

Analisi matematica – diario delle lezioni

Laurea magistrale LMSSFA Rimini, A. A. 19/20

31 ottobre 2019

Argomenti delle prime lezioni Prof. Boschetti

- <http://www.dm.unibo.it/~morbidel/1-FunzionidipiuVariabilieDerivate-Ver.2.0.pdf>
- <http://www.dm.unibo.it/~morbidel/2-FunzionidipiuVariabilieIntegrali-Ver.1.0.pdf>
- <http://www.dm.unibo.it/~morbidel/3-SuccessionieSerie-Ver.1.0.pdf>

Lezioni 21 e 22 ottobre 2019

Equazioni differenziali ordinarie.¹ Formula risolutiva per il problema di Cauchy relativo all'equazioni omogenee del tipo $y' = a(t)y$ e a equazioni non omogenee del tipo $y' = a(t)y + g(t)$.

Equazioni a variabili separabili.

Esercizi

Svolti in classe:

$$\begin{aligned}y' &= t^2 y & y(t_0) &= y_0 \\y' &= \sin(t) y & y(t_0) &= y_0 \\y' &= y \log t & y(1) &= 2 \\y' &= y \sin^2 t \cos t & y(0) &= y_0\end{aligned}$$

Per casa:

$$\begin{aligned}y' &= y \tan(t) & y(0) &= 0 \\y' &= t e^{-2t^2} y & y(1) &= 2 \\(t+1)y' &= t y & y(1) &= 2\end{aligned}$$

Svolti in classe:

$$\begin{aligned}y' &= y + t^2 & y(0) &= 2 \\y' &= \frac{y}{t} + t^3 & y(1) &= 2\end{aligned}$$

¹Per chi studia senza frequentare, si possono leggere queste cose sul libro Bramanti, Pagani, Salsa, Matematica. Calcolo infinitesimale e algebra lineare (Zanichelli 2004) <https://www.zanichelli.it/ricerca/prodotti/matematica-calcolo-infinitesimale-e-algebra-lineare>

Per casa:

$$y' = ty + t \quad y(0) = 2 \quad \text{già fatto per separazione variabili. Rifarlo come eq. lineare}$$

$$y' = ty - t^3 \quad y(0) = 2$$

Eq. a variabili separabili.
Esercizi svolti in classe

$$y' = ty^2 \quad y(0) = 1$$

$$y' = t^2(1 - y) \quad y(0) = 2$$

$$y' = \frac{\sin(t)}{y} \quad y(0) = 2$$

Esercizi misti da fare a casa

$$y' = \sqrt{1+y} \sin t \quad y(0) = 1$$

$$y' = y^2 t \quad y(0) = 0$$

$$y' = (y+1)^2 t \quad y(0) = 1$$

$$y' = 2ty + t^3 \quad y(0) = 2$$

$$y' = y(2-y) \quad y(0) = 1$$

$$yy' = t + ty^2 \quad y(0) = 1$$

$$y' + y = e^t \quad y(0) = 1$$

$$y' = te^y \quad y(1) = 1$$

Lezione 25 ottobre

Equazioni del secondo ordine lineari a coefficienti costanti omogenee.

Esercizi

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:

$$y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$$

$$y'' + 9y = 0, \quad y(\pi/3) = 0, \quad y'(\pi/3) = 1$$

$$y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y(\pi/4) = 0, \quad y'(\pi/4) = -1$$

$$9y'' - 6y' + y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$$

$$3y'' - 2y', \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0.$$

Scrivere per ogni $b \in \mathbb{R}$ la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' - by = 0$.
Attenzione: ci sono tre diversi casi da analizzare.

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{con } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.$$

$$9y'' - 6y' + y = 0 \quad \text{con } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.$$

$$y'' + 6y' + 25y = 0 \quad \text{con } y(-1) = 0 \text{ e } y'(-1) = 1.$$

$$y'' - 2y' - 3y = 0, \quad \text{con } y(1) = y_0 \text{ e } y'(1) = v_0.$$

$$y'' = y - y', \quad \text{con } y(0) = -1 \text{ e } y'(0) = 1.$$

Lezioni del 28, 29, 30 ottobre

Definizioni di base di σ -algebra, misura su una σ -algebra, funzione misurabile e integrale di una funzione.

Esercizi modello “da compito”

Gli esercizi saranno modellati sugli esempi svolti con la tutor. Alcuni modelli potrebbero essere simili ai seguenti:

1. Individuare i punti critici di

$$f(x, y) = xy^2 - 2x^2 - 2y^2 + 4.$$

Calcolare di ciascuno la matrice hessiana e classificare quelli tra essi che hanno matrice hessiana non singolare. *[Nota. Se all'esame capita un punto critico con matrice Hessiana singolare, la classificazione di tale punto non è richiesta]*

2. Risolvere le equazioni differenziali

$$y' = -\frac{2t}{1+t^2} y + \frac{1}{t}, \quad y(1) = 2$$

$$y' = t\sqrt{1+2y} \quad y(1) = -1.$$

3. Calcolare l'integrale

$$\int_A xy \, dx dy$$

dove $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \text{ e } x^2 < y < 1 - 2x^4\}$.

Lista degli argomenti di teoria

Dove non scritto le dimostrazioni non sono richieste.

- Definizione di successione convergente, divergente a $\pm\infty$
- Teorema di unicità del limite e del confronto (con relative dimostrazioni).
- Definizione di serie numerica convergente, divergente e oscillante
- Condizione necessaria di convergenza
- Conoscenza degli esempi della serie geometrica e della serie armonica.
- Massimo, minimo, estremo superiore e inferiore di un insieme
- Funzioni iniettive, suriettive e biiettive
- Definizione ed esempi di insiemi numerabili
- Definizione di σ -algebra $\mathcal{A}$ su un insieme X .
- Definizione di misura μ su una σ -algebra.
- Definizione di funzione misurabile $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$ in uno spazio misurabile $(X, \mathcal{A})$.
- Funzioni caratteristiche e funzioni semplici in $(X, \mathcal{A})$.
- Integrale di una funzione semplice e integrale di una funzione misurabile non negativa.

Prova d'esame

La prova d'esame del modulo di Analisi matematica è solo scritta. Conterrà qualche esercizio e qualche domanda sulle parti di teoria. La parte di esercizi sarà preponderante. Il risultato sarà in trentesimi e andrà in media con il risultato del modulo di matematica finanziaria.