Appunti di Analisi matematica

Laurea magistrale LMSSFA Rimini

17 ottobre 2018

Indice

Riferimenti bibliografici

[L] J. Lebl, Basic Analysis: Introduction to Real Analysis. Reperibile liberamentein rete.

[SB] C. P. Simon, L. E. Blume, Matematica 2, per l'Economia e la Scienze sociali, Università Bocconi Editore. Reperibile in biblioteca.

[R] W.. Rudin, Real and complex analysis. Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York, 1987.

[BPS] Bramanti, Pagani Salsa, Matematica, Calcolo infinitesimale e algebra lineare, Zanichhellli 2004.

Il libro [L] contiene materiale ed esercizi su successioni e serie. Il testo [SB] contiene nella parte iniziale una discussione su insiemi aperti, chiusi e funzioni continue in più variabili. Il libro [R] tratta la teoria della misura. Il libro [BPS] tratta le equzioni differenziali ordinarie e l'analisi matematica in piú variabili.

1. Numeri reali

Richiamiamo le notazioni per i numeri naturali

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\},$$

per i numeri *interi*

$$\mathbb{Z} := \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$$

e per i numeri *razionali*

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z} \right\}$$

Ogni numero $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ si può scrivere come allineamento decimale "numero con la virgola" limitato o illimitato periodico. Esempi di numeri razionali sono

$$-\frac{3}{4} = -0.75 \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{3} = 0.\overline{3} \quad \text{oppure} \quad \frac{103}{33} = 3.\overline{12}.$$

Ci sono però numeri che non sono razionali. Essi sono allineamenti decimali illimitati non periodici. Ad esempio, si può dimostrare che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, $\pi = 3.14\ldots \notin \mathbb{Q}$.

L'insieme costituito dai numeri decimali di qualsiasi tipo (limitati o illimitati) è l'insieme dei numeri reali

$$\mathbb{R} = \{a_0, a_1 a_2 a_3 \cdots : a_0 \in \mathbb{Z} \quad \text{e } a_k \in \{0, 1, \dots, 9\} \text{ se } k \geq 1\}.$$

Abbiamo l'inclusione (stretta) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. [1]

Nell'insieme dei numeri reali, consideriamo la relazione di disuguaglianza $\leq$, con le consuete proprietà. In particolare, ricordiamo che tra due qualsiasi numeri reali x e y vale *esattamente una* delle seguenti tre proprietà:

$$x < y, \quad x = y \quad \text{o} \quad x > y.$$

Una conseguenza di tale fatto è la seguente proposizione

Proposizione 1.1. *Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Se vale $a \leq b + \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$, allora è $a \leq b$.*

Dimostrazione. Assumiamo per assurdo $a > b$. Nell'ipotesi $a \leq b + \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ scegliamo $\varepsilon = (a - b)/2$. Questo produce

$$a \leq b + \frac{a - b}{2},$$

che implica $a \leq b$. Quindi abbiamo una contraddizione. □

1.1. Massimo, minimo estremo superiore e inferiore

Definizione 1.2 (massimo e minimo). *Sia $A \subset \mathbb{R}$ è un insieme di numeri reali. Un numero $b \in \mathbb{R}$ si dice* massimo *di A se*

- $b \in A$
- $b \geq a$ *per ogni* $a \in A$.

In tal caso si scrive $b = \max A$.

Un numero $b \in \mathbb{R}$ si dice minimo *di A se*

- $b \in A$
- $b \leq a$ *per ogni* $a \in A$.

In tal caso si scrive $b = \min A$.

[1] Uno studio dettagliato del sistema dei numeri reali è fuori dallo scopo di questo corso. Ad esempio: qual è il significato concreto di un allineamente decimale $a_0, a_1 a_2 \ldots$? Se $x = a_0.a_1 a_2 \ldots$ e $y = b_0.b_1 b_2 \ldots$, che cos'è xy?

Osserviamo subito che, se esistono, $\max A$ e $\min A$ sono unici.

Esempio 1.3. *$A = [0,1[$ ha minimo 0, ma non esiste $\max A$. L'insieme $B =]-\infty, 2]$ non ha minimo.*

Definizione 1.4 (maggioranti e minoranti di un insieme di numeri reali)**.** *Un numero $b \in \mathbb{R}$ si dice* maggiorante *di $A \subset \mathbb{R}$ se risulta*

$$b \geq a \quad \textit{per ogni } a \in A.$$

Un numero $b \in \mathbb{R}$ si dice minorante *di $A \subset \mathbb{R}$ se risulta*

$$b \leq a \quad \textit{per ogni } a \in A.$$

Ad esempio, 3 è un maggiorante di $[0,1[$. Entrambi i numeri -2 e 0 sono minoranti dello stesso insieme $[0,1[$. Infine, $[0,+\infty[$ non ha maggioranti.

Definizione 1.5 (insieme superiormente/inferiormente limitato)**.** *Un insieme $A \subset \mathbb{R}$ si dice* superiormente limitato *se ammette maggioranti. Si dice* infermente limitato *se ammette minoranti. Infine diciamo che $A \subset \mathbb{R}$ è* limitato *se è sia superiormente che inferiormente limitato.*

Ad esempio, $\mathbb{N}$ è inferiormente ma non superiormente limitato.

Definizione 1.6 (estremo superiore/inferiore)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato. L'*estremo superiore *di A è il più piccolo di tutti i maggioranti di A. Esso si indica con il simbolo $\sup A$:*

$$\sup A := \min\{\textit{maggioranti di } A\}.$$

*Se A è inferiormente imitato, allora l'*estremo inferiore *di A è il più grande di tutti i minoranti di A. Esso si indica con il simbolo $\inf A$:*

$$\inf A := \max\{\textit{minoranti di } A\}.$$

Se $A \subset \mathbb{R}$ non è superiormente limitato, allora si scrive/dice che $\sup A = +\infty$. Se infine $A \subset \mathbb{R}$ non è inferiormente limitato, allora si scrive/dice che risp. $\inf A = -\infty$.

In altre parole, un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ è estremo superiore di A se valgono:

- λ è un maggiorante di A.
- $\lambda \leq \mu$ per ogni μ maggiorante di A.

Osservazione 1.7. *Osserviamo che:*

- *un insieme A può non avere estremo superiore/inferiore (ad esempio $A = [0,+\infty[$ non ha estremo superiore perché non ha maggioranti). In tal caso si dice che $\sup A = +\infty$.*
- *Se l'estremo superiore $\sup A$ esiste, allora esso è unico. Lo stesso vale per $\inf A$*
- *Se $b = \max A$, allora $b = \sup A$. Il vicecersa non è vero. Analizzare ad esempio l'insieme $A = [0,1[$.*

Esempio 1.8. *Se $A = \{1/n : m \in \mathbb{N}\}$, allora $\max A = \sup A = 1$, mentre $\inf A = 0$. L'insieme A non ha minimo.*

Proposizione 1.9 (Proprietà di approssimazione)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}$, con $\sup A \in \mathbb{R}$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $a_\varepsilon \in A$ tale che $a_\varepsilon > \sup A - \varepsilon$. Se invece A non è superiormente limitato ($\sup A = +\infty$), allora per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ esiste $a_\lambda \in A$ tale che $a_\lambda > \lambda$.*

Scambiando inf e sup, si trova l'affermazione equivalente: se $\inf A \in \mathbb{R}$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $a_\varepsilon < \inf A + \varepsilon$. Infine, se $\inf A = -\infty$, possiamo trovare per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ un numero $a_\lambda \in A$ con $a_\lambda < \lambda$.

Proprietà di completezza di $\mathbb{R}$. Ogni insieme $A \subset \mathbb{R}$ superiormente limitato ammette estremo superiore. [2]

[2] Si può dimostrare che la proprietà di completezza è falsa in $\mathbb{Q}$. Ad esempio, l'insieme $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ non ammette estremo superiore $\lambda \in \mathbb{Q}$, pur essendo superiormente limitato.

Osservazione 1.10. *Sato $A \subset \mathbb{R}$, superiormente limitato. Poniamo $-A = \{-a : a \in A\}$. È facile verificare che* $\sup(-A) = -\inf A$ *(farlo come esercizio). Usando questo fatto, si trova l'affermazione equivalente:* ogni insieme inferiormente limitato è dotato di estremo inferiore.

2. Successioni e serie di numeri reali

2.1. Succesioni numeriche

Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia di numeri $a_n \in \mathbb{R}$ indicizzata da un parametro $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 2.1 (successione convergente). *Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. La successione si dice convergente se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ con la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che*

$$|a_n - \lambda| < \varepsilon \quad \textit{per ogni } n > n_\varepsilon.$$

In tal caso si scrive $\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda$.

Definizione 2.2 (successione divergente). *Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice divergente a $+\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $\varepsilon_M > 0$ tale che*

$$a_n > M \quad \textit{per ogni } n > n_M.$$

In tal caso si scrive $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Con ovvie modifiche si definisce una successione divergente a $-\infty$. Può infine aavvenire che una successione non sia né convergente, né divergente.

Esempio 2.3. *Discussione degli eventuali limiti delle successioni di termini a_n definiti sotto:*

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_n = (-1)^n, \quad a_n = n^2.$$

Osservazione 2.4 (Calcolo dei limiti tramite passaggio al continuo). *Sia (a_n) una successione e sia $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfa $f(n) = a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora, se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lambda$, risulta anche $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda$.*

I seguenti fatti sull'algebra dei limiti sono del tutto analoghi a quelli studiati nei corsi elementari:

Proposizione 2.5. *Se $a_n \to \lambda$ e $b_n \to \mu$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, allora:*

- $a_n + b_n \to \lambda + \mu$;
- $a_n b_n \to \lambda\mu$;
- $a_n / b_n \to \lambda/\mu$, *purché* $\mu \neq 0$. [3]

Nel caso in cui λ o μ assumano valori $\pm\infty$, si usano le consuete regole sull'algebra dei limiti. Infine, le forme $\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ e 1^∞ sono forme indeterminate.

Proposizione 2.6 (unicità del limite). *Se $a_n \to L \in \mathbb{R}$ e $a_n \to M \in \mathbb{R}$, allora $L = M$.*

Dimostrazione. Assumiamo per assurdo che $a_n \to L$ e $a_n \to M$, supponendo che $L < M$. Applicando la definizione di limite con $\varepsilon = |M - L|/4$, troviamo che esiste $n' \in \mathbb{N}$ tale che

$$L - \frac{M-L}{4} < a_n \overset{(*)}{<} L + \frac{M-L}{4} \quad \forall n \geq n'.$$

[3] Osserviamo che se $b_n \to \mu \neq 0$, allora $b_n \neq 0$ per n sufficientemente grande. Quindi a_n/b_n è ben definita, almeno per n grande.

Inoltre esiste n'' tale che

$$M - \frac{M-L}{4} \overset{(**)}{<} a_n < M + \frac{M-L}{4} \quad \forall n \geq n''.$$

Unendo le disuguaglianze $(*)$ e $(**)$ troviamo che per ogni n più grande di entrambi n' e n'' vale

$$M - \frac{M-L}{4} < a_n < L + \frac{M-L}{4}. \quad \Rightarrow \quad M - L \leq \frac{M-L}{2}.$$

Ciò è in contraddizione con il fatto che stiamo assumendo $M - L > 0$. □

Teorema 2.7 (Teorema del confronto (o dei due carabinieri))**.** *Siano (a_n), (b_n) e (x_n) successioni in $\mathbb{R}$. Se $a_n \leq x_n \leq b_n$ per ogni n e se a_n e b_n hanno lo stesso limite L, allora anche $x_n \to L$.*

Dimostrazione. Usiamo la definizione di limite: poiché $a_n \to L$, abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ per ogni $n > n_\varepsilon$. Inoltre esiste $\widetilde{n}_\varepsilon$ tale che $L - \varepsilon < b_n < L + \varepsilon$ per ogni $n > \widetilde{n}_\varepsilon$. Quindi, se $n \geq \max\{n_\varepsilon, \widetilde{n}_\varepsilon\}$, risulta

$$L - \varepsilon < a_n \leq x_n \leq b_n < L + \varepsilon.$$

Ciò dimostra che $x_n \to L$, come richiesto. □

Usando il Teorema appena provato e la proprietà di approssimazione, si può provare che esistono successioni approssimanti per l'estremo superiore e inferiore.

Corollario 2.8. *Se $A \subset \mathbb{R}$. Allora esiste (x_n) successione in A tale che $x_n \to \sup A$ e esiste (y_n) successione in A tale che $y_n \to \inf A$.*

Dimostrazione. Proviamo l'esistenza di (x_n) nel caso $\sup A < \infty$. Se $\sup A = \max A$, allora basta scegliere $x_n = \max A$, la successione costante. Se l'insieme non ha massimo, usiamo la proprietà di approssimazione scegliendo $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Quindi, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in A$ che soddisfa $x_n > \sup A - \frac{1}{n}$. La successione cosí costuita soddisfa

$$\sup A - \frac{1}{n} \leq x_n \leq \sup A.$$

Quindi per il Teorema del confronto, $x_n \to \sup A$. □

Definizione 2.9 (successione monotona)**.** *Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice monotona crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si dice monotona decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Esercizio 2.10. *Verificare che $a_n = \frac{n+1}{n}$ è monotona decrescente usando la definizione.*

Per sapere se una successione ha limite, si usa a volte in seguente teorema, che è una conseguenza della proprietà di completezza di $\mathbb{R}$.

Teorema 2.11 (limiti di successioni monotone)**.** *Se una successione è monotona, allora essa ammette limite $\lim a_n$.*

Dimostrazione. Studiamo il caso in cui (a_n) è monotona crescente. Indichiamo con $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ l'insieme dei valori assunti dai termini della successione. Dividiamo la prova in due casi.

Caso A. La successione è limitata superiormente. In tal caso l'insieme A ammette estremo superiore. Proviamo che $\lim_{n\to\infty} a_n$ esiste e che precisamente vale

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A.$$

Usiamo la proprietà di approssimazione. Pereso $\varepsilon > 0$, esiste $a \in A$ tale che $a > \sup A - \varepsilon$. Tale a è un elemento di A e quidi ha la forma $a = a_{n_\varepsilon}$ per un opportuno $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$. Quindi vale $a_{n_\varepsilon} > \sup A - \varepsilon$. Quindi, poiché a_n è monotona crescente, risulta

$$a_n > \sup A - \varepsilon \quad \forall n > n_\varepsilon.$$

D'altra parte è sempre $a_n \leq \sup A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi la prova è conclusa.

Caso B. La successione non è limitata superiormente. In questo caso si prova che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

La prova è lasciata al lettore. $\square$

Esempio 2.12. *NOn è vero che una successione che ha limite è monotona. La successiona* $\dfrac{(-1)^n}{n}$ *tende a* 0 *ma non è monotona.*

2.2. Sottosuccessioni e Teorema di Bolzano–Weierstrass.

Definizione 2.13. *Una successione* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si dice limitata se esiste un numero* $M \geq 0$ *tale che*

$$-M \leq a_n \leq M \quad \textit{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 2.14. *Verificare che la successione* $a_n = \dfrac{n + (-1)^n n}{n}$ *è limitata.*

È utile considerare le *sottosuccessioni* di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Per costruire una sottosouccessione, scegliamo una famiglia monotona crescente strettamente di indici

$$1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \cdots$$

e consideriamo la nuova successione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Esempio 2.15. *Se* $a_n = (-1)^n$*, allora* $a_{2n} = 1$ *e* $a_{2n-1} = -1$.

Teorema 2.16 (Teorema di Bolzano–Weierstrass)**.** *Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è una successione limitata in* $\mathbb{R}$*. Allora esiste* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ed esiste una sottosuccessione* (a_{k_n}) *convergente a* λ.

Osserviamo che l'ipotesi di limitatezze è indispensabile. Ad esempio, la successione $a_n = n^2$ tende a $+\infty$ e ogni sua sottosuccessione tende a $+\infty$. Quindi essa non ammette sottosuccessioni convegenti.

Il Teorema di Bolzano–Weiestrass è una conseguenza immediata del seguente fatto.

Teorema 2.17. *Ogni successione* (a_n) *di mumeri reali ammette una sottosuccessione monotona.*

Dimostrazione. Sia (a_n) una successione. Introduciamo la seguente terminologia. Un numero $k \in \mathbb{N}$ si dice *picco* di (a_n) se $a_k > a_j$ per ogni $j > k$. Chiamiamo $P \subset \mathbb{N}$ l'insieme dei picchi.

Caso 1. L'insieme P ha infiniti elementi. Allora, se elenchiamo in ordine crescente i picchi, $k_1 < k_2 < \cdots$, la sucessione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente strettamente.

Caso 2. L'insieme P è vuoto o ha un numero finito di elementi. In tal caso, scegliamo un numero $k_1 \in \mathbb{N}$ che sia piú grande strettamente di tutti i picchi. Poicé k_1 non è un picco, esisterà $k_2 > k_1$ tale che $a_{k_1} \leq a_{k_2}$. Ma nemmeno k_2 è un picco. Quindi esiste $k_3 > k_2$ tale che $a_{k_2} \leq a_{k_3}$. Proseguendo in questo modo si costruisce una successione monotona crescente $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$.

La dimostrazione è conclusa $\square$

Dimostrazione del Teorema di Bolzano–Weierstrass. Sia (a_n) limitata. Per il teorema appena provato, esiste $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sottosuccessione monotona. Tale successione è convergente in quanto monotona. Inoltre il suo limite è un numero reale (perche' (a_{k_n}) è limitata). $\square$

2.3. Esercizi per casa

1. Verificare che se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lambda \in \mathbb{R}$, allora ogni sottosuccessione a_{k_n} converge a λ.
2. Verificare che se una successione (a_n) è convergente a $a_n \to \lambda \in \mathbb{R}$, allora (a_n) è limitata.
3. Verificare usando la definizione che la successione $\left(\frac{n+1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotona decrescente.
4. Se $a_n > 0$ e $b_n > 0$ per ogni n e se (a_n) è crescente e (b_n) è decrescente, prevare che $\dfrac{a_n}{b_n}$ è crescente.
5. Siano (a_n) e (b_n) due successioni. Supponiamo che $a_n \to \lambda \in \mathbb{R}$ e che (b_n) sia limitata. Provere che $(a_n b_n)$ è limitata.
6. Letta la dimostrazione del Teorema 2.17, dire quali sono i picchi della successione $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$. Quali sono i picchi della successione $a_n = (-1)^n$? Quali quelli ella successione definita come segue:
$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } 1 \leq n \leq 3 \\ 2 & \text{se } 4 \leq n \leq 6 \\ 0 & \text{se } n \geq 7. \end{cases}$$
7. Sia (a_n) una successione. Verificare che se $a_n \to +\infty$ e $|a_n| \geq 2n$, allora $a_n - n \to +\infty$. Sia (b_n) una successione che soddisfa $|b_n| \leq n$ per ogni n. Dimostrare che $\lim_n b_n - 2n = -\infty$.
8. Sia (a_n) una successione limitata e sia (b_n) una successione che tenze a 0. Provare che $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = 0$.
9. Calcolare, eventualmente passando a variabile continua, i limiti seguenti:
$$\lim_{n\to\infty} b^n \quad \text{per ogni valore di } b > 0$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-n^2}{n^3+1} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+n)}{n}$$
$$\lim_{n\to+\infty} n\sin(1/n) \quad (\text{suggerimento: porre } \frac{1}{n} = x)$$
$$\lim \frac{e^n - e^{n^2}}{1+e^{2n}} \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2(e^{1/n}-1)$$

Osserviamo, usando l'esercizio 1. proposto sopra, che una successione che amette due sottosuccessioni convergenti a limiti differenti non ha limite. Ad esempio, la successione $((-1)^n)$ ha le due sottosuccessioni costanti $(-1)^{2n} = 1$ e $(-1)^{2n-1} = -1$. Quindi non ha limite.

2.4. Serie numeriche

Definizione 2.18 (serie numerica)**.** *Prendiamo una successione (a_n) in $\mathbb{R}$ e consideriamo la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definita per ogni n come segue:*
$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$$
La coppia di successioni $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$ si chiama serie numerica *di termine generale a_n. e viene spesso indicata con il simbolo*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Definizione 2.19 (serie convergente/divergente/oscillante)**.** *La serie di termine generale a_n si dice convergente se esiste finito il limite*
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Si dice divergente a + infinito *se il limite è* $+\infty$ *e divergente a* $-\infty$ *se* $s_n \to -\infty$. *Se infine il limite* $\lim s_n$ *non esiste, la serie si dice oscillante o irregolare.*

Notazione. *Se il limite* $\lim_{n\to\infty} s_n$ *esiste (finito o* $\pm\infty$*), allora tale limite si chiama* somma della serie *e si indica con*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Esempio 2.20. *Discussi in classe i seguenti esempi:*

(a) *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ *di termine generale* $a_n = 1$ *diverge a* $+\infty$. *Infatti* $s_n = n \to +\infty$ *per* $n \to +\infty$.
(b) *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *converge e risulta*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Infatti, usando la formula $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, *si ottiene*

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n = \Big(1 - \frac{1}{2}\Big) + \Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = 1 - \frac{1}{n+1} \to 1$$

per $n \to +\infty$

Osservazione 2.21 (Serie a termini non negativi)**.** *Una particolare classe di serie è quella in cui il termine generale soddisfa* $a_n \geq 0$ *per ogni* n. *In tal caso si vede subitro che la successione* (s_n) *è monotona crescente (vale infatti per ogni* n *la disuguaglianza* $s_{n+1} = s_n + a_n \geq s_n$*). Quindi una serie a termini non negativi può fare due cose:*

- *convergere a una somma non negativa;*
- *divergere a* $+\infty$.

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \lambda, \qquad \text{con } \lambda \in [0, +\infty]\,.$$

Condizione necessaria di convergenza.

Proposizione 2.22 (condizione necessaria di convergenza)**.** *Se una serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *è convergente, allora deve essere*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{2.1}$$

Dimostrazione. In classe. □

La condizione è solo necessaria ma non sufficiente, coeme testimonia l'esempio che segue.

Esempio 2.23 (serie armonica)**.** *Vale*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Osserviamo innanzitutto che essendo la serie a termini non negativi, se essa non converge a una somma finita, allora di certo diverge a $+\infty$. *Assumiamo per assurdo che la serie sia convergente. Valutando* $S_{2n} - S_n$, *troviamo la somma di* $n+1$ *addendi*

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq (n+1)\frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}.$$

Questo prova che la serie ha somma $+\infty$.

Esercizio 2.24. *Verificare che:*

- *Se* (x_n) *è una successione e* $x_n \to \lambda$, *allora per ogni* $q \in \mathbb{N}$ *vale* $\lim_{n\to+\infty} x_{n+q} = \lambda$.
- *Sia* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie. Provare che, dato* $q \in \mathbb{N}$, *la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge se e solo se* $\sum_{n=q}^{\infty} a_n$ *converge. Verificare inoltre che*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \cdots + a_{q-1} + \sum_{n=q}^{\infty} a_n$$

La serie geometrica

Partiamo dalla formula seguente valida per ogni $q \neq 1$ e $n \in \mathbb{N}$:[4]

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad \text{per ogni } q \neq 1. \tag{2.2}$$

Esempio 2.25 (serie geometrica)**.** *Consideriamo la serie* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, *dove* $q \in \mathbb{R}$ *è un parametro assegnato. Usiamo* (2.2) *e otteniamo:*

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Valgono quindi le seguenti cose:

(a) *Se* $|q| < 1$, *allora* $q^{n+1} \to 0$ *per* $n \to \infty$. *Quindi la serie è convergente e vale*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q};$$

(b) *Se* $q \geq 1$, *allora la serie diverge a* $+\infty$. *Questo segue dalla discussione dell'esempio 2.20, se* $q = 1$. *Se invece* $q > 1$, *si ha* $q^{n+1} \to +\infty$ *per* $n \to +\infty$. *Quindi*

$$\lim s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1-\infty}{1-q} = +\infty$$

(c) *Se* $q \leq -1$, *la serie è oscillante (perché la successione* q^{n+1} *non ha limite, se* $q \leq -1$*).*

Esercizio 2.26 (svolto in classe)**.** *Calcolo di* $\sum_{k=p}^{\infty} q^k$ *con* $|q| < 1$ *e* $p \in \mathbb{N}$ *assegnato*

Teorema 2.27 (Criterio del confronto)**.** *Siano* (a_n) *e* (b_n) *due successioni non negative.* $a_n \geq 0$ *e* $b_n \geq 0$ *per ogni n. Supponiamo che la successione* (b_n) *domini* a_n *nel senso seguente:*

$$\exists C > 0 \quad q \in \mathbb{N}: \quad 0 \leq a_n \leq Cb_n \quad \forall n \geq q.$$

Allora:

- *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge a una somma finita, anche* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge a una somma finita.*
- *Se* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$, *allora anche* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$.

[4] Verifica: basta osservare che

$$\begin{aligned}(1+q+q^2+\cdots+q^n)(1-q) &= 1(1-q)+q(1-q)+\cdots+q^n(1-q)\\ &= (1-q)+(q-q^2)+(q^2-q^3)+\cdots+(q^n-1^{n+1}) = 1-q^{n+1}.\end{aligned}$$

Dimostrazione. Dimostriamo la prima affermazione soltanto. La seconda è analoga. Ricordiamo intanto che se $q \in \mathbb{N}$, una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge se e solo se la "coda" che parte dal termine q, cioè la serie $\sum_{n=q}^{\infty} x_n$, converge.

Assumiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$. Allora $\sum_{n=q}^{\infty} b_n$ converge. Quindi esiste $\mu \in \mathbb{R}$

$$b_q + \cdots b_{q+n} \to \mu,$$

per $n \to \infty$, in modo monotono. Ma allora

$$a_q + \cdots + a_{q+n} \le C(b_q + \cdots + b_{q+n}) \le C\mu.$$

Il numero $C\mu$ è quindi un maggiorante della successione monotona $s_n = a_q + \cdots + a_{q+n}$. Quindi

$$\sum_{n=q}^{\infty} a_n \le C\mu.$$

Dunque la serie $\sum_{n=q}^{\infty}$ converge. Ma allora anche la serie completa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a un numero finito. □

Esercizio 2.28 (svolti in classe)**.** *Studio della convergenza delle serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Calcolo del limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{q^n} \quad \text{con } k \in \mathbb{N} \text{ e } q > 1.$$

Studio della convergenza delle serie

$$\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n2^n} \qquad \sum_{n\ge 1} \frac{1}{n+2^n}$$

$$\sum_{n\ge 1} \frac{n}{2^n} \quad \text{(svolto confrontando con } \sum_{n\ge 1} \Big(\frac{3}{4}\Big)^n\text{).}$$

2.5. Esercizi per casa

1. Verificare usando la definizione che la successione $(\frac{n^2+n+1}{n^2})$ è di Cauchy.
2. Sono date due successioni $(a_n), (b_n)$ con termini positivi $a_n > 0$ e $b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo di sapere che il loro quoziente converge a un limite λ finito e strettamente positivo:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in \,]0, +\infty[$$

   Quele delle seguenti affermazioni è vera o falsa? (Alcune possono essere vere o false a seconda delle situazioni. Fare i dovuti commenti).
   (a) Esiste $\overline{n}$ tale che $a_n \le 2\lambda b_n$ per ogni $n \ge \overline{n}$.
   (b) Esiste $\overline{n}$ tale che $a_n \le \frac{1}{2}\lambda b_n$ per ogni $n \ge \overline{n}$.
   (c) $a_n \le 2\lambda b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Esiste $\overline{n}$ tale che $a_n \le \lambda b_n$ per ogni $n \ge \overline{n}$.
   (e) Esiste $M > 0$ tale che $a_n \le M b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. (Ricordare che una successione convergente è limitata ...).

Se la serie $\sum b_n$ diverge a $+\infty$, cosa possiamo dire di $\sum a_n$? Se Se la serie $\sum b_n$ è convergente, cosa possiamo dire di $\sum a_n$?

3. Studiare la convergenza di:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \frac{2}{3^n} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{2+(-1)^n}{n^2+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3n}{n^3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}.$$

4. È noto che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

converge a una somma finita se $\alpha > 1$ e diverge a $+\infty$ se $\alpha \leq 1$. Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^{1/4}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^p+1} \quad \text{al variare di } p > 0 \text{ numero reale.}$$

5. Sia $q \in \mathbb{N}$ un numero fissato. Poniamo

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } 1 \leq n \leq q \\ 2^{-n} & \text{se } n \geq q+1 \end{cases} \quad \text{e} \quad b_n = \begin{cases} 2^{-n} & \text{se } 1 \leq n \leq q \\ 2^n & \text{se } n \geq q+1 \end{cases}$$

Discutere la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

6. Sia $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri naturali. Assumiamo di sapere che $p_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$. Provare che se una successione a_n tende a un limite λ, allora anche $\lim_{n\to+\infty} a_{p_n} = \lambda$.

   È vero il viceversa?

7. Siano $a_n \geq 0$ e $\lambda_n \geq 0$ due successioni non negative. Provare i seguenti due fatti:
   (a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente, allora anche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ è convergente.
   (b) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente e se $\lambda_n \to \lambda > 0$ per $n \to \infty$, allora$\sum_{n\geq 1} \lambda_n a_n$ è convergente anch'essa.

3. Lo spazio $\mathbb{R}^d$

3.1. Prodotto scalare, norma e loro proprietà

Utilizzeremo lo spazio euclideo

$$\mathbb{R}^n := \{x : x = (x_1, \ldots, x_n), \quad \text{con } x_j \in \mathbb{R} \text{ per ogni } j = 1, \ldots, n\}$$

con le operazioni standard di somma tra vettori e prodotto di un vettore con uno scalare.

Definizione 3.1 (Prodotto scalare standard). *Definiamo per ogni $x = (x_1, \ldots, x^d)$ e $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$,*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Proprietà verificate:

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- $\langle (\lambda x + \lambda' x'), y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x', y \rangle$, per ogni $x, x', y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$.
- $\langle x, x \rangle \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Inoltre $\langle x, x \rangle = 0$ se e solo se $x = 0$, il vettore nullo.

Definizione 3.2 (vettori ortogonali). *x e $y \in \mathbb{R}^n$ si dicono* ortogonali *se vale $\langle x, y \rangle = 0$.*

Definizione 3.3 (Norma euclidea)**.** *Poniamo*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} x_j^2}.$$

- Vale $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.
- Vale $\|x\| \geq 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}^n$. Inoltre $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$.
- Vale la *disuguaglianza triangolare* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Definizione 3.4. *La distanza tra due punti x e y in $\mathbb{R}^n$ è il numero $\|x - y\|$.*

Notazione. *In molti libri di analisi si utilizza il simbolo $|x|$ al posto di $\|x\|$ per indicare la norma di un vettore di $\mathbb{R}^d$. ANche in questi appunti a volte si userà tale convenzione.*

Esercizio 3.5. *Siano $x = (1, 2, 2)$ e $y = (2, 1, 3)$. Calcolare inoltre la distanza tra x e y.*

Esercizio 3.6. *Trovare tutti i vettori ortogonali a $v = (1, 2, 1)$. Trovare poi tutti i vettori simultaneamente ortogonali a $u = (1, 1, 0)$ e $v = (0, 1, 1)$.*

Definizione 3.7 (normalizzato di un vettore di $\mathbb{R}^d$)**.** *Se $x \neq 0$, tra tuti i vettori λx, con $\lambda > 0$ ne esiste uno solo con norma unitaria. Esso corrisponde alla scelta $\lambda = \frac{1}{\|x\|}$ ed ha dunque la forma*

$$\frac{1}{\|x\|} x = \frac{x}{\|x\|}.$$

Tale vettore si chiama normalizzato di x:

Esercizio 3.8. *Normalizzare il vettore $x = (1.2)$.*

Esercizio 3.9. *Verificare usando le proprietà del prodotto scalare, che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, vale*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \langle x, y\rangle + \|y\|^2. \tag{3.1}$$

Osservazione 3.10. *Se x e y sono ortogonali, allora vale il* Teorema di Pitagora

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Teorema 3.11 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (senza dimostrazione))**.** *Vale*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|, \tag{3.2}$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$. Inoltre vale l'uguaglianza in (3.2) *se e solo se x e y sono linearmente dipendenti.* [5]

Corollario 3.12. *Vale la disuguaglianza triangolare $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \leq \text{per Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2. \end{aligned}$$

□

Definizione 3.13 (Palla euclidea)**.** *Definiamo, dati $x \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$, la* palla *di centro x e reggio r.*

$$B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| < r\}.$$

Esempio 3.14. *La palla $B((0, 0), r) \subset \mathbb{R}^2$. La palla unidimensionale $B(x, r) = \,]x - r, x + r[\,$.*

[5] Cioè $\lambda x + \mu y = 0$ per una opportuna scelta di scalari λ, μ che soddisfino $\lambda^2 + \mu^2 > 0$.

3.2. Successioni convergenti in $\mathbb{R}^d$

Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$ è una famiglia di vettori $(x_n^1, \dots, x_n^d) \in \mathbb{R}^d$, indicizzati da $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 3.15 (Successione convergente). *Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n^1, \dots, x_n^d)_{n\in\mathbb{N}}$ di vettori in $\mathbb{R}^d$ si dice convergente a $x = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon > 0$ tale che*

$$\|x_n - x\| < \varepsilon, \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

In tal caso, si scrive $x_n \to x$ oppure $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$.

Esercizio 3.16. *Verificato che la successione in $\mathbb{R}^2$ definita da $x_n = (1/n, (n+1)/n)$ converge al vettore $(0, 1)$, per $n \to +\infty$*

Teorema 3.17. *Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite $x = (x^1, \dots, x^d) \in \mathbb{R}^d$ se e solo se per ogni $k = 1, \dots, d$, la successione in $\mathbb{R}$ $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x^k.*

La dimostrazione è molto elementare. Altrettanto elementare è la generalizzazione in dimensione d del Teorema di Bolzano–Weierstrass. La nozione di successione limitata in $\mathbb{R}^d$ si generalizza cme segue:

Definizione 3.18 (successione limitata). *Una successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$ si dice limitata se esiste $M > 0$ tale che*

$$\|x_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(In altri termini una successione è limitata se tutti i suoi termini cono contenuti in una palla di raggio M sufficientemente grande.)

Teorema 3.19 (Bolzano–Weierstrass). *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione limitata in $\mathbb{R}^d$, allora esiste $x \in \mathbb{R}^d$ ed esiste (x_{k_n}) sottosuccessione di (x_n) tale che $x_{k_n} \to x$, per $n \to \infty$.*

La dimostrazione è omessa, perché non contiene alcuna novità sostanziale rispetto al caso unidimensionale.

3.3. Topologia elementare di $\mathbb{R}^d$

Definizione 3.20 (Insieme aperto). *Un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ si dice* insieme aperto *se per ogni $x \in \Omega$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$.*

Definizione 3.21 (Insieme chiuso). *Un insieme $F \subset \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se vale $F = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$ con Ω insieme aperto.*

Una notazione per l'insieme complementare di $A \subset \mathbb{R}^d$ è anche

$$A^c := \mathbb{R}^d \setminus A = \{x \in \mathbb{R}^d : x \notin A\}.$$

Si conviene di assumere che l'insieme vuoto $\varnothing$ è aperto. Lo spazio $\mathbb{R}^d$ intero è banalmente aperto, ma è anche chiuso, in quanto complementre di un aperto. Si può dimostrare che, $\varnothing$ e $\mathbb{R}^d$ sono gli unici insiemi sia aperti che chiusi in $\mathbb{R}^d$.

Esempio 3.22. *Ecco alcuni eesmpi di insiemi aperti e chiusi:*

- *Gli intervalli a estremi esclusi $]a, b[\subset \mathbb{R}$ sono aperti.*
- *Le palle $B(x, r) \subset \mathbb{R}^d$ sono aperte per ogni $x \in \mathbb{R}^d$ e $r > 0$. Dimostrato in classe usando la disuguaglianza triangolare.*
- *L'esterno di una palla $\{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| > r\}$ è un insieme aperto. Quindi le palle chiuse $\{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x\| \leq r\}$ sono insiemi chiusi per ogni $r \geq 0$. In particolare, se $r = 0$ vediamo che i singoli punti $\{x\} \subset \mathbb{R}^n$ sono insiemi chiusi.*

Proposizione 3.23. *Valgono le seguenti proprietà sulle unioni e intersezioni di aperti:*

1. *Se* $(\Omega_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *è una famiglia qualsiasi di insiemi aperti indicizzati da un parametro* $\lambda \in \Lambda$, *allora* $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda$ *è aperto.*
2. *Se* $\Omega_1, \dots, \Omega_p$ *sono* p *insiemi aperti (famiglia* finita*), allora* $\Omega_1 \cap \dots \cap \Omega_p$ *è aperto.*
3. *Non è vero che un'intersezione qualsiasi di insiemi aperti è aperta. Ad esempio, gli insiemi* $\Omega_n = B(0, 1/n)$ *sono aperti per ogni* n, *ma la loro intersezione* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \{0\}$ *non è aperta.*

Dimostrazione. Proviamo la prima affermazione: sia $x \in \cup_\lambda \Omega_\lambda$. Scegliamo un qualsiasi $\lambda \in \Lambda$ tale che $x \in \Omega_\lambda$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subset \Omega_\lambda$. In particolare sarà $x \in \bigcup_\lambda \Omega_\lambda$. Questo prova il punto 1.

Proviamo la seconda affermazione. La proviamo per due insiemi Ω_1 e Ω_2. Sia $x \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Allora $x \in \Omega_1$ che è aperto. Quindi esiste ε_1 tale che $B(x, \varepsilon_1) \subset \Omega_1$. Ripetendo per Ω_2 troviamo che per un opportuno $\varepsilon_2 > 0$ vale $B(x, \varepsilon_2) \subset \Omega_2$. Scegliendo $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ è facile vedere che $B(x, \varepsilon) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$. □

È utile anche osservare il seguente fatto: gli insiemi chiusi contengono tutti i limiti delle successioni convergenti in essi contenuti. Precisamente:

Proposizione 3.24. *Se* (x_n) *è una successione di elementi di un chiuso* $F \subset \mathbb{R}^d$ *e se* (x_n) *è convergente a qualche* $x = \lim_{n\to+\infty} x_n \in \mathbb{R}^d$, *allora*

$$x \in F.$$

Dimostrazione. Sia $x_n \in F$ per ogni n con F insieme chiuso. Supponiamo per assurdo che $x_n \to x \notin F$. Poiché F^c è aperto, esiste una palla $B(x, \varepsilon) \subset F^c$. Poiché $x_n \to x$, esiste anche n_ε per cui $|x_n - x| < \varepsilon$ se $n \geq n_\varepsilon$. Quindi per tutti gli $n \geq n_\varepsilon$ vale $x_n \in F^c$. Questo contraddice però l'ipotesi secondo cui $x_n \in F$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

3.4. Funzioni

Una funzione $f : A \to \mathbb{R}^q$, con $A \subset \mathbb{R}^d$ è una legge che ad ogni elemento x di A associa un elemento $f(x) \in \mathbb{R}^q$.

Linguaggio. *Se* $f : A \to \mathbb{R}^d$ *è una funzione, l'insieme* A *si chiama* dominio *di* f. *Il* grafico *di* f *è l'insieme*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q : x \in A, y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q.$$

Se $E \subset A$, *allora l'insieme*

$$f(E) := \{f(x) : x \in E\}$$

si chiama immagine di E attraverso f. *Se infine* $G \subset \mathbb{R}^q$, *allora l'insieme*

$$f^{-1}(G) := \{x \in A : f(x) \in G\}$$

si chiama controimmagine *o* preimmagine *di* G *atttraverso* f.

Esercizio 3.25 (svolto in classe)**.** *Data la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, *individuare:*

- *il grafico di* f;
- *l'insieme* $f([0, 2[)$;
- *l'insieme* $f^{-1}(]1, 4[)$.

Definizione 3.26 (funzione continua)**.** *Sia* $A \subset \mathbb{R}^d$ *e sia* $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione. Si dice che:*

- f *è continua in un punto* $x \in A$ *se per ogni successione* $x_n \in A$, $x_n \to x$, *risulta* $f(x_n) \to f(x)$;

- *f è continua nell'insieme A se è continua in ogni punto $x \in A$.* [6]

Discussione informale:

- se è data una funzione continua di una variabile, $\mathbb{R} \ni x \mapsto g(x) \in \mathbb{R}$, allora la funzione $f(x_1, x_2) = g(x_1)$ è una funzione continua delle variabili $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{R}$.
- Somme, prodotti, quozienti (a denominatori non nulli) e composizioni di funzioni continue sono continue.

Esempio 3.27. *Alla luce dei punti evidenziati, osserviamo ad esempio che la funzione $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ è continua, perche' $x \mapsto g(x) = x$ è continua da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$. Quindi $f_1(x_1, x_2) = x_1$ e $f_2(x_1, x_2)$ sono continue nelle due variabili $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ e infine la loro somma è continua. Molte altre funzioni possono essere riconosciute come continue in base ad argomenti simili.*

La continuità può essere anche caratterizzata senza successioni, come segue:

Proposizione 3.28. *Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ e sia $f : A \to \mathbb{R}^q$. Allora f è continua in $x \in A$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che*

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall y \in A \quad |y - x| < \delta_\varepsilon.$$

Dimostrazione. Sia f continua in $x \in A$. Supponiamo per assurdo che esista un numero $\varepsilon_0 > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ possiamo trovare $y \in A$ con $|y - x| < \delta$ e $|f(y) - f(x)| \geq \varepsilon_0$. Scegliendo ad esempio $\delta = \frac{1}{n}$ troviamo allora che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un punto $x_n \in A$ che soddisfi

$$|x_n - x| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon_0.$$

Andando al limite per $n \to \infty$ si trova una contraddizione con il fatto che f è continua in x.

Ora, viceversa assumiamo che f sia continua in un certo $x \in A$, cioè che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall y \in A \quad \text{che soddisfi } |y - x| < \delta_\varepsilon.$$

Sia ora $x_n \in A$, $x_n \to x$. Applivcando la definizione di limite con $\delta = \delta_\varepsilon$, possiamo affermare che esiste $n_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ tale che $|x_n - x| < \delta_\varepsilon$ per ogni $n \geq n_{\delta_\varepsilon}$. Ma allora questo implica che $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$ per gli stessi n. Quindi abbiamo dimostrato che f è continua in x. □

Usando questa caratterizzazione si può ottenere il seguente corollario, che ci permette di individuare facilmente molti insiemi aperti/chiusi in $\mathbb{R}^d$ e che sarà utile al momento dello studio delle funzioni misurabili.

Corollario 3.29. *Se $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q$ è continua, allora per ogni sottoinsieme aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^q$, risulta $f^{-1}(\Omega)$ aperto nel dominio $\mathbb{R}^d$. Brevemente, controimmagini di insiemi aperti attraverso funzioni continue sono aperti.*

Per evitare complicazioni questo corollario è formulato solo per funzioni definite su tutto lo spazio $A = \mathbb{R}^d$.

Dimostrazione. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ un aperto (non vuoto per evitare banalità) e sia $x \in f^{-1}(\Omega)$. Questo significa che $f(x) \in \Omega$. Poiché Ω è aperto, esiste un $\varepsilon > 0$ piccolo a sufficienza affinché $B(f(x), \varepsilon) \subset \Omega$. Scegliendo il δ_ε fornito dalla definizione di continuità in x, avremo che per ogni $y \in \mathbb{R}^d$ che soddisfi $|y - x| < \delta_\varepsilon$, sarà $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ e quindi $f(y) \in \Omega$. Questo dice che $B(x, \delta_\varepsilon) \subset f^{-1}(\Omega)$. Quindi abbiamo riconosciuto che $f^{-1}(\Omega)$ è aperto. □

[6] A volte si scrive $f \in C(A)$, per indicare che f è continua su A.

Osservazione 3.30. *In particolare, il corollario precedente ci dice che se una funzione a valori scalari* $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *è continua, allora gli insiemi definiti da disuguaglianze strette del tipo*

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > b\} \quad e \quad \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) < b\}$$

sono aperti per ogni scelta di $b \in \mathbb{R}$. *Infatti, vale* $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > b\} = f^{-1}(]b, +\infty[)$, *cioè la controimmagine dell'aperto* $]b, +\infty[\subset \mathbb{R}$. *Per passaggio al complementare, troviamo che insiemi definiti da disuguaglianze deboli del tipo*

$$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq b\} \quad e \quad \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \leq b\}$$

sono chiusi per ogni b. È ovviamente sempre sottointeso che le funzioni coinvolte davono essere continue.

Esempio 3.31. *Usando l'osservazione precedente, verificato in classe che* $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$ *è aperto e che* $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^d : 1 < \|x\| < 2\}$ *è aperto. Basta ricordare che la funzione norma è continua e scrivere* $\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2$, *dove* $\Omega_1 = \{x : \|x\| > 1\}$ *e* $\Omega_2 = \{x : \|x\| < 2\}$ *sono entrambi aperti e la loro intersezione è quindi aperta.*

Teorema 3.32 (Teorema di Weierstrass). *Se* $A \subset \mathbb{R}^d$ *è chiuso e limitato e se* $f : A \to \mathbb{R}$ *è continua, allora esistono* $x_-, x_+ \in A$ *tali che*

$$f(x_-) = \min f(A) \quad e \quad f(x_+) = \max f(A).$$

Gli insiemi chiusi e limitati in $\mathbb{R}^d$ si chiamano anche insiemi *compatti*. Osserviamo che il teorema di Weierstrass è falso se rimuoviamo l'ipotesi di chiusura o di limitatezza. Basta osservare le funzioni

$$f :]0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x},$$

che ha minimo ma non massimo sull'insieme $]0, 1]$ (che è limitato ma non chiuso), e

$$g : [1, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x},$$

che ha massimo ma non ha minimo sull'insieme (chiuso ma non limitato) $[1, +\infty[$.

3.5. Esercizi per casa

(1) Siano $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 5\} \subset \mathbb{R}$. Dire chi sono gli insiemi $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$. [7]

(2) Verificare che dati due insiemi $A, B \subset \mathbb{R}^d$, vale $(A \cup B)^c = B^c \cap A^c$. Verificare che se $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ è una famiglia di insiemi in $\mathbb{R}^d$, allora $(\cup_\lambda A_\lambda)^c = \cap_\lambda A_\lambda^c$. Che cosè l'insieme $\Big(\bigcap_{x \in \mathbb{R}} \{x\}^c\Big)^c$?

(3) Usando l'esercizio precedente e "passando al complementare" la Proposizione (3.23), dimostrare che se $(F_\lambda)_\lambda$ è una famiglia di chiusi in $\mathbb{R}^d$, allora $\cap_\lambda F_\lambda$ è chiuso. Che cosa si può dire di $\cup F_\lambda$? Che cosa si può dire di una unione finita $F_1 \cup \cdots \cup F_p$ di p insiemi chiusi in $\mathbb{R}^d$? L'unione di insiemi chiusi $\bigcup_{\lambda \in]0,1[} [-\lambda, \lambda]$ è chiusa?

(4) Definiamo la differenza simmmtrica tra A e B.

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Cos'è $]-1, 2] \triangle [0, 3]$? Verificare che in generale vale $A \triangle B = B \triangle A$ e che risulta anche $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Verificare poi che $A \triangle B = \varnothing$ se e solo se $A = B$.

[7] Ricordiamo che $A \setminus B := \{x \in A : x \notin B\} = A \cap B^c$.

(5) Sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$ con $a_n > 0$ per ogni n. Supponiamo di sapere che esiste una sottosuccessione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ che converge a zero. Verificare che $\cap_{n\in\mathbb{N}}[0, a_n] = \{0\}$.

Sia poi $r_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo di sapere che esiste $r_{k_n} \to +\infty$ per $n \to \infty$. Trovare $\cup_{n\in\mathbb{N}} B(0, r_n)$, dove $B(0, r_n)$ è la palla in $\mathbb{R}^d$. È possibile che risulti anche $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(0, r_n) = \{0\}$?

(6) Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme limitato e sia $B \subset \mathbb{R}^d$ un sottoinsieme qualsiasi. Di quale tra i seguenti insiemi possiamo dire che è limitato? $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A^c.

(7) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita come segue:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 3 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Trovare $f^{-1}(]a, +\infty[)$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. Dire se è aperto o meno, al variare di a.

(8) Dire quale dei seguenti insiemi è aperto, chiuso, oppure ne' aperto ne' chiuso.

- $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\ x \neq 0\}$;
- $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq 0\}$;
- $]0, 1[\times]0, 1[\subset \mathbb{R}^2$;
- $]0, 1[\times \{1\} \subset \mathbb{R}^2$.
- $\{2\} \times [0, 1]$;
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n - 2^{-n}, n + 2^{-n}[$.

(9) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Individuare gli insiemi $f^{-1}(]b, +\infty[)$, al variare di $b \in \mathbb{R}$.

3.6. Successioni di funzioni convergenti puntualmente e uniformemente

Una successione di funzioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia di funzioni $f_n : A \to \mathbb{R}^q$ definite tutte su uno stesso insieme $A \subset \mathbb{R}^d$.

4. Elementi di teoria della misura

4.1. Funzioni iniettive/suriettive/biiettive

Definizione 4.1 (funzione iniettiva–suriettiva–biiettiva)**.** *Sia $f : A \to B$ una funzione. La funzione f si dice*

- iniettiva *se per ogni $a, a' \in A$ con $a \neq a'$ risulta $f(a) \neq f(a')$.* [8]
- *Una funzione $f : A \to B$ si dice* suriettiva *se $f(A) = B$. Cioè se per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$.*
- *Una funzione $f : A \to B$ si dice* biiettiva *se è iniettiva e suriettiva.*

Esempio 4.2. *Alcuni esempi:*

- $f : \{1, 2\} \to \{3, 4, 5\}$, $f(1) = 3$ *e* $f(2) = 5$
- $g : \{1, 2\} \to \{3, 4, 5\}$, $g(1) = 4$, $g(2) = 4$.

[8] Equivalentemente, se a ed $a' \in A$ soddisfano $f(a) = f(a')$, allora risulta $a = a'$.

- $h : \{0, 1, 2\} \to \{3, 4, 5\}$, $h(0) = 3$, $h(1) = 4$, $h(2) = 5$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
- $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$, $f(x) = x^2$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$
- $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$, $f(x) = e^x$

4.2. Insiemi numerabili

Per la costruzione della teoria della misura sono importanti gli insiemi *numerabili*. Detto in termini informali, sono quegli insiemi i cui elementi possono essere enumerati usando i numeri naturali. (11)

Definizione 4.3 (Insieme finito)**.** *Un insieme A si dice finito con n elementi se esiste $n \in \mathbb{N}$ e una funzione $f : A \to \{1, 2, \dots, n\}$ biiettiva. In tal caso si dice che l'insieme ha n elementi.*

Conveniamo che l'insieme vuoto è finito con 0 elementi.

Definizione 4.4 (insieme infinito numerabile)**.** *Un insieme A si dice* infinito numerabile *(o piú semplicemente* numerabile*) se non è finito e se esiste una funzione $f : A \to \mathbb{N}$ iniettiva.*

Osservazione 4.5. *Se A è un insieme infinito numerabile, allora gli elementi di A possono essere "etichettati" usando come indici i numeri naturali:*

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}. \tag{4.1}$$

Per convincersene basta notare che $f(A) = \{f(a) : a \in A\}$ è un sottoinsieme infinito di $\mathbb{N}$. Dunque possiamo scrivere $f(A) = \{n_1, n_2, n_3, \dots,\}$, dove gli n_j sono in ordine crescente: $1 \le n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Quindi, poiché la $f : A \to f(A)$ è iniettiva e suriettiva, per ciascun n_j esiste un unico a_j tale che $f(a_j) = n_j$. Questo fornisce l'enumerazione scritta in (4.1). Osserviamo che $f(A)$ non può essere finito, altrimenti sarebbe finito anche A.

Notiamo infine che la funzione $\varphi : A \to \mathbb{N}$, definita da $\varphi(a_j) = j$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ è iniettiva e suriettiva.

Mostriamo ora alcuni esempi di insiemi numerabili.

Esempio 4.6.

- *L'insieme dei numeri naturali $A = \mathbb{N}$ è banalmente numerabile. Basta scegliere $f : A \to \mathbb{N}$ la funzione identità, $f(n) = n$ per ogni n.*
  Sempre scegliendo la funzione identità si riconosce facilmente che l'insieme dei numeri pari $A = \{2, 4, 6, \dots\}$ e quello dei numeri dispari $\{1, 3, 5, \dots\}$ sono numerabili.
- *L'insieme dei numeri $Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ è numerabile.*

Esempio 4.7. *L'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile. Verificato in classe che la funzione $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,*

$$f(k, n) = 2^k 3^n$$

è iniettiva.

Esempio 4.8. *Utilizzando un ragionamento simile a quello precedente, è possibile dimostrare che l'insieme dei razionali $\mathbb{Q} = \left\{\frac{r}{s} : r \in \mathbb{Z}\ s \in \mathbb{N}\right\}$ è numerabile.*

Non tutti gli insiemi infiniti sono numerabili.

Teorema 4.9 (Cantor)**.** *Ogni intervallo non banale $[a, b] \subset \mathbb{R}$ di numeri reali* non è numerabile.

Dimostrazione. Non presentata. □

Un ulteriore proprietà importante della numerabilità è il suo "buon comportamento" rispetto a unioni numerabili.

Teorema 4.10. *Se $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia di insiemi finiti o numerabili, tutti contenuti in un insieme X, allora l'unione* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ *è finita o numerabile.*

Dimostrazione. Non svolta in classe, ma si veda l'esercizio (f) nel paragrafo 4.4 per il caso semplificato di due soli insiemi. □

4.3. Misure su σ-algebre

Questa parte di corso è svolta seguendo il testo [R].

Definizione 4.11 (σ-algebra su un insieme X)**.** *Sia X insieme. Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Si dice che $\mathcal{A}$ è una σ-algebra su X se vale quanto segue:*

(1) $X \in \mathcal{A}$;
(2) se $E \in \mathcal{A}$ allora $E^c := X \setminus E \in \mathcal{A}$;
(3) se $E_n \in \mathcal{A}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$.

Linguaggio. *Gli insiemi di una σ-algebra si chiamano* insiemi misurabili*. La coppia $(X, \mathcal{A})$ si chiama "spazio misurabile".*

Dunque una σ-algebra è "chiusa" rispetto a passaggio al complementare e a unioni numerabili.

Osservazione 4.12. *Se $\mathcal{A}$ è una σ-algebra su un insieme X, allora:*

- *$\varnothing \in A$. Infatti $\varnothing = X^c$*
- *Se $E_n \in \mathcal{A}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\cap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$. Infatti,*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A} \quad \Leftrightarrow \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big)^c \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c \in \mathcal{A}.$$

  Ma quest'ultima affermazione è vera, perche', essendo $E_n \in \mathcal{A}$ per ogni n, è anche $E_n^c \in \mathcal{A}$.
- *Se $A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A}$, allora $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}$.*

Due esempi elementari di σ-algebre sono i seguenti:

Esempio 4.13 (La σ-algebra banale)**.** *Se X è un'insieme, allora*

$$\mathcal{A} = \{\varnothing, X\}$$

è una σ-algebra.

Esempio 4.14. *Se X è un insieme, allora l'insieme della parti di X, cioè*

$$2^X := \text{l'insieme di tutti i sottoinsiemi di } X, \text{ compresi lo stesso } X \text{ e l'insieme vuoto } \varnothing.$$

è una σ-algebra (chiamata a volte σ-algebra discreta).

Esercizio 4.15. *Scrivere l'insieme delle parti $2^{\{1,2,3\}}$. Risulta*

$$2^{\{1,2,3\}} = \Big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\Big\}.$$

La famiglia di insiemi appena elencata è una σ-algebra su $\{1,2,3\}$. [9]

Definizione 4.16 (misura)**.** *Sia $\mathcal{A}$ una σ-algebra su un insieme X. Una misura su $\mathcal{A}$ è una funzione* (11)
$\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ tale che:

[9] Non è un caso che l'insieme delle parti dell'insieme con 3 elementi $\{1,2,3\}$ sia formato da 2^3 elementi.

(1) $\mu(\varnothing) = 0$;
(2) *se* $E_n \in \mathcal{A}$ *per ogni* n *e la famiglia* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *è disgiunta, allora*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n). \tag{4.2}$$

Linguaggio.
- *La tripla* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *si chiama* spazio con misura.
- *La proprietà (2) si chiama* additività numerabile.

Osservazione 4.17. *Osserviamo le seguenti cose.*

(a) *Riguardo alla proprietà di additività numerabile (2), notiamo che, se* $\mu(E_n) = +\infty$ *per qualche* n, *oppure le la serie numerica* $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$ *diverge, allora l'uguaglianza va interpretata come* $+\infty = +\infty$.

(b) *Se* $E_1, \dots E_p$ *sono* p *insiemi misurabili e disgiunti, allora vale l'additività finita:*

$$\mu(E_1 \cup \dots \cup E_p) = \mu(E_1) + \dots + \mu(E_p).$$

Per riconoscere tale proprietà basta usare l'additività numerabile per la famiglia numerabile $E_1, E_2, \dots, E_p, \varnothing, \varnothing, \dots$ *con infiniti insiemi vuoti che seguono i* p *insiemi assegnati.*

(c) *Se* A *e* B *sono insiemi misurabili e se vale* $A \subseteq B$, *allora possiamo scrivere*

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

In particolare, poiché $\mu(B \setminus A) \geq 0$, *vale* $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(d) *L'addivitività numerabile (2) può anche essere enunciata nella forma seguente: per ogni famiglia* $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *di insiemi disgiunti a coppie e con* Λ *insieme numerabile, vale*

$$\mu\Big(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda\Big) = \sum_{\lambda\in\Lambda} \mu(E_\lambda),$$

purché si faccia qualche precisazione in più sul significato della somma al membro di destra.

Esempio 4.18 (misura di conteggio). *Se* X *è un insieme qualsiasi, allora, sulla* σ*-algebra* 2^X, *possiamo definire:*

$$\mu(E) = \begin{cases} +\infty & \text{se } E \text{ è un insieme infinito} \\ n & \text{se } E \text{ è finito e ha } n \text{ elementi.} \end{cases}$$

Si verifica che μ *è una misura.*

Esempio 4.19 (massa di Dirac). *Su* $\mathbb{R}^d$, *prendiamo* $\mathcal{A} = 2^{\mathbb{R}^d}$ *e fissiamo un punto* $z \in \mathbb{R}^d$. *Poniamo, per* $E \subset \mathbb{R}^d$,

$$\mu_z(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } z \in E \\ 0 & \text{se } z \notin E. \end{cases}$$

Definizione 4.20 (misura di probabilità). *Sia* X *un insieme,* $\mathcal{A}$ *una* σ*-algebra su* X *e* μ *una misura su* $\mathcal{A}$. *La misura* μ *si dice* misura di probabilità *se* $\mu(X) = 1$.

Ora analizziamo il comportamento delle misure positive rispetto a unioni "crescenti" di insiemi.

Proposizione 4.21. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *uno spazio con misura. Sia* E_n *una famiglia di insiemi misurabili che soddisfino* $E_n \subseteq E_{n+1}$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$. *Allora vale*

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n).$$

Osserviamo che è cruciale che la famiglia $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia monotona (cioè che valga la condizione $E_n \subseteq E_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). Questo si capisce ad esempio considerando la famiglia $E_1 = \{1, 2\}$, $E_n = \{1\}$ per ogni $n \geq 2$ di sottoinsiemi di $X = \{1, 2, 3\}$ equipaggiato con la misura di conteggio.

Dimostrazione. Osserviamo che, ponendo $B_1 = E_1$, $B_2 = E_2 \setminus E_1$,..., $B_n = E_n \setminus E_{n-1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta per ogni $p \in \mathbb{N}$

$$E_n = \bigcup_{n=1}^{p} E_n = \bigcup_{n=1}^{p} B_n \quad \text{e} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Qui abbiamo usato il fatto che la successione di insiemi soddisfa $E_n \subseteq E_{n+1}$ per ogni n. Notiamo che gli insiemi B_n sono disgiunti a coppie. Quindi possiamo usare l'additività numerabile:

$$\begin{aligned}\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) &= \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\Big) \overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \overset{(**)}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) \\ &\overset{(+)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\Big) \overset{(++)}{=} \lim_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\Big) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n),\end{aligned}$$

Confrontando il primo e l'ultimo termine di questa catena di uguaglianze si ottiene la prova della proposizione. Nell'uguaglianza $(*)$ abbiamo usato l'additività numerabile. Nell'uguaglianza $(**)$ la definizione di somma di una serie; in $(+)$ abbiamo utilizzato l'additività finita e in $(++)$ il fatto che $\bigcup_{k=1}^{n} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} E_k = E_n$. □

La versione "al complementare" della proposizione precedente è la seguente.

Proposizione 4.22. *Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio con misura. Sia E_n una famiglia di insiemi misurabili che soddisfino $E_n \supseteq E_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo inoltre che almeno uno degli insiemi E_n abbia misura finita.*[10] *Allora vale*

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \lim_{n\to+\infty} \mu(E_n).$$

Dimostrazione. Non svolta in classe. □

4.4. Esercizi

(a) Sia $A_n = [0, n] \times [0, 1/n]$. Dire chi è $\cap_{n=1}^{\infty} A_n$.

Sia poi $E_n = B\Big(0, \dfrac{1}{n} + n + (-1)^n n\Big)$. Descrivere l'insieme $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

(b) Usando la disuguaglianza triangolare, dimostrare che se $w \in \mathbb{R}^d$ è un vettore non nullo e se R e r sono due numeri positivi con $R + r \leq \|w\|$, allora $B(0, R) \cap B(w, r) = \varnothing$.

(c) Sia $v \in \mathbb{R}^d$ un vettore fissato di norma unitaria $\|v\| = 1$. Sia $f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f_n = \mathbb{1}_{B(nv,1)}$. Studiare la convergenza puntuale e uniforme di di f_n. Suggerimento: usare l'esercizio (b).

(d) Sono date due funzioni $f : A \to B$ e $g : C \to D$, entranbe iniettive. Supponiamo che $B \subseteq C$. Verificare che la funzione composta $g \circ f : A \to D$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ è iniettiva.

(e) Verificare che le funzioni $\varphi : \mathbb{N} \to \{\text{numeri pari}\}$, $\varphi(n) = 2n$ e $\psi : \mathbb{N} \to \{\text{numeri dispari}\}$, $\psi(n) = 2n - 1$ sono iniettive.

[10] Questa ipotesi non è necessaria nella proposizione riguardante l'unione di insiemi.

(f) Siano A e B due sottoinsiemi di un assegnato insieme X entrambi numerabili e disgiunti (cioè $A \cap B = \varnothing$). Verificare usando i due esercizi precedenti, che $A \cup B$ è numerabile.

L'affermazione è valida anche se $A \cap B \neq \varnothing$. Come si potrebbe modificare lo svolgimento dell'esercizio in questo caso?

(g) Sono date due funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ con $A \subset \mathbb{R}^d$. Provare che se vale $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in A$, allora vale anche $\sup_A f \leq \sup_A g$.

È vero che se vale $\sup_A f \leq \sup_A g$, allora è anche $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in A$?

(h) Se $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ sono funzioni assegnate, verificare che valgono le disuguaglianze:

$$\sup_A (f+g) \leq \sup_A f + \sup_A g \qquad \text{e}$$
$$\sup_A |f+g| \leq \sup_A |f| + \sup_A |g|.$$

Osservazione 4.23 (additività e subadditività)**.** *Supponiamo di avere una misura $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$. Sappiamo che, se $(A_n)_n$ è una famiglia disgiunta di insiemi in $\mathcal{A}$, allora vale l'additività*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Se non assumiamo che gli insiemi siano disgiunti si ottiene, ad esempio per due insiemi, $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ di misura finita

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2). \tag{4.3}$$

Per verificare la formula (4.3) scriviamo dapprima $A_1 \cup A_2$ come unione disgiunta e usiamo l'additivià:

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)) = \mu(A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1). \qquad (*)$$

D'altra parte, però, si ha, scrivendo come unione disgiunta $A_2 = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap A_1^c)$ troviamo

$$\mu(A_2) = \mu(A_2 \cap A_1) + \mu(A_2 \cap A_1^c) = \mu(A_2 \cap A_1) + \mu(A_2 \setminus A_1) \qquad (**)$$

Unendo $(*)$ e $(**)$ in modo da eliminare $\mu(A_2 \setminus A_1)$, si trova (4.3)

In generale, se sono dati $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, vale

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k).$$

Andando al limite per $n \to +\infty$ si ottiene, nel membro di destra, per definizione di somma di una serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Nel membro di sinistra, considerando gli insiemi $E_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$, risulta $E_n \subset E_{n+1}$ e anche $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Quindi, il membro di sinistra si scrive

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \mu(E_n) \to \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n).$$

Il risultato del limite si ottiene applicando la Proposizione 4.21. Abbiamo quindi ottenuto la proprietà di subadditività numerabile

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k),$$

valida per ogni famiglia $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di insiemi in $\mathcal{A}$.

4.5. Scatole e misura esterna di Lebesgue in $\mathbb{R}^d$

Definizione 4.24 (Scatole in $\mathbb{R}^d$)**.** *Una scatola è il prodotto cartesiano di intervalli chiusi e limitati*

$$S = I_1 \times \cdots \times I_d = [a_1, b_1] \times \cdot \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d.$$

Richiediemo che $a_j \leq b_j$ per ogni j. Se una scatola ha almeno un lato nullo ($a_j = b_j$ per qualche j) la chiamiamo scatola degenere.

Definizione 4.25. *La* misura elementare *di una scatola $S = [a_1, b_1] \times \cdot \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$ è:*

$$\mathrm{mis}(S) = \mathrm{mis}([a_1, b_1] \times \cdot \times [a_d, b_d]) = (b_1 - a_1) \cdot \cdots (b_d - a_d).$$

Ad esempio, in $\mathbb{R}$ $\mathrm{mis}[1, 3] = 2$. In $\mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{mis}([0, 2] \times [0, 3]) = 6, \qquad \mathrm{mis}([2, 2] \times [3, 4]) = 0.$$

Le scatole degeneri hanno misura elementare nulla.
Definiamo ora la misura estrerna di Lebesgue. Sia

Definizione 4.26 (ricoprimento di un insieme attraverso scatole)**.** *Se $E \subset \mathbb{R}^d$, una famiglia di scatole $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento di E se vale $E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$.*

Notiamo che ogni insieme ammette almeno un ricoprimento con la famiglia di scatole $(S_n) = ([-n, n] \times \cdots \times [-n, n])_{n\in\mathbb{N}}$.

Nelle parti che seguono sarà a volte sottointeso che insiemi del tipo S_n, S_k, etc. indicano scatole. Inoltre, tutti i ricoprimenti che interverranno saranno effettuati attraverso famiglie di scatole.

Definizione 4.27 (misura esterna di Lebsegue)**.** *Dato un qualsiasi $E \subset \mathbb{R}^d$, definiamo*

$$\mu^*(E) = \inf\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{mis}(S_n) : (S_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ è un ricoprimento di } E \Big\} \in [0, +\infty] \tag{4.4}$$

In sostanza, la misura esterna è quel numero (eventualmente $+\infty$) che "ottimizza" la somma $\sum_n \mathrm{mis}\, S_n$ al variare di tutti i possibili ricoprimenti dell'insieme assegnato E. Se per ogni ricoprimento (S_n) la somma delle misure è $+\infty$, allora la misura esterna è $+\infty$.

Osservazione 4.28. *Se $A = I_1 \times \cdots \times I_d$, con $I_1, \ldots, I_d$ intervalli limitati (aperti, chiusi, semiaperti a destra o a sinistra) di estremi $a_1 \leq b_1, \ldots, a_d \leq b_d$, si può dimostrare che*

$$\mu^*(A) = (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d) = \mathrm{mis}(A),$$

cioè che la misura esterna coincide con la misura elementare. Mostrare l'uguaglianza non è però banale come sembra. [11]

Proposizione 4.29 (Proprietà della misura esterna $\mu^* : 2^{\mathbb{R}^d} \to [0, +\infty]$)**.** *La misura esterna di* (12)
Lebesgue ha le seguenti proprietà:
- *(a)* $\mu^*(\varnothing) = 0$;
- *(b) se $E \subset F$, allora $\mu^*(E) \leq \mu^*(F)$;*
- *(c) Se $E_n \subset \mathbb{R}^d$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora*

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n).$$

[11] Per una discussione sulla misura esterna si può vedere il libro: T. Tao, An introduction to measure theory. Graduate Studies in Mathematics, 126. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011, del quale è disponibile un draft alla url `http://terrytao.files.wordpress.com/2011/01/measure-book1.pdf`

Dimostrazione. La dimostrazioen di (a) è immediata. Basta scegliere il ricoprimento $S_n = \{0\}$ per ogni n, in cui ogni scatola è la scatola degenere formata da un solo punto.

La prova di (b) su può effettuare come segue: se $\mu^*(F) = +\infty$, allora non c'è nulla da dimostrare. Se invece $\mu^*(F) < \infty$, allora, per la proprietà di approssimazione dell'estremo inferiore, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare un ricoprimento $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si F tale che

$$\mu^*(F) + \varepsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mis}(S_n).$$

Ma, poiche' $E \subset F$, il ricoprimento (S_n) è anche un ricoprimento di E. Quindi avremo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{mis}(S_n) \geq \mu^*(E)$$

e la prova è conclusa.

Ora proviamo la (c). Supponiamo che $\sum_{n\geq 1} \mu^*(E_n) < \infty$, altrimenti non c'e' nulla da dimostrare. In particolare sarà $\mu^*(E_n) < \infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia $\varepsilon > 0$ un numero positivo. Per la proprietà di approssimazione dell'estremo inferiore, per ogni n fissato, possiamo trovare un ricoprimento di scatole $(S_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}$ che copre l'insieme E_n e che soddisfi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{mis}(S_{n,j}) < \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Osserviamo anche che la famiglia $(S_{n,j})_{(n,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ è un ricoprimento numerabile di $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Ma allora

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \leq \sum_{(n,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \operatorname{mis}(S_{n,j}) \overset{(\sharp)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{mis}(S_{n,j}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Lasciando tendere ε a zero, si ottiene la prova del punto (c). [12] □

Notiamo che tramite la misura esterna si può "misurare" qualsiasi insieme. Non vale però la additività numerabile per famiglie disgiunte di insiemi qualsiasi.

Definizione 4.30 (Insieme di misura esterna nulla). *Diciamo che $E \subset \mathbb{R}^d$ ha misura nulla se $\mu^*(E) = 0$. In altre parole, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento di scatole chiuse $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dell'insieme E che soddisfi $\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(S_n) < \varepsilon$*

Esempio 4.31. *I seguenti tipi di insiemi hanno misura nulla:*

(a) L'insieme vuoto: $\mu^*(\emptyset) = 0$. Scegliere il ricoprimento formato da infinite scatole banali S_n.

(b) Ogni insieme finito di p punti $x^1, \ldots, x^p \in \mathbb{R}^d$. Basta scegliere il ricoprimento in cui $S_j = \{x^j\}$, la scatola degenere formata dal solo punto x^j, per ogni $j \leq p$ e, ad esempio, $S_k = \{x^1\}$ per ogni $k > j$.

(c) Ogni scatole degenere $S = I_1 \times \cdots \times I_d \subset \mathbb{R}^d$ (in cui $I_j = [a_j, a_j]$ per almeno un j). Scegliere $S_n = S$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

(d) Ogni unione finita o numerabile $\cup_n A_n$ dove $\mu^*(A_n) = 0$ per ogni n. Basta usare la subadditività:

$$\mu^*\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) = 0.$$

[12] L'uguaglianza $(\sharp)$ è corretta, ma darne una spiegazione rigorosa richiederebbe un piccolo approfondimento che non facciamo.

Esempio 4.32. *Come caso particolare del punto (d), possiamo affermare che $\mu^*(\mathbb{Q}) = 0$. L'insieme dei numeri razionali ha misura esterna nulla.*

Osserviamo che ogni numero reale $x \in \mathbb{R}$ può essere approssimato da una successione di numeri razionali. Infatti, se x si rappresenta come allineamento decimale eventualmente illimitato nella forma $x = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} \ldots$, il troncamento di x alle n-esima cifra decimale $x_n = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n$ è razionale e soddisfa

$$|x_n - x| \le \frac{1}{10^n}.$$

In definitiva, l'insieme dei numeri razionali è numerabile e in particolare ha misura esterna nulla, ma si distribuisce come un pettine a denti "infinitamente fitti" all'interno della retta reale $\mathbb{R}$.

4.6. Insiemi misurabili secondo Lebesgue in $\mathbb{R}^d$

Definizione 4.33 (insieme misurabile secondo Lebesgue). *$A \subset \mathbb{R}^n$ è misurabile se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ che contiene A e tale che* [13]

$$\mu^*(\Omega \setminus A) < \varepsilon.$$

Esempio 4.34. *I seguenti tipi di insieme sono misurabili.*

(1) Ogni insieme aperto $A \subset \mathbb{R}^n$. Basta scegliere $\Omega = A$ stesso.

(2) Ogni prodotto cartesiano di intervalli. Visto il caso di $A = [0, \lambda] \times [0, \mu]$. Basta scegliere un aperto del tipo $\Omega =]-\varepsilon, \lambda + \varepsilon[\times]-\varepsilon, \mu + \varepsilon[$ e stimare con argomenti elementari la misura esterna della differenza.

(3) Ogni insieme di misura esterna nulla. Non riportiamo la verifica.

In generale è estremamente difficile "costruire" esempi di insiemi che siano non misurabili in $\mathbb{R}^d$ secondo la Definizione 4.33 (un esempio è descritto in `http://en.wikipedia.org/wiki/Vitali_set`)

Diamo ora l'enunciato del risultato di base fondamentale sugli insiemi misurabili e sulla misura di Lebesgue nello spazio euclideo.

Teorema 4.35. *Sia μ^* la misura esterna in $\mathbb{R}^d$ e sia $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ la famiglia dei sottionsiemi misurabili di $\mathbb{R}^d$. Allora $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ è una σ-algebra. Inoltre, se poniamo $\mu(A) := \mu^*(A)$ per ogni $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$, la funzione $\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$ è una misura e si chiama* misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^d$.

Non discutiamo la dimostrazione di questo risultato. A volte scriveremo $d\mu_d(x)$, altre volte $d\mu(x)$ oppure piú brevemente dx per indicare la misura di Lebesgue d-dimensionale in $\mathbb{R}^d$.

Osservazione 4.36 (Proprietà addizionali degli insiemi misurabili e della misura di Lebsegue)**.** *Ripetiamo le prorietà menzionate in precedenza.*

- *Gli aperti sono misurabili.* [14]
- *Gli insiemi di misura esterna nulla sono misurabili. (Proprietà di completezza della misura di Lebesgue).*
- *Per ogni scatola $S \subset \mathbb{R}^d$, vale $\mu(S) = \mathrm{mis}(S)$. Cioè la misura di Lebesgue di una scatola coincide con la misura elementare.*

[13] Una definizione di misurabilità che è utilizzata in molti testi e che produce in $\mathbb{R}^d$ la scessa classe di insiemi misurabili è la seguente: $A \subset \mathbb{R}^d$ è misurabile se per ogni insieme $E \subset \mathbb{R}^d$ risulta

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c).$$

Non utilizzeremo qui tale definizione.

[14] Questo assicura ad esempio che la σ-algebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ contiene la σ-algebra degli insiemi Boreliani.

4.7. Funzioni misurabili e integrale

Indichiamo con $\mathcal{L} = \mathcal{L}(R^d)$ la σ-algebra degli insiemi misurabili e con μ la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^d$. Ora, lavorando in $\mathbb{R}^d$ con la σ-algebra $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ definiamo le funzioni misurabili.

Definizione 4.37 (funzione misurabile)**.** *Una funzione $f : A \to [-\infty, +\infty]$ si dice misurabile se per ogni $c \in [-\infty, +\infty]$, l'insieme $f^{-1}(]c, +\infty])$ risulta misurabile.*

Proposizione 4.38. *Se $f : A \to [-\infty, +\infty]$, le seguenti condizioni sono equivalenti.*
(a) $f^{-1}(]c, +\infty])$ è misurabile per ogni $c \in [-\infty, +\infty]$;
(b) $f^{-1}([c, +\infty])$ è misurabile per ogni $c \in [-\infty, +\infty]$;
(c) $f^{-1}([-\infty, c])$ è misurabile per ogni $c \in [-\infty, +\infty]$;
(d) $f^{-1}([-\infty, c[)$ è misurabile per ogni $c \in [-\infty, +\infty]$;
(e) $f^{-1}(\Omega)$ è misurabile per ogni Ω aperto di $\mathbb{R}$.

Notazione. *L'insieme $[-\infty, +\infty]$ dei* numeri reali estesi *si indica a volte con $\overline{\mathbb{R}}$*

Dimostrazione. L'equivalenza tra (a) e (c) si vede osservando che $f^{-1}(]c, +\infty])$ è il complementare di $f^{-1}([-\infty, c])$. Ricordare la definizione di σ-algebra.

Per mostrare che (a) implica (b), basta scrivere (supponiamo per semplicità che c sia un numero finito)

$$f^{-1}([c, +\infty]) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(]c - 1/n, +\infty])$$

come intersezione numerabile di insiemi misurabili. Le altre equivalenze, sino alla (d) si provano in modo analogo. Non discutiamo invece la condizione (e). ☐

Definizione 4.39 (funzione caratteristica)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}^d$. La funzione $\mathbb{1}_A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in A \\ 0 & se\ x \in \mathbb{R}^d \setminus A \end{cases}$$

si chiama funzione caratteristica *o* indicatore *dell'insieme A.*

Esempio 4.40. *Le funzioni continue $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Usare l'Osservazione 3.30 e il fatto che gli aperti sono misurabili. Però la classe delle funzioni misurabili è molto piú ampia di quella delle funzioni continue. Ad esempio, ogni funzione caratteristica $\mathbb{1}_E$ di un insieme misurabile è misurabile.*

Definizione 4.41 (funzione semplice)**.** *Una funzione semplice è una funzione misurabile $s : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ che assume un numero finito di valori reali. In altre parole $s : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è semplice se $s(A) = \{c_1, \dots, c_p\}$ per opportuni numeri $c_1, \dots, c_p$.*

Osservazione 4.42. *Se $s : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è semplice secondo la definizione appena data e se indichiamo con $\{c_1, \dots, c_p\}$ i p diversi valori da essa assunti, ponendo $A_k = s^{-1}(\{c_k\})$ per $k = 1, \dots, p$, allora gli insiemi $A_1, \dots, A_p \subset \mathbb{R}^d$ sono disgiunti e misurabili, la loro unione copre $\mathbb{R}^d$ e abbiamo la rappresentazione*

$$s(x) = \sum_{k=1}^{p} c_k \mathbb{1}_{A_k}(x). \tag{4.5}$$

Esempio 4.43. *Alla luce dell'esempio precedente, la funzione caratteristica dei razionali,*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}} + 0 \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$$

è semplice e misurabile, perché $\mathbb{Q}$ è misurabile. Si può provare che tale funzione non è continua in nessun punto. D'altra parte, però, la funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, identicamente nulla differisce da f solo in punti dell'insieme $\mathbb{Q}$, che ha misura esterna nulla. Vedremo che, dal punto di vista della teoria dell'integrale, le funzioni f e g si comportano in modo analogo.

DIamo la seguente definizione:

Definizione 4.44 (Quasi ovunque)**.** *Se A è misurabile, si dice che una proprietà vale* quasi ovunque *o* quasi dappertutto *in A se se esiste un insieme di misura nulla $N \subset A$ tale che la proprietà vale per ogni punto di $A \setminus N$.*

Esempio 4.45. *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = 1_{\mathbb{Q}}$ è nulla quasi ovunque, perche' l'insieme $\mathbb{Q}$ ha misura nulla.*

Definizione 4.46 (integrale di funzioni semplici)**.** *Data $s : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ semplice, $s = \sum_{k=1}^{p} c_k \mathbb{1}_{A_k}$, con $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ insiemi disgiunti e misurabili. Se $E \subset \mathbb{R}^d$, poniamo*[15]

$$\int_E s d\mu = \sum_{k=1}^{p} c_k \mu(E \cap A_k). \tag{13}$$

Se capita che $\mu(A_k) = +\infty$ e $c_k = 0$, allora si usa la convenzione $0 \cdot \infty = 0$.

Attraverso le funzioni semplici, possiamo definire l'integrale di una funzione $f : A \to \mathbb{R}$, misurabile e non negativa:

Definizione 4.47 (integrale di $f \geq 0$)**.** *Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile e sia $f : A \to [0, +\infty]$, misurabile. Allora poniamo*

$$\int_A f := \sup \Big\{ \int_A s \mid \text{ s misurabile, semplice e tale che } 0 \leq s \leq f \text{ in } A. \Big\}$$

È immediato osservare che $\int_A f d\mu \in [0, +\infty]$. La scrittura $0 \leq s \leq f$ in A è un'abbreviazione di $0 \leq s(x) \leq f(x)$ per ogni $x \in A$. La scrittura $\int_A f d\mu$ è la versione sintetica di $\int_A f(x) d\mu(x)$.

Elenchiamo ora (senza dimostrazione) alcune proprietà dell'integrale.

(a) Se $A \subset \mathbb{R}^d$ è misurabile e se f, g sono misurabili su A con $0 \leq f \leq g$, allora

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu.$$

(b) Se $A \subseteq B \subset \mathbb{R}^d$ con entrambi A, B misurabili e se f è misurabile non negativa su B, allora

$$\int_A f d\mu \leq \int_B f d\mu.$$

(c) Se f è misurabile e non negativa su A, allora se $\lambda \geq 0$ è misurabile vale

$$\int_A \lambda f d\mu = \lambda \int_A f d\mu.$$

(d) Infine, se $f, g \geq 0$ sono misurabili su A, allora vale

$$\int_A (f + g) d\mu = \int_A f d\mu + \int_A g d\mu.$$

Le proprietà (a), (b), e (c) appena elencate si possono verificare per esercizio usando la definizione. L'uguaglianza nel punto (d), nonostante l'aspetto innocente, non è immediata.

Verifichiamo nella seguente proposizione che funzioni uguali quasi ovunque hanno lo stesso integrale.

[15] Osserviamo che la scrittura di una funzione semplice nelle forma $s = \sum_k c_k \mathbb{1}_{A_k}$ non è univoca. Ad esempio, se E_1 ed E_2 sono misurabili disgiunti e poniamo $E = E_1 \cup E_2$, abbiamo tre scritture per la stessa funzione

$$\mathbb{1}_E = \mathbb{1}_{E_1} + \mathbb{1}_{E_2} = \mathbb{1}_E + 0 \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus E}.$$

Non è difficile però verificare che l'integrale $\int_E s d\mu$ produce sempre lo stesso risultato, comunque venga rappresentata s.

Proposizione 4.48. *Siano f, g funzioni misurabili e non negative su un insieme misurabile A. Se $f = g$ quasi dappertutto, allora*

$$\int_A f = \int_A g.$$

Dimostrazione. Supponiamo per iniziare che $\int_A f d\mu < \infty$. Allora, per la proprietà di approssimazione dell'estremo superiore, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione semplice $s = \sum_k c_k \mathbb{1}_{A_k}$, (con $(A_k)_k$ famiglia finita disgiunta di insiemi misurabili la cui unione è A) per cui

$$\int_A f d\mu - \varepsilon < \int_A s d\mu = \sum_k c_k \mu(A_k).$$

Ora ricordiamo che possiamo decomporre $A = E \cup N$, con $\mu(N) = 0$ e unione disgiunta. Allora

$$\begin{aligned}\sum_k c_k \mu(A_k) &= \sum_k c_k(\mu(A_k \cap E) + \mu(A_k \cap N)) = \sum_k c_k \mu(A_k \cap E) \\ &= \sum_k c_k \mu(A_k \cap E) + 0\mu(N) = (*).\end{aligned}$$

Abbiamo usato il fatto che N ha misura nulla e quindi ogni $N \cap A_k$ ha misura nulla per ogni k. Ma la quantità $(*)$ non è altro che l'integrale della funzione semplice misurabile

$$\widetilde{s} := \sum_k c_k \mathbb{1}_{A_k \cap E} + 0\mathbb{1}_N.$$

Notiamo anche che la funzione $\widetilde{s}$ soddisfa $0 \leq \widetilde{s}(x) \leq g(x)$. Questo è vero perché nei punti di E vale $g = f$, mentre nei punti di N abbiamo $\widetilde{s}(x) = 0 \leq g(x)$, essendo g non negativa. Quindi, per definizione di integrale, risulta

$$(*) = \int_A \widetilde{s} d\mu \leq \int_A g d\mu.$$

Abbiamo in definitiva provato che $\int_A f d\mu - \varepsilon \leq \int_A g d\mu$. Poiché la disuguaglianza vale per $\varepsilon > 0$ arbitrario, possiamo concludere che

$$\int_A f d\mu \leq \int_A g d\mu. \tag{4.6}$$

Con un ragionamento analogo (usando la proprietà opportuna di approssimazione per l'estremo superiore, qualora esso sia $+\infty$), si prova che se $\int_A f d\mu = +\infty$, allora anche $\int_A g d\mu = +\infty$.

Ripetendo tutto il ragionamento scambiando i ruoli di f e g si ottiene la disuguaglianza opposta a (4.6) e, in definitiva, l'uguaglianza tra i due integrali. $\square$

Esempio 4.49 (Misura con densità $f \geq 0$)**.** *Se $f \geq 0$ è misurabile in $E \subset \mathbb{R}^d$, allora si può costruire una misura nel modo seguente*

$$\nu(A) := \int_A f(x) dx \quad \forall\, A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d), \quad A \subseteq E.$$

Supponiamo ad esempio che $\int_E f d\mu$ sia finito. Si può dimostrare che ν è una misura. Un'istanza particolarmente interessante è quella in cui

$$\nu(E) = \int_E f(x) d\mu(x) = 1.$$

In tal caso la misura ottenuta si chiama misura di probabilità con densità f. *Ad esempio, la funzione*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

è la densità della misura gaussiana su $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.

Ora passiamo alla definizione di integrale per funzioni con segno variabile. L'idea è quella di "dividere" la funzione in una parte negativa e una parte positiva.

Definizione 4.50 (Parte positiva e negativa)**.** *Sia* $f : A \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ *una funzione a valori estesi. Definiamo due nuove funzioni* $f^+ : A \to [0, +\infty]$ *e* $f^- : A \to [0, +\infty]$ *ponendo per ogni* $x \in A$,

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} = \begin{cases} f(x) & \textit{se } f(x) \geq 0; \\ 0 & \textit{se } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

$$f^+(x) = -\min\{f(x), 0\} = \begin{cases} 0 & \textit{se } f(x) \geq 0; \\ -f(x) & \textit{se } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

In questa definizione conveniamo di porre all'occorrenza $\max\{+\infty, 0\} = +\infty$ *e* $\min\{-\infty, 0\} = -\infty$.

È immediato verificare che vale:

$$f = f^+ - f^- \qquad \text{e} \qquad |f| = f^+ + f^-, \tag{4.7}$$

Si dimostra che se f è misurabile, allora f^+, f^- e $|f|$ sono tutte funzioni misurabili e non negative. Il loro integrale è dunque ben definito. Per evitare forme di tipo $+\infty - \infty$ ha senso definire l'integrale di f soltanto nel caso in cui almeno una due funzioni f^+ e f^- abbia integrale finito. Normalmente, ciò che si fa è definire l'integrale nel caso in cui entrambe f^+ e f^- abbiano integrale finito.

Definizione 4.51 (funzione integrabile)**.** *Sia* $A \subset \mathbb{R}^d$ *misurabile. Sia* $f : A \to [-\infty, +\infty]$ *una funzione misurabile. Si dice che* f *è integrabile su* A *(oppure* f *ha integrale finito su* A*, oppure* f *è assolutamente integrabile su* A*, oppure,* f *è sommabile su* A*) se*

$$\int_A |f| d\mu = \int_A f^+ d\mu + \int_A f^- d\mu < +\infty$$

Definizione 4.52 (Integrale di funzioni con segno variabile)**.** *Sia* $A \subset \mathbb{R}^d$ *un insieme misurabile. Sia* $f = f^+ - f^- : A \to [-\infty, +\infty]$*. Supponiamo che* f *sia integrabile su* A*. Allora definiamo*

$$\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^{\cdot} \tag{4.8}$$

Osserviamo che poiché abbiamo richiesto che f sia integrabile su A, l'integrale $\int_A f$ è un numero reale *finito*. È facile anche verificare usando (4.8) che vale la disuguaglianza triangolare

$$\Big| \int_A f(x) d\mu(x) \Big| \leq \int_A |f(x)| d\mu(x) \quad \text{per ogni } f \text{ integrabile su } A.$$

Linguaggio. *Si scrive usualmente*

$$\|f\|_{L^1(A)} = \int_A |f| d\mu.$$

e si scrive $f \in L^1(A)$ *per dire che* f *è integrabile (integrale finito) su* A.

Osservazione 4.53. *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è continua, oppure integrabile nel senso dell'integrale di Riemann, allora il suo integrale coincide con l'integrale studiato nei corsi elementari. In particolare, se conosciamo una primitiva* F *di* f*, allora risulta*

$$\int_a^b f(x) d\mu(x) = F(b) - F(a).$$

L'integrale di Lebesgue permette però di integrare anche funzioni per le quali l'integrale "elementare" costruito tramite le somme di Riemann non è ben definito. Ad esempio, la funzione di Dirichlet $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ è integrabile secondo la teoria di Lebesgue e vale

$$\int_a^b \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x) d\mu(x) = \int_a^b 0 dx = 0,$$

perché $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} = 0$ quasi dappertutto. Tale funzione però non è integrabile secondo la teoria dell'integrale di Riemann.

4.8. Teoremi di riduzione

Esempio 4.54 (Illustrazione del Principio di Cavalieri.)**.** *Calcolo dell'area del triangolo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$. Calcolo dell'integrale della funzione $f(x, y) = x + y$ sul medesimo intervallo.*

Riportiamo per completezza l'enunciato del teorema di riduzione di Tonelli. Esso dà la formulazione rigorosa del principo di Cavalieri.

Teorema 4.55 (Teorema di Tonelli)**.** *Scriviamo $\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ e scriviamo $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Sia $A \subset \mathbb{R}^d$ un insieme misurabile, $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$. Allora, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^p$, l'insieme*

$$A_x := \{y \in \mathbb{R}^q : (x, y) \in A\}$$

è misurabile in $\mathbb{R}^q$, la funzione $x \mapsto \mu_q(A_x)$ è misurabile e risulta

$$\mu_d(A) = \int_{\mathbb{R}^p} d\mu_p(x) \mu_q(A_x) \tag{4.9}$$

Sia poi $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$, misurabile e non negativa. Allora, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^p$ la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è misurabile in $\mathbb{R}^q$. Inoltre la funzione $x \mapsto \int_{A_x} f(x, y) d\mu_q(y)$ è misurabile e vale

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) d\mu_d(x, y) = \int_{\mathbb{R}^p} \Big(\int_{A_x} f(x, y) d\mu_q(y) \Big) d\mu_p(x). \tag{4.10}$$

Osservazione 4.56. *Notiamo informalmente le seguenti cose.*

- *Se applichiamo il Teorema di Tonelli ad un insieme A "regolare", tutti i "quasi ovunque" scompaiono e l'uguaglianza* (4.9) *diventa il Principio di Cavalieri.*
- *Un teorema di riduzione per integrali multipli in integrali ripetuti (noto come Teorema di Fubini) vale per funzioni $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ se si sostituisce l'ipotesi di non negatività $f(x, y) \ge 0$ per ogni $(x, y) \in A$ con l'ipotesi di integrabilità*

$$\int_A |f(x, y)| d\mu_d(x, y) < \infty.$$

Nella formula (4.10), l'integrale a sinistra si chiama integrale multiplo, mentre gli integrali a destra si chiamano integrali ripetuti.

Esercizio 4.57. *Dato $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$, calcolare*

$$\int_A (1 + xy) d\mu_2(x, y).$$

5. Equazioni differenziali ordinarie

Svolto seguendo [BPS]. Esercizi modello.

$$y' = \sqrt{1+y}\sin t \quad y(0) = 1$$
$$y' \log y == \frac{\cos t}{y} \quad y(1) = 2$$
$$y' = y^2 t \quad y(0) = 0$$
$$y' = y^2 t \quad y(1) = 1$$
$$y' = (y+1)^2 t \quad y(0) = 1$$
$$y' = 2ty + t^3 \quad y(0) = 2$$
$$y' = y(2-y) \quad y(0) = 1$$
$$yy' = t + ty^2 \quad y(0) = 1$$
$$y' + y = e^t \quad y(0) = 1$$
$$y' = te^y \quad y(1) = 1$$

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{con } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.$$
$$9y'' - 6y' + y = 0 \quad \text{con } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.$$
$$y'' + 6y' + 25y = 0 \quad \text{con } y(-1) = 0 \text{ e } y'(-1) = 1.$$
$$y'' - 2y' - 3y = 0, \quad \text{con } y(1) = y_0 \text{ e } y'(1) = v_0.$$
$$y'' = y - y', \quad \text{con } y(0) = -1 \text{ e } y'(0) = 1.$$

Esercizi modello sulle equazioni del secondo ordine.

6. Lista dettagliata degli argomenti svolti

Nozione di massimo/estremo superiore di un insieme di numeri reali. Propriegtà di approssimazione per inf e sup(∗). Successioni convergenti. Esistenza del limite delle successioni monotone (∗). Serie convergenti divergenti e oscillanti. Condizione necessaria di convergenza (∗) e sua non sufficienza (∗). Serie geometrica. Criterio del confronto (∗). Prodotto scalare euclideo e sue proprietà. Norma euclidea e sue proprietà. Definizione di insieme aperto e chiuso. Proprietà di aperti e chiusi rispetto a unione e intersezione (∗). Funzioni continue. Definizione di insieme numerabile ed esempi. Definizione di σ algebre e misure su σ algebre. La misura esterna in $\mathbb{R}^d$. Definizione e proprietà (∗). Funzioni misurabili. Funzioni semplici e integrale.

7. Regole d'esame (valide per il modulo di Analisi Matematica a partire da novembre 2018)

L'esame consta di una prova scritta e di una prova orale. La prova scritta è valutata con un punteggio da zero a 23. La prova orale è facoltativa e può dare un incremento sia positivo che negativo al voto dello scritto. Il voto finale del modulo di analisi matematica sarà in trentesimi e verrà messo a media aritmetica con quella della prova di matematica finanziaria. La prova orale va sostenuta entro l'appello successivo a quello in cui è sostenuta la prova scritta.