse $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dell'insieme E che soddisfi $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(S_n) < \varepsilon$ (22)

Esempio 4.31. I seguenti tipi di insiemi hanno misura nulla:

- (a) L'insieme vuoto: $\mu^*(\emptyset) = 0$. Scegliere il ricoprimento formato da infinite scatole banali S_n .
- (b) Ogni insieme finito di p punti $x^1, \dots, x^p \in \mathbb{R}^d$. Basta scegliere il ricoprimento in cui $S_j = \{x^j\}$, la scatola degenera formata dal solo punto x^j , per ogni $j \leq p$ e, ad esempio, $S_k = \{x^1\}$ per ogni $k > j$.
- (c) Ogni scatola degenera $S = I_1 \times \dots \times I_d \subset \mathbb{R}^d$ (in cui $I_j = [a_j, a_j]$ per almeno un j). Scegliere $S_n = S$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- (d) Ogni unione finita o numerabile $\cup_n A_n$ dove $\mu^*(A_n) = 0$ per ogni n . Basta usare la subadditività:

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = 0.$$

Esempio 4.32. Come caso particolare del punto (d), possiamo affermare che $\mu^*(\mathbb{Q}) = 0$. L'insieme dei numeri razionali ha misura esterna nulla.

Osserviamo che ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ può essere approssimato da una successione di numeri razionali. Infatti, se x si rappresenta come allineamento decimale eventualmente illimitato nella forma $x = a_0, a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \dots$, il troncamento di x alle n -esima cifra decimale $x_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ è razionale e soddisfa

$$|x_n - x| \leq \frac{1}{10^n}.$$

In definitiva, l'insieme dei numeri razionali è numerabile e in particolare ha misura esterna nulla, ma si distribuisce come un pettine a denti “infinitamente fitti” all'interno della retta reale \mathbb{R} .

4.6. Insiemi misurabili secondo Lebesgue in \mathbb{R}^d

Definizione 4.33 (insieme misurabile secondo Lebesgue). $A \subset \mathbb{R}^d$ è misurabile se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ che contiene A e tale che ¹⁴

$$\mu^*(\Omega \setminus A) < \varepsilon.$$

Esempio 4.34. I seguenti tipi di insieme sono misurabili.

- (1) Ogni insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^d$. Basta scegliere $\Omega = A$ stesso.
- (2) Ogni prodotto cartesiano di intervalli. Visto il caso di $A = [0, \lambda] \times [0, \mu]$. Basta scegliere un aperto del tipo $\Omega =]-\varepsilon, \lambda + \varepsilon[\times]-\varepsilon, \mu + \varepsilon[$ e stimare con argomenti elementari la misura esterna della differenza.
- (3) Ogni insieme di misura esterna nulla. Non riportiamo la verifica.

In generale è estremamente difficile “costruire” esempi di insiemi che siano non misurabili in \mathbb{R}^d secondo la Definizione 4.33 (un esempio è descritto in http://en.wikipedia.org/wiki/Vitali_set)

Diamo ora l'enunciato del risultato di base fondamentale sugli insiemi misurabili e sulla misura di Lebesgue nello spazio euclideo.

¹⁴Una definizione di misurabilità che è utilizzata in molti testi e che produce in \mathbb{R}^d la stessa classe di insiemi misurabili è la seguente: $A \subset \mathbb{R}^d$ è misurabile se per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}^d$ risulta

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Non utilizzeremo qui tale definizione.

Teorema 4.35. Sia μ^* la misura esterna in \mathbb{R}^d e sia $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ la famiglia dei sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R}^d . Allora $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ è una σ -algebra. Inoltre, se poniamo $\mu(A) := \mu^*(A)$ per ogni $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, la funzione $\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, +\infty]$ è una misura e si chiama misura di Lebesgue in \mathbb{R}^d .

Non discutiamo la dimostrazione di questo risultato. A volte scriveremo $d\mu_d(x)$, altre volte $d\mu(x)$ oppure più brevemente dx per indicare la misura di Lebesgue d -dimensionale in \mathbb{R}^d .

Osservazione 4.36 (Proprietà addizionali degli insiemi misurabili e della misura di Lebesgue). Ripetiamo le proprietà menzionate in precedenza.

- Gli aperti sono misurabili. ¹⁵
- Gli insiemi di misura esterna nulla sono misurabili. (Proprietà di completezza della misura di Lebesgue).
- Per ogni scatola $S \subset \mathbb{R}^d$, vale $\mu(S) = \text{mis}(S)$. Cioè la misura di Lebesgue di una scatola coincide con la misura elementare.

4.7. Funzioni misurabili e integrale

Indichiamo con $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ la σ -algebra degli insiemi misurabili e con μ la misura di Lebesgue in \mathbb{R}^d . Ora, lavorando in \mathbb{R}^d con la σ -algebra $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ definiamo le funzioni misurabili.

Definizione 4.37 (funzione misurabile). Una funzione $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ si dice misurabile se per ogni $c \in [-\infty, +\infty]$, l'insieme $f^{-1}([c, +\infty])$ risulta misurabile.

Proposizione 4.38. Se $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$, le seguenti condizioni sono equivalenti.

- (a) $f^{-1}([c, +\infty])$ è misurabile per ogni $c \in [-\infty, +\infty]$;
- (b) $f^{-1}([c, +\infty])$ è misurabile per ogni $c \in [-\infty, +\infty]$;
- (c) $f^{-1}([-\infty, c])$ è misurabile per ogni $c \in [-\infty, +\infty]$;
- (d) $f^{-1}([-\infty, c])$ è misurabile per ogni $c \in [-\infty, +\infty]$;
- (e) $f^{-1}(\Omega)$ è misurabile per ogni Ω aperto di \mathbb{R} .

Notazione. L'insieme $[-\infty, +\infty]$ dei numeri reali estesi si indica a volte con $\overline{\mathbb{R}}$

Dimostrazione. L'equivalenza tra (a) e (c) si vede osservando che $f^{-1}([c, +\infty])$ è il complementare di $f^{-1}([-\infty, c])$. Ricordare la definizione di σ -algebra.

Per mostrare che (a) implica (b), basta scrivere (supponiamo per semplicità che c sia un numero finito)

$$f^{-1}([c, +\infty]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}([c - 1/n, +\infty])$$

come intersezione numerabile di insiemi misurabili. Le altre equivalenze, sino alla (d) si provano in modo analogo. Non discutiamo invece la condizione (e). \square

Esempio 4.39. Le funzioni continue $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Usare l'Osservazione 3.30 e il fatto che gli aperti sono misurabili. Però la classe delle funzioni misurabili è molto più ampia di quella delle funzioni continue. Ad esempio, ogni funzione caratteristica $\mathbb{1}_E$ di un insieme misurabile è misurabile.

Definizione 4.40 (funzione semplice). Una funzione semplice è una funzione misurabile $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (24) che assume un numero finito di valori reali. In altre parole $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ è semplice se $s(A) = \{c_1, \dots, c_p\}$ per opportuni numeri c_1, \dots, c_p .

Osservazione 4.41. Se $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ è semplice secondo la definizione appena data e se indichiamo con $\{c_1, \dots, c_p\}$ i p diversi valori da essa assunti, ponendo $A_k = s^{-1}(\{c_k\})$ per $k = 1, \dots, p$, allora gli insiemi $A_1, \dots, A_p \subset \mathbb{R}^d$ sono disgiunti e misurabili, la loro unione copre \mathbb{R}^d e abbiamo la rappresentazione

$$s(x) = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{A_k}(x). \tag{4.5}$$

¹⁵Questo assicura ad esempio che la σ -algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ contiene la σ -algebra degli insiemi Boreliani.

Esempio 4.42. *Alla luce dell'esempio precedente, la funzione caratteristica dei razionali,*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} + 0 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$$

è semplice e misurabile, perché \mathbb{Q} è misurabile. Si può provare che tale funzione non è continua in nessun punto. D'altra parte, però, la funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, identicamente nulla differisce da f solo in punti dell'insieme \mathbb{Q} , che ha misura esterna nulla. Vedremo che, dal punto di vista della teoria dell'integrale, le funzioni f e g si comportano in modo analogo.

Diamo la seguente definizione:

Definizione 4.43 (Quasi ovunque). *Se A è misurabile, si dice che una proprietà vale quasi ovunque o quasi dappertutto in A se se esiste un insieme di misura nulla $N \subset A$ tale che la proprietà vale per ogni punto di $A \setminus N$.*

Esempio 4.44. *La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ è nulla quasi ovunque, perché l'insieme \mathbb{Q} ha misura nulla.*

Definizione 4.45 (integrale di funzioni semplici). *Data $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ semplice, $s = \sum_{k=1}^p c_k \mathbb{1}_{A_k}$, con $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ insiemi disgiunti e misurabili. Se $E \subset \mathbb{R}^d$, poniamo¹⁶*

$$\int_E s d\mu = \sum_{k=1}^p c_k \mu(E \cap A_k).$$

Se capita che $\mu(A_k) = +\infty$ e $c_k = 0$, allora si usa la convenzione $0 \cdot \infty = 0$.

Attraverso le funzioni semplici, possiamo definire l'integrale di una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, misurabile e non negativa:

Definizione 4.46 (integrale di $f \geq 0$). *Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile e sia $f : A \rightarrow [0, +\infty]$, misurabile. Allora poniamo*

$$\int_A f := \sup \left\{ \int_A s \mid s \text{ misurabile, semplice e tale che } 0 \leq s \leq f \text{ in } A. \right\}$$

È immediato osservare che $\int_A f d\mu \in [0, +\infty]$. La scrittura $0 \leq s \leq f$ in A è un'abbreviazione di $0 \leq s(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in A$. La scrittura $\int_A f d\mu$ è la versione sintetica di $\int_A f(x) d\mu(x)$.

Elenchiamo ora (senza dimostrazione) alcune proprietà dell'integrale.

(a) Se $A \subset \mathbb{R}^d$ è misurabile e se f, g sono misurabili su A con $0 \leq f \leq g$, allora

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu.$$

(b) Se $A \subseteq B \subset \mathbb{R}^d$ con entrambi A, B misurabili e se f è misurabile non negativa su B , allora

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$$

(c) Se f è misurabile e non negativa su A , allora se $\lambda \geq 0$ è misurabile vale

$$\int_A \lambda f d\mu = \lambda \int_A f d\mu.$$

¹⁶ Osserviamo che la scrittura di una funzione semplice nella forma $s = \sum_k c_k \mathbb{1}_{A_k}$ non è univoca. Ad esempio, se E_1 ed E_2 sono misurabili disgiunti e poniamo $E = E_1 \cup E_2$, abbiamo tre scritture per la stessa funzione

$$\mathbb{1}_E = \mathbb{1}_{E_1} + \mathbb{1}_{E_2} = \mathbb{1}_E + 0 \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus E}.$$

Non è difficile però verificare che l'integrale $\int_E s d\mu$ produce sempre lo stesso risultato, comunque venga rappresentata s .

(d) Infine, se $f, g \geq 0$ sono misurabili su A , allora vale

$$\int_A (f + g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu.$$

Le proprietà (a), (b), e (c) appena elencate si possono verificare per esercizio usando la definizione. L'uguaglianza nel punto (d), nonostante l'aspetto innocente, non è immediata.

Verifichiamo nella seguente proposizione che funzioni uguali quasi ovunque hanno lo stesso integrale.

Proposizione 4.47. *Siano f, g funzioni misurabili e non negative su un insieme misurabile A . Se $f = g$ quasi dappertutto, allora*

$$\int_A f = \int_A g.$$

Dimostrazione. Supponiamo per iniziare che $\int_A f d\mu < \infty$. Allora, per la proprietà di approssimazione dell'estremo superiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione semplice $s = \sum_k c_k \mathbb{1}_{A_k}$, (con $(A_k)_k$ famiglia finita disgiunta di insiemi misurabili la cui unione è A) per cui

$$\int_A f d\mu - \varepsilon < \int_A s d\mu = \sum_k c_k \mu(A_k).$$

Ora ricordiamo che possiamo decomporre $A = E \cup N$, con $\mu(N) = 0$ e unione disgiunta. Allora

$$\begin{aligned} \sum_k c_k \mu(A_k) &= \sum_k c_k (\mu(A_k \cap E) + \mu(A_k \cap N)) = \sum_k c_k \mu(A_k \cap E) \\ &= \sum_k c_k \mu(A_k \cap E) + 0\mu(N) = (*). \end{aligned}$$

Abbiamo usato il fatto che N ha misura nulla e quindi ogni $N \cap A_k$ ha misura nulla per ogni k . Ma la quantità (*) non è altro che l'integrale della funzione semplice misurabile

$$\tilde{s} := \sum_k c_k \mathbb{1}_{A_k \cap E} + 0\mathbb{1}_N.$$

Notiamo anche che la funzione \tilde{s} soddisfa $0 \leq \tilde{s}(x) \leq g(x)$. Questo è vero perché nei punti di E vale $g = f$, mentre nei punti di N abbiamo $\tilde{s}(x) = 0 \leq g(x)$, essendo g non negativa. Quindi, per definizione di integrale, risulta

$$(*) = \int_A \tilde{s} d\mu \leq \int_A g d\mu.$$

Abbiamo in definitiva provato che $\int_A f d\mu - \varepsilon \leq \int_A g d\mu$. Poiché la disuguaglianza vale per $\varepsilon > 0$ arbitrario, possiamo concludere che

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu. \tag{4.6}$$

Con un ragionamento analogo (usando la proprietà opportuna di approssimazione per l'estremo superiore, qualora esso sia $+\infty$), si prova che se $\int_A f d\mu = +\infty$, allora anche $\int_A g d\mu = +\infty$.

Ripetendo tutto il ragionamento scambiando i ruoli di f e g si ottiene la disuguaglianza opposta a (4.6) e, in definitiva, l'uguaglianza tra i due integrali. \square

Esempio 4.48 (Misura con densità $f \geq 0$). *Se $f \geq 0$ è misurabile in $E \subset \mathbb{R}^d$, allora si può costruire una misura nel modo seguente*

$$\nu(A) := \int_A f(x) dx \quad \forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \quad A \subseteq E.$$

Supponiamo ad esempio che $\int_E f d\mu$ sia finito. Si può dimostrare che ν è una misura. Un'istanza particolarmente interessante è quella in cui

$$\nu(E) = \int_E f(x) d\mu(x) = 1.$$

In tal caso la misura ottenuta si chiama misura di probabilità con densità f . Ad esempio, la funzione

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

è la densità della misura gaussiana su $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Ora passiamo alla definizione di integrale per funzioni con segno variabile. L'idea è quella di "dividere" la funzione in una parte negativa e una parte positiva.

Definizione 4.49 (Parte positiva e negativa). Sia $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ una funzione a valori estesi. Definiamo due nuove funzioni $f^+ : A \rightarrow [0, +\infty]$ e $f^- : A \rightarrow [0, +\infty]$ ponendo per ogni $x \in A$,

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0; \\ 0 & \text{se } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

$$f^-(x) = -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} 0 & \text{se } f(x) \geq 0; \\ -f(x) & \text{se } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

In questa definizione conveniamo di porre all'occorrenza $\max\{+\infty, 0\} = +\infty$ e $\min\{-\infty, 0\} = -\infty$.

È immediato verificare che vale:

$$f = f^+ - f^- \quad \text{e} \quad |f| = f^+ + f^-, \tag{4.7}$$

Si dimostra che se f è misurabile, allora f^+ , f^- e $|f|$ sono tutte funzioni misurabili e non negative. Il loro integrale è dunque ben definito. Per evitare forme di tipo $+\infty - \infty$ ha senso definire l'integrale di f soltanto nel caso in cui almeno una delle due funzioni f^+ e f^- abbia integrale finito. Normalmente, ciò che si fa è definire l'integrale nel caso in cui entrambe f^+ e f^- abbiano integrale finito.

Definizione 4.50 (funzione integrabile). Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ misurabile. Sia $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ una funzione misurabile. Si dice che f è integrabile su A (oppure f ha integrale finito su A , oppure f è assolutamente integrabile su A , oppure, f è sommabile su A) se

$$\int_A |f| d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_A f^- d\mu < +\infty$$

Definizione 4.51 (Integrale di funzioni con segno variabile). Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile. Sia $f = f^+ - f^- : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Supponiamo che f sia integrabile su A . Allora definiamo

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-. \tag{4.8}$$

Osserviamo che poiché abbiamo richiesto che f sia integrabile su A , l'integrale $\int_A f$ è un numero reale finito. È facile anche verificare usando (4.8) che vale la disuguaglianza triangolare

$$\left| \int_A f(x) d\mu(x) \right| \leq \int_A |f(x)| d\mu(x) \quad \text{per ogni } f \text{ integrabile su } A.$$

Linguaggio. Si scrive usualmente

$$\|f\|_{L^1(A)} = \int_A |f| d\mu.$$

e si scrive $f \in L^1(A)$ per dire che f è integrabile (integrale finito) su A .

Osservazione 4.52. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, oppure integrabile nel senso dell'integrale di Riemann, allora il suo integrale coincide con l'integrale studiato nei corsi elementari. In particolare, se conosciamo una primitiva F di f , allora risulta

$$\int_a^b f(x) d\mu(x) = F(b) - F(a).$$

L'integrale di Lebesgue permette però di integrare anche funzioni per le quali l'integrale "elementare" costruito tramite le somme di Riemann non è ben definito. Ad esempio, la funzione di Dirichlet $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ è integrabile secondo la teoria di Lebesgue e vale

$$\int_a^b \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) d\mu(x) = \int_a^b 0 dx = 0,$$

perché $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = 0$ quasi dappertutto. Tale funzione però non è integrabile secondo la teoria dell'integrale di Riemann.

4.8. Misurabilità e passaggi al limite

Consideriamo una successione di funzioni $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, definite per ogni n su $A \subset \mathbb{R}^d$. Sappiamo già che la continuità delle f_n non si conserva nel passaggio al limite puntuale $\lim_n f_n = f$. Vedere l'Esempio 3.34, punto (b). (Non dimentichiamo però che la continuità si conserva per i limiti uniformi (Teorema 3.40).)

Possiamo ora domandarci come si comporta la nozione di misurabilità rispetto a procedure di limite per successioni di funzioni. Data una successione di funzioni misurabili $f_n : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ su $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, introduciamo le funzioni

$$\begin{aligned} \sup f_n : A &\rightarrow \overline{\mathbb{R}}, & (\sup f_n)(x) &:= \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \\ \inf f_n : A &\rightarrow \overline{\mathbb{R}}, & (\inf f_n)(x) &:= \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Se f_n è misurabile per ogni n , allora le funzioni $\sup f_n$ e $\inf f_n$ sono misurabili. Infatti,

$$\{x \in A : \sup f_n(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f_n(x) > c\}$$

è un'unione numerabile di insiemi misurabili. Analogamente si ragiona per $\inf f_n$.

Proposizione 4.53. Se $A \subset \mathbb{R}^d$ è misurabile e se $(f_n) : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è una successione di funzioni convergente puntualmente ad $f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, allora f è misurabile.

Dimostrazione. Ragioniamo in due passi.

Passo 1. Verifichiamo l'affermazione prima nel caso in cui (f_n) sia una successione *monotona crescente*. Cioè assumendo che valga

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e per ogni } x \in A.$$

In questo caso semplificato, fissato c , risulta

$$\{x \in A : f(x) > c\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in A : f_n(x) > c\},$$

che è un insieme misurabile, perché unione numerabile di insiemi misurabili.

Passo 2. Se f_n non è crescente, costruiamo la successione $g_n : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definita in ogni x come segue:

$$g_n(x) := \inf_{k \geq n} f_k(x) = \inf\{f_n(x), f_{n+1}(x), \dots\}.$$

La successione g_n è monotona crescente (con x fissato, al crescere di n facciamo l'estremo inferiore su insiemi via via piú piccoli). Le funzioni g_n sono tutte misurabili e non è difficile riconoscere, usando la definizione di limite, che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \quad \text{per ogni } x \in A.$$

A questo punto, $f = \lim g_n = \lim f_n$ è misurabile, per quanto detto al Passo 1. □

Ora discutiamo il problema della possibilità di “portare il segno di limite dentro l'integrale”. Precisamente, se abbiamo una successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni integrabili su un insieme A che converge puntualmente (o quasi dappertutto) a un limite $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, vogliamo analizzare la correttezza dell'uguaglianza:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n(x) d\mu(x) = \int_A \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\mu(x). \quad (4.9)$$

L'esempio seguente mostra che tale uguaglianza in generale è falsa.

Esempio 4.54. Sia $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, con $f_n(x) = n\mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}(x) \rightarrow f(x) = 0$ quasi dappertutto: precisamente in tutti i punti di $[0, 1]$ privato del punto 0, che ha misura nulla. (Osserviamo che la convergenza non è uniforme.) Risulta

$$\int_{[0,1]} f_n = \int_{[0, \frac{1}{n}]} ndx = 1 \quad \text{mentre} \quad \int_{[0,1]} f d\mu = \int_{[0,1]} 0d\mu = 0.$$

Quindi l'uguaglianza (4.9) è falsa.

Il prossimo risultato assicura che l'uguaglianza (4.9) è vera sotto una condizione di monotonia.

Teorema 4.55 (Teorema di Beppo Levi sulla convergenza monotona). Se $f_n : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sono funzioni misurabili e se vale: (27)

$$f_n(x) \geq 0 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e per ogni } x \in A \quad (a)$$

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e } x \in A, \quad (b)$$

allora vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n(x) d\mu(x) = \int_A \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\mu(x).$$

Non dimostriamo questo teorema (si può trovare una dimostrazione in [R]). Facciamo però le seguenti considerazioni.

- L'enunciato vale anche se sostituiamo in ogni occorrenza “per ogni $x \in A$ ” con “per quasi ogni $x \in A$ ”.
- Un caso particolare del Teorema di Beppo Levi è quello già incontrato, in cui

$$f_n = \mathbb{1}_{E_n}$$

con $E_n \subset E_{n+1}$ famiglia monotona crescente di insiemi misurabili. Tale successione è monotona crescente e non negativa. Il limite puntuale di f_n è $f = \mathbb{1}_{\cup_n E_n}$. Quindi il Teorema di Beppo Levi fornisce:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{E_n} d\mu = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\cup_n E_n} d\mu.$$

In altre parole, abbiamo ritrovato la formula

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(E_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

che già conoscevamo dalla Proposizione 4.21, a pagina 24.

- Il passaggio al limite per convergenza monotona si può effettuare anche se f_n è monotona crescente e esiste una funzione (*minorante*) $g \in L^1(A)$ per cui valga

$$f_n(x) \geq g(x) \quad \text{per quasi ogni } x \in A.$$

Basta applicare il Teorema di Beppo Levi alla successione $(f_n - g)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lo stesso si può fare se (f_n) è monotona *decreciente* e c'è una funzione maggiorante $g \in L^1(A)$ per cui valga $f_n(x) \leq g(x)$ per ogni n e quasi dappertutto.

Nell'esempio seguente vediamo una applicazione del Teorema di Beppo Levi.

Esempio 4.56. Se $a \in \mathbb{R}$ ed è data una funzione $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ misurabile, allora possiamo domandarci se tale funzione è integrabile sull'insieme illimitato $A = [a, +\infty[$. Prendiamo la successione approssimante

$$g_n(x) = |f(x)| \mathbb{1}_{[a,n]}(x).$$

Tale successione è monotona crescente e vale $\lim_n g_n(x) = |f(x)|$ per ogni $x \in [a, +\infty[$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,n]} |f(x)| d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[a,+\infty[} g_n(x) = (\text{Teor. B. Levi}) = \int_{[a,+\infty[} |f(x)| d\mu(x).$$

Quindi la risposta è la seguente: f è integrabile su $A = [a, +\infty[$ se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n |f(x)| d\mu(x) \quad \text{è finito.}$$

In tal caso vale la formula (anche senza valore assoluto)

$$\int_a^{+\infty} f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^n f(x) d\mu(x).$$

Un risultato analogo vale per discutere l'integrabilità di una funzione continua $f :]-\infty, b]$ sull'intervallo $]-\infty, b]$, oppure su altri intervalli al bordo dei quali la funzione non è definita.

Esempio 4.57. Vediamo alcuni esempi.

- 1) Calcolo di $\int_0^{+\infty} e^{-x} d\mu_1(x)$. Per il Teor. di Beppo Levi vale

$$\int_{[0,+\infty[} e^{-x} d\mu_1(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,n]} e^{-x} d\mu_1(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [-e^{-x}]_0^n = 1.$$

Quindi $e^{-x} \in L^1([0, +\infty[)$ e il suo integrale vale 1.

- 2) Ora verifichiamo che $e^{-x^2} \in L^1([1, +\infty[)$. Basta vedere che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n e^{-x^2} dx \quad \text{esiste ed è finito.}$$

Il fatto che il limite esista è evidente, perché la successione $a_n = \int_1^n e^{-x^2} dx$ è monotona crescente. Per vedere che tale limite è finito, osserviamo che su $[1, +\infty[$ vale la stima $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Quindi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n e^{-x^2} dx \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n e^{-x} dx = 1.$$

Quindi $e^{-x^2} \in L^1([1, +\infty[)$. È in generale noto che $e^{-x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ e che $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

3) Calcolo di

$$\int_{[1, +\infty[} \frac{1}{x^2} d\mu_1(x) \quad e \quad \int_{]0, 1]} \frac{1}{x^2} d\mu_1(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[1/n, 1]} \frac{1}{x^2} d\mu_1(x)$$

Esercizio 4.58 (Esercizio per casa). Verificare, lavorando sulla falsariga dell'esercizio precedente, che

$$\frac{1}{x^p} \in L^1([1, +\infty[) \quad \text{se e solo se } p > 1$$

e che

$$\frac{1}{x^p} \in L^1(]0, 1]) \quad \text{se e solo se } p < 1$$

Per successioni di funzioni non monotone, il passaggio al limite sotto il segno di integrale si può effettuare utilizzando il seguente teorema.

Teorema 4.59 (Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata). Siano $f_n : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ delle funzioni misurabili e assumiamo che puntualmente (o quasi ovunque in A) risulti $\lim f_n = f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo inoltre che esista $h : A \rightarrow [0, +\infty]$ che soddisfi le due condizioni

$$h \in L^1(A), \tag{A}$$

$$|f_n(x)| \leq h(x) \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N} \text{ e per quasi ogni } x \in A. \tag{B}$$

Allora vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n(x) d\mu(x) = \int_A \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\mu(x). \tag{4.10}$$

Dimostrazione. Utilizziamo il Teorema di Beppo Levi. La condizione (B) assicura che valga quasi ovunque

$$0 \leq f_n + h \leq 2h.$$

Inoltre, seguendo il ragionamento effettuato nella Proposizione 4.53, sostituiamo f_n con $g_n := \inf_{k \geq n} f_k$ ottenendo in tal modo f come limite puntuale di (g_n) , che è una successione monotona crescente di funzioni misurabili. Notiamo anche che $f_n \geq g_n$ puntualmente. Inoltre $g_n \geq -h$ puntualmente quasi ovunque per ogni n . Quindi possiamo usare il Teorema di Beppo Levi per la successione (g_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n d\mu \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A g_n d\mu = (\text{Teor. di Beppo Levi}) = \int_A \lim_n g_n d\mu = \int_A f d\mu.$$

Confrontando primo e ultimo termine, otteniamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_A f_n d\mu \geq \int_A \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu.$$

Ripetendo lo stesso ragionamento con $-f_n$ si ottiene la disuguaglianza opposta e quindi l'uguaglianza (4.10). \square

Esempio 4.60. Calcoliamo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sin(x + x^n) dx.$$

Osserviamo che il limite puntuale dell'integrando è $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin(x + x^n) = \sin x$, quasi ovunque. Inoltre vale la stima ovvia

$$|\sin(x + x^n)| \leq 1 \quad \text{per ogni } n, x.$$

Possiamo allora scegliere $h(x) = 1 \in L^1(0, 1)$ come funzione maggiorante. Vale quindi il Teorema di Lebesgue e risulta:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \sin(x + x^n) dx = \int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos(1).$$

Esempio 4.61. Verifichiamo ora che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[1, +\infty[} \frac{1 + \sin x}{n^2 + x^2} d\mu_1(x) = 0,$$

perché il limite puntuale dell'integrando è zero e vale per ogni x e per ogni n ,

$$\left| \frac{1 + \sin x}{n^2 + x^2} \right| \leq \frac{2}{n^2 + x^2} \leq \frac{2}{x^2} = h(x) \in L^1(1, +\infty).$$

Poiché tutte le funzioni si controllano con una funzione L^1 , si può passare al limite sotto il segno di integrale ottenendo il risultato 0.

Esercizio 4.62 (Per casa). Si calcolino usando il teorema della convergenza dominata i seguenti limiti.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} \sin\left(\frac{n+x^2}{n^2}\right) d\mu_1(x), & \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[1, +\infty[} e^{-nx^2} d\mu_1(x), \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0,1]} \sqrt{n} \cos\left(\frac{x^2}{n}\right) \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}]}(x) dx. & \quad (\text{Suggerimento: provare } h(x) = 1/\sqrt{x}) \end{aligned}$$

Osservazione 4.63. Un'altra applicazione dei teoremi di passaggio al limite (che non abbiamo modo di discutere qui) afferma quanto segue. Se (f_n) è una successione di funzioni misurabili su A , con $f_n \rightarrow f$ in media e $f_n \rightarrow g$ quasi dappertutto, allora risulta necessariamente $f = g$ quasi ovunque.

4.9. Teoremi di riduzione

Esempio 4.64 (Illustrazione del Principio di Cavalieri.). Calcolo dell'area del triangolo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$. Calcolo dell'integrale della funzione $f(x, y) = x + y$ sul medesimo intervallo. (29)

Riportiamo per completezza l'enunciato del teorema di riduzione di Tonelli. Esso dà la formulazione rigorosa del principio di Cavalieri.

Teorema 4.65 (Teorema di Tonelli). Scriviamo $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ e scriviamo $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Allora, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^p$, l'insieme

$$A_x := \{y \in \mathbb{R}^q : (x, y) \in A\}$$

è misurabile in \mathbb{R}^q , la funzione $x \mapsto \mu_q(A_x)$ è misurabile e risulta

$$\mu_d(A) = \int_{\mathbb{R}^p} d\mu_p(x) \mu_q(A_x) \tag{4.11}$$

Sia poi $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$, misurabile e non negativa. Allora, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^p$ la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è misurabile in \mathbb{R}^q . Inoltre la funzione $x \mapsto \int_{A_x} f(x, y) d\mu_q(y)$ è misurabile e vale

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) d\mu_d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{A_x} f(x, y) d\mu_q(y) \right) d\mu_p(x). \tag{4.12}$$

Osservazione 4.66. Notiamo informalmente le seguenti cose.

- Se applichiamo il Teorema di Tonelli ad un insieme A "regolare", tutti i "quasi ovunque" scompaiono e l'uguaglianza (4.11) diventa il Principio di Cavalieri.
- Un teorema di riduzione per integrali multipli in integrali ripetuti (noto come Teorema di Fubini) vale per funzioni $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ se si sostituisce l'ipotesi di non negatività $f(x, y) \geq 0$ per ogni $(x, y) \in A$ con l'ipotesi di integrabilità

$$\int_A |f(x, y)| d\mu_d(x, y) < \infty.$$

Nella formula (4.12), l'integrale a sinistra si chiama integrale multiplo, mentre gli integrali a destra si chiamano integrali ripetuti.

Esercizio 4.67. Dato $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$, calcolare

$$\int_A (1 + xy) d\mu_2(x, y).$$

4.10. Convergenza in media e in misura

Concludiamo con alcuni cenni sulle definizioni di convergenza in media e in misura.

Definizione 4.68 (Convergenza in media o in L^1). Siano $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ delle funzioni misurabili e con integrale finito per ogni $n \in \mathbb{N}$ su $A \subset \mathbb{R}^d$. Sia poi f una funzione anch'essa integrabile su A . Si dice che $f_n \rightarrow f$ in media su A se risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A |f_n - f| d\mu = 0 \tag{4.13}$$

Possiamo anche scrivere (4.13) nella forma

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^1(A)} \rightarrow 0$$

È doveroso commentare che questa definizione di convergenza non assicura l'unicità del limite. È sufficiente infatti osservare che se $f_n \rightarrow f$ in media, allora risulta anche $f_n \rightarrow \tilde{f}$ non appena $\tilde{f} = f$ quasi ovunque. Non facciamo in questa sede ulteriori approfondimenti sull'argomento.

Esempio 4.69. Studio della convergenza puntuale e in media per le successioni:

$$\begin{aligned} f_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, & f_n &= \mathbb{1}_{]0, \frac{1}{n}[} \\ g_n : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}, & g_n &= n\mathbb{1}_{]0, \frac{1}{n}[} \quad e \\ h_n : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & h_n &= \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[n, 2n[}. \end{aligned}$$

Definizione 4.70 (convergenza in misura). Sia $A \subset \mathbb{R}^d$, misurabile e siano f e f_n misurabili su A . Diciamo che f_n converge a f in misura su A se per ogni $\lambda > 0$ risulta

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \lambda\}) = 0$$

Esempio 4.71. Discussione della convergenza in misura delle tre successioni nell'Esempio 4.69. Studio della convergenza puntuale e in misura della famiglia $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n = \mathbb{1}_{[n, 2n[}$.

Linguaggio. Nel linguaggio della probabilità la convergenza in misura si chiama convergenza in probabilità. La convergenza quasi dappertutto si chiama convergenza quasi certa.

La convergenza in media implica la convergenza in misura.

Proposizione 4.72. Siano $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni misurabili e in L^1 per ogni n . Se $f_n \rightarrow f$ in media, allora $f_n \rightarrow f$ in misura su A .

Dimostrazione. Riportiamo per completezza la dimostrazione, che è molto semplice. Sia $\varepsilon > 0$. Poiché $f_n \rightarrow f$ in media, esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int_A |f_n - f| < \varepsilon \quad \forall n \geq \tilde{n}.$$

Vogliamo provare la convergenza in misura. Fissiamo $\lambda > 0$ e dividiamo l'insieme A nell'unione disgiunta dei sottoinsiemi misurabili

$$A = \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| \leq \lambda\} \cup \{x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \lambda\}$$

che indichiamo brevemente come $\{|f_n - f| > \lambda\}$ e $\{|f_n - f| \leq \lambda\}$. Allora, se $n \geq \tilde{n}$, vale

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \int_A |f_n - f| \\ &= \int_{\{|f_n - f| \leq \lambda\}} |f_n - f| d\mu + \int_{\{|f_n - f| > \lambda\}} |f_n - f| d\mu \\ &\geq \int_{\{|f_n - f| > \lambda\}} |f_n - f| d\mu \\ &\geq \lambda \mu\{|f_n - f| > \lambda\}. \end{aligned}$$

Dunque, per ogni $\lambda > 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste \tilde{n} tale che

$$\mu\{|f_n - f| > \lambda\} < \frac{\varepsilon}{\lambda} \quad \text{per ogni } n \geq \tilde{n}.$$

Dato che $\varepsilon > 0$ è arbitrario, questo prova la convergenza in misura. □

Osservazione 4.73. *Nel caso in cui si lavori su un insieme misurabile A di misura finita, si può dimostrare che la convergenza $f_n \rightarrow f$ quasi dappertutto su A implica la convergenza in misura di $f_n \rightarrow f$. Questa affermazione è falsa se $\mu(A) = +\infty$, ma ad esempio è sempre vera negli spazi di probabilità.*

D'altra parte, però la convergenza in misura, o addirittura in media in L^1 , non assicurano che ci sia convergenza puntuale quasi dappertutto, come mostra il seguente esempio.

Esempio 4.74 (La successione del dattilografo (vedere Statistica c.a.)). *Consideriamo la successione costruita come segue: $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$*

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathbb{1}_{[0,1]}, \\ f_2 &= \mathbb{1}_{[0,1/2]}, \quad f_3 = \mathbb{1}_{[1/2,1]}, \\ f_4 &= \mathbb{1}_{[0,1/4]}, \quad f_5 = \mathbb{1}_{[1/4,1/2]}, \quad f_6 = \mathbb{1}_{[1/2,3/4]}, \quad f_7 = \mathbb{1}_{[3/4,1]}, \dots \end{aligned}$$

È facile vedere che la successione converge in L^1 e quindi anche in misura a 0. Si può però dimostrare che essa non converge in nessun punto dell'intervallo $[0, 1]$.

5. Esercizi di riepilogo con soluzioni

(E1) Sia $a > 0$ e sia $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = ae^{-2x}.$$

Consideriamo la misura con densità f , $d\nu(x) = f(x)dx$ definita da $\nu(A) = \int_A f(x)dx$ per ogni $A \subset [0, 1]$, misurabile. Per quale valore di a tale misura è una misura di probabilità? Calcolare poi

$$\int_{[0,1]} x d\nu(x).$$

(E2) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione a termini positivi, monotona crescente e con $a_n \rightarrow 1$, per $n \rightarrow +\infty$. Studiare la convergenza puntuale, uniforme e in media su su ogni intervallo $[-M, M]$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = (x - a_n)^2.$$

(E3) Sia a_n come sopra e sia $g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, definita per ogni $n \in \mathbb{N}$ da

$$g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq x \leq a_n \\ \frac{x - a_n}{1 - a_n} & \text{se } a_n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Calcolare il limite puntuale della successione. Dire poi se la convergenza a tale limite vale anche in in media e in misura.

(E4) Studiare la convergenza puntuale e uniforme su \mathbb{R} della successione di funzioni $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = e^{-x^2/n}.$$

(E5) Definiamo per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme $A_n = [n, n + 2^{-n}] \times [0, 1]$. Quanto vale la misura

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)?$$

(E6) Consideriamo l'insieme

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2} \right\}.$$

Consideriamo le due famiglie di scatole $(S_n)_{n \geq 1}$ e $(\tilde{S}_n)_{n \geq 1}$ così definite:

$$S_n = [n, n + 1] \times \left[0, \frac{1}{n}\right] \quad \text{e} \quad \tilde{S}_n = [n, n + 1] \times \left[0, \frac{1}{n^2}\right].$$

Verificare che $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n \supset A$ e che $\bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{S}_n \supset A$.

- È vero che $\sum_{n=1}^{\infty} \text{mis}(S_n) < \infty$?
- È vero che $\sum_{n=1}^{\infty} \text{mis}(\tilde{S}_n) < \infty$?
- Possiamo affermare che l'insieme A ha misura esterna finita?

(E7) Sia $A_n = [n, n + 1] \times [-2^{-n}, 2^{-n}]$. Calcolare

$$\mu\left(\bigcup_{n=3}^{\infty} A_n\right)$$

(E8) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1/x\}$. Calcolare

$$\int_A yx^2 e^x d\mu(x, y).$$

(E9) Calcolare

$$\int_{[1,2] \times [0,1]} x e^{xy} d\mu(x, y).$$

(E10) Sia $f : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione misurabile. Che legami ci sono tra gli insiemi

$$A_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq \frac{1}{n} \right\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > 0\}$$

e le rispettive misure? Utilizzando tali considerazioni, verificare poi che se $\mu(A) > 0$, allora f ha integrale positivo su \mathbb{R}^d .

(E11) Discutere la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \sin(2n)}{(1+n)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{bn+1}{1+n^2} \quad \text{con } b \geq 0.$$

(E12) Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri con $a_n \rightarrow +\infty$. A cosa tende la successione

$$b_n = \frac{1 + a_n^2}{\sqrt{a_n + a_n^2}}?$$

(E13) Calcolare

$$\int_0^\pi \sin^2(x) \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) d\mu(x) \quad \text{e} \quad \int_0^{\pi/2} x \cos(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x) d\mu(x).$$

(E14) Consideriamo l'insieme $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}\}$. Quanto vale la misura bidimensionale $\mu_2(\mathbb{Q} \times \mathbb{R})$?

(E15) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x| \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$. Trovare per ogni $b \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([b, b+1])$.

(E16) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq e^{x^2}\}$. Calcolare

$$\int_A x d\mu(x, y)$$

(E17) Sia $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = axy$. Per quali $a \geq 0$ la misura $d\nu(x, y) = f(x, y) d\mu_2(x, y)$ è una misura di probabilità? Quanto vale in tal caso la probabilità $\nu([0, 1/2] \times [0, 1/2])$? Calcolare anche

$$\int_{[0,1]^2} \sin(\pi x) d\nu(x, y).$$

(E18) Consideriamo l'insieme $\Omega = \mathbb{R}$. Sia \mathcal{A} la σ -algebra così definita:

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R},]-\infty, 0[, [0, +\infty[\} \subset 2^{\mathbb{R}}.$$

Quale/quali delle seguenti funzioni sono misurabili?

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & f(x) &= x \\ g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & g(x) &= \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(x) \end{aligned}$$

5.1. Soluzioni

Esercizio (E1). Occorre che sia $f(x) \geq 0$ per ogni x (quindi $a \geq 0$). Inoltre deve valere $\int_0^1 f(x)dx = 1$. Quindi

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 ae^{-2x}dx = \left[-\frac{a}{2}e^{-2x}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{a}{2}(1 - e^{-2}) = 1.$$

Ciò vale se e solo se scegliamo $a = \frac{2}{1 - e^{-2}}$. Inoltre:

$$\begin{aligned} \int_0^1 xdv(x) &= \int_0^1 \frac{2}{1 - e^{-2}} xe^{-2x}dx = \frac{2}{1 - e^{-2}} \left\{ \left[-\frac{x}{2}e^{-2x}\right]_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{2} \right\} \\ &= \frac{2}{1 - e^{-2}} \left[e^{-2x} \left(-\frac{1}{4} - \frac{x}{2}\right) \right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{1 - e^{-2}} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}e^{-2}\right). \end{aligned}$$

Esercizio (E2). Calcoliamo il limite puntuale: Poiché $\lim_{n \rightarrow \infty} (x - a_n)^2 = (x - 1)^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, il limite puntuale è $f(x) = (x - 1)^2$. Vediamo se tale limite è uniforme:

$$|(x - a_n)^2 - (x - 1)^2| = |2x - 2xa_n + a_n^2 - 1| = 2|x||a_n - 1| + |a_n^2 - 1| \leq 2M|a_n - 1| + |a_n^2 - 1|.$$

Quindi, se $M > 0$ è un numero assegnato,

$$\sup_{x \in [-M, M]} |f_n(x) - f(x)| \leq 2M|a_n - 1| \rightarrow 0, \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Dunque il limite è uniforme. Studiamo infine se la convergenza è anche in media:

$$\int_{-M}^M |f_n(x) - f(x)|dx \leq \int_{-M}^M 2M|a_n - 1|dx = 4M^2|a_n - 1| \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty.$$

Quindi $f_n \rightarrow f$ in media su $[-M, M]$.

Esercizio (E3). La funzione g_n vale zero su $[0, a_n]$ e coincide con la funzione lineare individuata dalle condizioni $g_n(a_n) = 0$ e $g_n(1) = 1$ (geometricamente il suo grafico coincide con il segmento che unisce i punti $(a_n, 0)$ e $(1, 1)$). Ora, se $0 \leq x < 1$, poiché $a_n \rightarrow 1$, sarà $g_n(x) = 0$ per tutti gli n sufficientemente grandi. Quindi $g_n(x) \rightarrow 0$. Se invece $x = 1$, risulta $g_n(1) = 1$ per ogni n . Pertanto, il limite puntuale è la funzione $g(x) = \mathbb{1}_{\{1\}}(x)$. Vediamo se il limite è uniforme: poiché $g_n(x) \neq g(x)$ solo su $[a_n, 1[$, avremo

$$\sup_{x \in [0, 1]} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{x \in [a_n, 1[} |g_n(x) - g(x)| = \sup_{a_n \leq x < 1} \frac{x - a_n}{1 - a_n} = 1.$$

Poiché $\sup_{[0, 1]} |g_n - g|$ non tende a zero, la convergenza non è uniforme.

Verifichiamo ora la convergenza in media al limite 0. Possiamo sostituire per comodità la funzione limite g con la funzione identicamente zero 0, che coincide con essa quasi ovunque.

$$\begin{aligned} \int_{[0, 1]} |g_n - g|dx &= \int_{[a_n, 1]} \left| \frac{x - a_n}{1 - a_n} \right| = \frac{1}{1 - a_n} \left[\frac{x^2}{2} - a_n x \right]_{x=a_n}^{x=1} = \frac{1}{1 - a_n} \frac{(a_n - 1)^2}{2} \\ &= \frac{1 - a_n}{2} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

per $n \rightarrow +\infty$. Quindi c'è convergenza in media al limite g . Analizziamo infine la convergenza in misura. Sia $\lambda > 0$.

$$\{x \in [0, 1] : |g_n(x) - g(x)| > \lambda\} \subseteq \{x \in [0, 1] : g_n(x) \neq g(x)\} = [a_n, 1[.$$

Poiché $\mu([a_n, 1]) = 1 - a_n \rightarrow 0$, c'è anche convergenza in misura a g .

Esercizio (E4). per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale $x^2/n \rightarrow 0$. Dunque $f_n(x) \rightarrow 1$, puntualmente. Esaminiamo la convergenza uniforme alla funzione limite. Osserviamo che per ogni n , se calcoliamo la funzione f_n ad esempio nel punto $x = n^2$, otteniamo $f_n(n^2) = e^{-1}$. Dunque

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \geq |f_n(n^2) - 1| = e^{-1} - 1,$$

che non tende a zero. Dunque la convergenza non è uniforme.

Esercizio (E5). Gli insiemi A_n sono disgiunti, perché $n + 2^{-n} \leq n + \frac{1}{2} < n + 1$ per ogni n . Inoltre vale $\mu(A_n) = 2^{-n}$. Pertanto

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1.$$

Esercizio (E6). Sia $x \in [1, +\infty[$. Allora ci sarà un $n \in \mathbb{N}$ per cui $x \in [n, n + 1[$. In particolare sarà $\frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{n^2}$. Allora se un punto $(x, y) \in A$ soddisfa $x \in [n, n + 1[$, varrà

$$0 \leq y \leq \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Quindi $(x, y) \in \tilde{S}_n$. Inoltre, poiché $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta $\tilde{S}_n \subseteq S_n$. Quindi abbiamo riconosciuto che $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \tilde{S}_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Inoltre:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \text{mis}(S_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty \quad \text{e} \\ \sum_{n \geq 1} \text{mis}(\tilde{S}_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty. \end{aligned}$$

Alla luce di quanto verificato, possiamo affermare che $\mu^*(A)$ è finita.

Esercizio (E7). Vale $\mu(A_n) = 2 \cdot 2^{-n} = 2^{-n+1} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Quindi, poiché gli A_n sono a coppie disgiunti, sarà

$$\sum_{n \geq 3} \mu(A_n) = \sum_{n \geq 3} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

Esercizio (E8). Usiamo il Teorema di riduzione di Tonelli (principio di Cavalieri):

$$\int_A yx^2 e^x d\mu(x, y) = \int_1^2 dx \int_0^{1/x} yx^2 e^x dy = \int_1^2 dx \left[\frac{y^2}{2} x^2 e^x \right]_{y=0}^{y=1/x} = \int_1^2 dx \frac{e^x}{2} = \frac{e^2 - e}{2}.$$

Esercizio (E10). Risulta $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Notiamo che $A_n \subset A_{n+1}$. Quindi si applica la proposizione sui limiti di misure di unioni numerabili monotone:

$$\mu(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n).$$

Se sappiamo che $\mu(A) > 0$, allora certamente esiste \tilde{n} tale che $\mu(A_{\tilde{n}}) > \frac{\mu(A)}{2} > 0$. Quindi

$$\int_{\mathbb{R}^d} f d\mu \geq \int_{A_{\tilde{n}}} f d\mu \geq \frac{\mu(A_{\tilde{n}})}{\tilde{n}} > 0.$$

Esercizio (E11). Vale

$$0 \leq \frac{1 + \sin(2n)}{(1+n)^{3/2}} \leq \frac{2}{n^{3/2}} \quad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Quindi la serie converge.

La seconda serie converge se $b = 0$. Infatti in tal caso $\frac{bn+1}{1+n^2} = \frac{1}{1+n^2}$ che si comporta come $\frac{1}{n^2}$ per $n \rightarrow +\infty$. Se invece $b > 0$, allora il termine generale si comporta come $\frac{1}{n}$. Quindi la serie è divergente.

Esercizio (E12). Risulta intanto $a_n > 0$ per n sufficientemente grande. Poi

$$b_n = \frac{1 + a_n^2}{\sqrt{a_n + a_n^2}} = \frac{a_n^2(a_n^{-2} + 1)}{a_n \sqrt{1 + a_n^{-1}}} \rightarrow +\infty,$$

per $n \rightarrow +\infty$, perché $(a_n^{-2} + 1) \rightarrow 1$ e $\sqrt{1 + a_n^{-1}} \rightarrow 1$, mentre $a_n \rightarrow +\infty$.

Esercizio (E13). Poiché la funzione integranda $\sin^2(x)\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ quasi ovunque, vale

$$\int \sin^2(x)\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)dx = \int 0 = 0.$$

Il secondo integrale si calcola osservando che $\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = 1$ quasi ovunque. Quindi risulta $x \sin(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x) = x \sin(x)$ quasi ovunque. Dunque

$$\int_0^\pi x \sin(x)\mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}(x)dx = \int_0^\pi x \sin(x)dx = [-x \cos x + \sin x]_0^\pi = \dots,$$

che si calcola in modo standard integrando per parti.

Esercizio (E14). Usiamo ad esempio il Teorema di Tonelli: se $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$, allora per ogni y fissato, la "fetta" A_y ha la forma $A_y = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\} = \mathbb{Q}$, che ha misura nulla. Quindi

$$\int_{\mathbb{Q} \times \mathbb{R}} d\mu_2(x, y) = \int_{\mathbb{R}} d\mu_1(y)\mu_1(\mathbb{Q}) = 0.$$

Esercizio (E15). Vale

$$f^{-1}([b, b+1]) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } b < -1 \\]-\infty, -1[\cup]-(b+1), b+1[\cup]1, +\infty[& \text{se } -1 \leq b \leq 0 \\ [-1, -b] \cup [b, 1] & \text{se } 0 < b \leq 1 \\ \emptyset & \text{se } b > 1. \end{cases}$$

Esercizio (E16). Vale

$$\int_A x d\mu(x, y) = \int_0^1 dx \int_0^1 x dy = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2} \right]_0^1$$

Esercizio (E17). Poiché x e y sono positivi, deve essere innanzitutto $a \geq 0$. Scriviamo la condizione di normalizzazione.

$$\int_{[0,1]^2} axy d\mu(x, y) = \int_0^1 dx \int_0^1 axy dy = \int_0^1 dx \left[ax \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = \int_0^1 \frac{ax}{2} dx = \frac{a}{4}.$$

Scegliamo dunque $a = 4$. Ora

$$\int \sin(\pi x) d\nu(x, y) = \int_{[0,1]^2} \sin(\pi x) 4xy d\mu(x, y) = \int_0^1 dx \int_0^1 4x \sin(\pi x) y dy = \int_0^1 2x \sin(\pi x) dx = \dots$$

Esercizio (E18). La funzione $f(x) = x$ non è misurabile. Infatti vale $f^{-1}([1, +\infty]) = [1, +\infty] \notin \mathcal{A}$. La funzione g è invece misurabile, perché, comunque sia $b \in \mathbb{R}$, l'insieme $f^{-1}([b, +\infty])$ è sempre uno dei seguenti tre insiemi: $\emptyset,]-\infty, 0[, \mathbb{R}$, che sono tutti nella famiglia \mathcal{A} .

6. Esercizi tratti da prove scritte recenti

(1) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -x & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Calcolare per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x) d\mu(x).$$

(2) Calcolare l'integrale

$$\int_A x e^{x+y} d\mu(x, y)$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 0 \text{ e } 0 \leq y \leq |x|\} \subset \mathbb{R}^2$.

(3) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \mathbb{1}_{]-\infty, 0[}(x) + x \mathbb{1}_{[0, 1]}(x).$$

Descrivere l'insieme $f^{-1}(]b, +\infty[)$ per ogni $b \in \mathbb{R}$. La funzione f è misurabile? Perché? La funzione f è una funzione semplice? Perché?

(4) Sia $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = x^{1/n}.$$

Studiare la convergenza puntuale, uniforme, in media e in misura della successione (f_n) .

(5) Si consideri una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di numeri reali che tende a $+\infty$. Studiare convergenza puntuale, uniforme, in L^1 e in misura della successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ così definita

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x \mathbb{1}_{[a_n, 1+a_n]}(x)$$

(6) Calcolare la misura degli insiemi

$$A = \{(x, y) : -1 \leq y \leq 1 \text{ e } y^2 - 1 \leq x \leq 0\}$$

$$B = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \quad C = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$$

(7) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + e^{-n}}{n + p n^2}$$

al variare di $p \geq 0$.

(8) Sia

$$S_n =]n, n+1[\times \left[-\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n} \right]$$

Calcolare la misura di $\bigcup_{n=3}^{\infty} S_n$

(9) Sia (a_n) una successione convergente a $\lambda \in \mathbb{R}$. E' di Cauchy la successione $(b_n)_n$ definita da

$$b_n = n + a_n?$$

E' di Cauchy la successione $(c_n)_n$ definita da

$$c_n = \frac{1}{n} + a_n?$$

(10) Sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = x^2 \mathbb{1}_{[n, n+n^{-2}]}(x).$$

Studiare la convergenza puntuale, uniforme, in media e in misura della successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(11) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq x\}$. Calcolare

$$\int_A e^{2y} d\mu_2(x, y).$$

(12) Si consideri la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita da

$$a_n := \int_1^n \frac{1}{x^2} dx.$$

Calcolare il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.

Considerare poi la successione $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita da

$$b_n = \int_1^n \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

È convergente la successione (b_n) ? Motivare la risposta.

(13) Si consideri la famiglia di insiemi

$$A_n = [2n - \lambda^n, 2n + \lambda^n] \subset \mathbb{R}^1,$$

con $n \in \mathbb{N}$. Dire, al variare del parametro $\lambda \in]0, 1[$, quanto valgono

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \quad \text{e} \quad \mu\left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

Rispondere poi alla stessa domanda nei casi $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

(14) Calcolare la misura di

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad |x| \leq y \leq |x|^{1/2}\}.$$

(15) Sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = e^{-nx^2}.$$

Studiare la convergenza puntuale e la convergenza in misura della successione f_n su \mathbb{R} .

La convergenza è uniforme su $[0, +\infty[$? Su $[1, +\infty[$?

(16) Dire se sono convergenti le serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n + e^{-n}} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}.$$

(17) Sia (a_n) una successione di numeri reali. Supponiamo che tale successione soddisfi

$$n^2 \leq a_n \leq n^2 + 1 \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Provare che la successione è monotona e calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{n}}.$$

(18) Sia $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ e sia $f : X \rightarrow [0, +\infty[$

$$f(x, y) = k(x + y).$$

Si dica per quale valore di $k > 0$ la misura definita da

$$\nu(A) = \int_A f(x, y) d\mu(x, y)$$

è una misura di probabilità sugli insiemi Lebesgue misurabili $A \subset X$.

(19) Sia $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-n)^2/2}.$$

Individuare il limite puntuale f della successione (f_n) . Si può dire che la convergenza è uniforme su $]-\infty, +\infty[$? Si può dire che la convergenza è uniforme su $]-\infty, 0]$? C'è convergenza in media L^1 su \mathbb{R} ?

(20) Dire se sono convergenti (e perché) le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \log n}{n^3 + 1} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{2^n}$$

(21) Dato $n \in \mathbb{N}$, tracciare un grafico della funzione $f_n : [n, n + 1[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{x - n}{2^n}.$$

Definito poi

$$A_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : n \leq x < n + 1 \quad 0 \leq y \leq f_n(x) \right\},$$

calcolare

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right).$$

(22) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Individuare $f^{-1}(]b, +\infty[)$ per ogni $b \in \mathbb{R}$.

È vero che $f(f^{-1}(]b, +\infty[)) =]b, +\infty[$ per ogni b reale? Perché?

(23) Si consideri il triangolo nel piano

$$X = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq x\}.$$

Stabilire per quale $\lambda > 0$ la misura $d\nu(x, y) = \lambda xy d\mu(x, y)$ è una misura di probabilità sugli insiemi Lebesgue misurabili in X . (Al solito, $\mu =$ indica la misura di Lebesgue.)

Calcolare poi

$$\int_X (x + 1) d\nu(x).$$

(24) Si consideri la successione di funzioni $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx}.$$

Studiare la convergenza puntuale, uniforme, in media L^1 e in misura di (f_n) .

(25) Dati gli insiemi

$$A = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y > x^2\} \quad \text{e} \\ B = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] : y < x\}$$

calcolare

$$\int_{A \cap B} y d\mu_2(x, y) \quad \text{e} \quad \int_{A \setminus B} y d\mu_2(x, y)$$

(26) Si consideri la funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = c(1 - x).$$

Dire per quale valore di c la misura $d\nu(x) = f(x)dx$ è una misura di probabilità. Calcolare poi il valore medio

$$\int_{[0,1]} x d\nu(x).$$

(27) Stabilire la convergenza o meno delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n/2}}{\sqrt{n} + e^n} \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \lambda^2\right)^n \quad \text{al variare di } \lambda \in \mathbb{R}$$

(28) Si consideri la famiglia numerabile di sottoinsiemi del piano

$$A_n = B((n, 0), n),$$

con $n \in \mathbb{N}$. (Al solito, $B((\xi, \eta), r)$ indica la palla di raggio r e centro $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$.)

- Verificare che nessuno degli A_n interseca il semipiano $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$.
- Verificare che $A_n \subset A_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- Individuare l'insieme $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e, indicato con Q il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, calcolare

$$\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap Q)\right),$$

(29) Studiare la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \log n}{\sqrt{1 + n^\alpha}} \quad \text{con } \alpha > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (1 + e^n)(e^{-n} + e^{-n^2}).$$

(30) Si consideri la funzione $f : [0, +\infty[\times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) = k e^{-(x_1 + 2x_2)}.$$

Stabilire per quale valore di $k > 0$ la misura $d\lambda(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)d\mu_2(x_1, x_2)$ è una misura di probabilità sugli insiemi misurabili secondo Lebesgue in $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$. Calcolare poi l'integrale

$$\int_{[0, +\infty[\times [0, +\infty[} x_1 x_2 d\lambda(x_1, x_2).$$

(31) Sia $\{q_k = (x_k, y_k) : k \in \mathbb{N}\}$ una famiglia di punti distinti ($q_j \neq q_k$ per ogni $j \neq k$) a coordinate intere $(x_k, y_k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Calcolare la misura degli insiemi

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} B(q_k, (1/2)^k) \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^2 \setminus A.$$

(32) Si consideri per ogni $n \in \mathbb{N}$ la funzione $f_n :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_n(x) = \frac{1}{x^2} \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right]}(x)$$

Studiare la convergenza puntuale, uniforme, in misura e in media L^1 sull'intervallo $]0, 1]$ della successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

È corretta l'uguaglianza

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{]0,1]} f_n(x) d\mu(x) = \int_{]0,1]} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) d\mu(x)?$$

Se sí, spiegare perché. Se no, dire perché non si possono applicare i teoremi di convergenza monotona (B. Levi) e dominata (Lebesgue).

(33) Sia $f : [-1, 1] \rightarrow [0, 1]$ una funzione continua. Sia $n \in \mathbb{N}$. È misurabile l'insieme

$$A_n := \left\{ (x, y) \in [-1, 1] \times [0, 1] : y > \frac{f(x)}{n} \right\}?$$

Perché? Si identifichi l'insieme $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e se ne calcoli la misura.

(34) Dire se le serie seguenti sono convergenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2} + n}.$$

(35) Dire quanto vale la misura dell'insieme

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}]n, n+1[\times \left[0, \frac{1}{n(n+1)}\right].$$

(36) Si consideri la funzione: $f : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = ky|\sin x|.$$

Dire per quali valori di k la misura $d\lambda(x, y) = f(x, y)d\mu_2(x, y)$ è una misura di probabilità sui sottoinsiemi Lebesgue misurabili di $[0, 2\pi] \times [0, 1]$. Calcolare poi per tale valore di k l'integrale

$$\int_{[0, 2\pi] \times [0, 1]} xy d\lambda(x, y).$$

(37) Analizzare la convergenza puntuale su $[0, +\infty[$ della successione di funzioni (f_n) definita da

$$f_n(x) = \frac{nx}{x+n}.$$

La convergenza è uniforme su $[0, +\infty[$? È uniforme su intervalli limitati del tipo $[0, M]$ con $M > 0$?

(38) Sia $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y|^{1/2} \leq x \leq 1\}$. Calcolare

$$\int_A (x+y) d\mu_2(x, y).$$