Matematica: I Modulo. Appunti

21 gennaio 2006

Questi appunti sono un riassunto schematico degli argomenti discussi in classe.

1 4 ottobre 2005

Richiamiamo gli insiemi numerici che utilizzeremo durante il corso. Chiamiamo *numeri naturali* i numeri correntemente usati per contare. Si denotano col simbolo $\mathbb{N}$. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

L'insieme dei *numeri reali* si denota col simbolo $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \left\{1, 0, -\frac{3}{4}, \pi, -\sqrt{2}, 1.987, \dots\right\}.$$

Simbolo di somma. Il simbolo di sommatoria si utilizza per rappresentare in modo sintetico la somma di più numeri. Ad esempio, consideriamo i numeri a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. La loro somma si può scrivere col simbolo $\sum_{k=1}^{5} a_k$ ovvero

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Se si vuole rappresentare la somma di n numeri $a_1, a_2 \dots a_n$ scriveremo

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Ancora un esempio: vale $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^n$.

Si verifica facilmente che valgono le seguenti proprietà , dette *proprietà di linearità* : dati $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n$ ed $\alpha \in \mathbb{R}$, vale

- $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$;
- $\sum_{k=1}^{n} \alpha\, a_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k$.

1.1 Fattoriale e coefficienti binomiali

Definizione 1.1 *Definiamo il fattoriale di un numero naturale:*

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\dots\cdot 2\cdot 1, \ \textit{se } n\in\mathbb{N},$$
$$0! = 1.$$

Siano ora n e k due qualunque numeri naturali tali che $k \leq n$. Chiamiamo *"coefficiente binomiale di n e k"*, e si legge *"n su k"* il numero

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si può riconoscere che il numero $\binom{n}{k}$ rappresenta il numero di sottoinsiemi di k elementi in un insieme di n elementi.

Si verifica subito con la definizione che $\binom{n}{0} = 1$ ed $\binom{n}{1} = n$ Altre due proprieta' del coefficiente binomiale sono

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $0 \leq k \leq n$,
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, $0 \leq k+1 \leq n$.

1.2 Formula per la potenza di un binomio

Teorema 1.2 *Dati $a, b \in \mathbb{R}$ ed $n \in \mathbb{N}$, vale*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

2 6 ottobre 2005

Definizione 2.1 (Prodotto cartesiano) *Se A e B sono due insiemi, il prodotto cartesiano tra A e B si indica con $A \times B$ ed e' definito come*

$$A \times B := \{(a,b) : a \in A \ \text{e} \ b \in B\}.$$

Itroduciamo ora l'idea intuitiva di funzione.

Dati A e B insiemi. Si chiama *funzione da A a B* una *legge* f che associa *ad ogni* elemento di A *uno ed un solo* elemento di B. L'insieme A è detto *dominio* della funzione. Prendiamo un elemento $a \in A$; l'elemento corrispondente ad a tramite la funzione f si denota con $f(a)$ e si legge *"f di a* .

Nell'introdurre una funzione f da A a B si usa la notazione sintetica

$$f : A \longrightarrow B,$$

L'insieme di tutti i valori assunti da f al variare di $a \in A$ si chiama *immagine di f.*

Definizione 2.2 (Grafico di una funzione) *Sia $f : A \to B$. Il grafico di una funzione è il seguente sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.*

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

Esempio 2.3 (Funzione identità) *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni $x \in \mathbb{R}$ x stesso si chiama funzione identità.*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$$

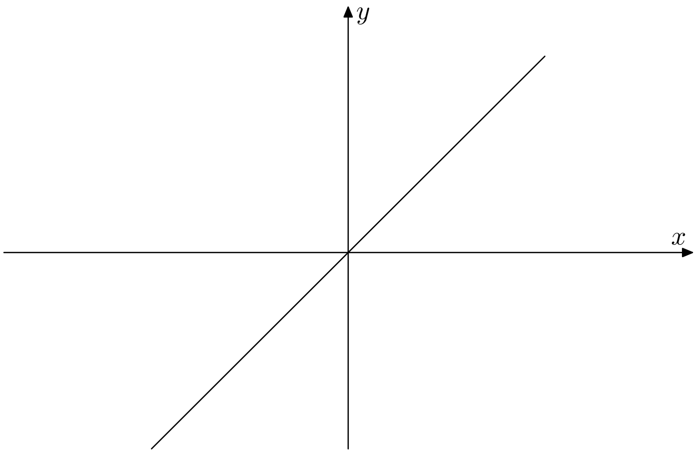

Figura 1: Grafico dela funzione identità.

Esempio 2.4 (Funzione costante) *Dato un numero $k \in \mathbb{R}$, poniamo*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = k.$$

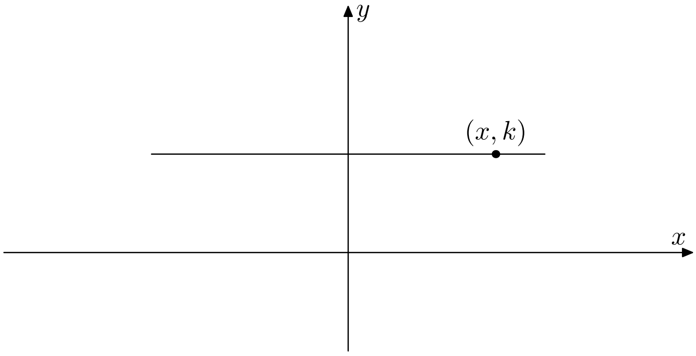

Figura 2: Grafico di una funzione costante $f(x) = k$.

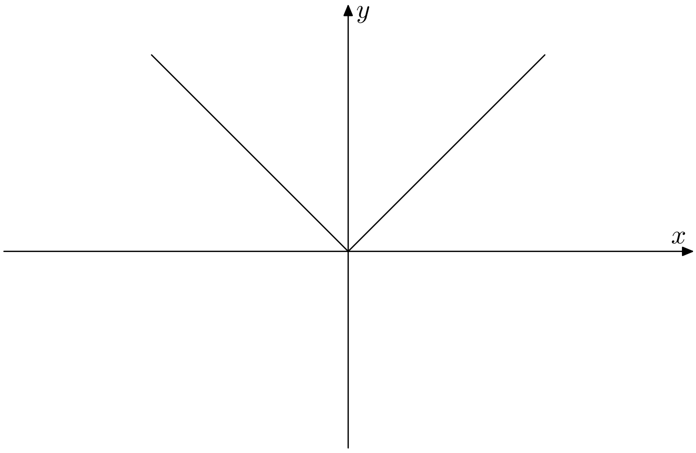

Figura 3: La funzione valore assoluto .

Esempio 2.5 (Funzione valore assoluto) *E' la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x & se\ x \geq 0, \\ -x & se\ x \leq 0. \end{cases}$$

Esempio 2.6 (Funzioni affini) *Sono funzioni del tipo*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = mx + q$$

dove m *e* q *rappresentano delle costanti fissate. Il grafico di questa funzione è una retta.* m *e* q *hanno un significato particolare:* m *è detto coefficiente angolare e misura la pendenza della retta, e* q *si chiama ordinata all'origine e rappresenta il punto in cui la retta taglia l'asse delle ordinate.*

Esercizio. Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si definisca $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + 1$. Che legame c'e' tra i grafici di f e g? Si definisca poi $h(x) = f(x + 1)$. Che legame c'e' tra i grafici di f ed h?

3 11 ottobre 2005

Esercizio. Data la funzione $f : A \to \mathbb{R}$, come sono legati il grafico di f e quello di $g : A \to \mathbb{R}$, $g(x) = -f(x)$?

Esempio 3.1 *Funzioni potenza a esponente naturale Sono le funzioni* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, *dove* $n \in \mathbb{N}$ *e' un assegnato numero naturale.*

Definizione 3.2 (Funzioni pari e dispari) *Una funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si dice pari se vale* $f(x) = f(-x)$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$. f *si dice dispari se* $f(x) = -f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che una funzione pari ha grafico simmetrico rispetto all'asse y; una funzione dispari ha grafio simmetrico rispetto all'origine.

Esercizio. Verificare che le funzioni potenza ad esponente pari (dispari) sono pari (dispari).

Esempio 3.3 (Funzione radice quadrata) *E' la funzione* $f : [0, +\infty[\, \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

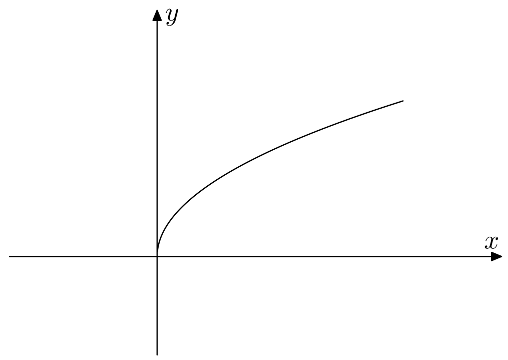

Figura 4: FUnzione radice quadrata.

Definizione 3.4 (Funzione monotóna) *Una funzione* $f : A \to \mathbb{R}$ *si dice*

- *monotona crescente strettamente su un intervallo* $I \subset A$ *se*

$$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) < f(x_2);$$

- *monotona decrescente strettamente su un intervallo* $I \subset A$ *se*

$$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) > f(x_2).$$

Si puo' dare la definizione di funzione crescente debolmente, sostituendo la disuguaglianza stretta $f(x_1) < f(x_2)$ con quella debole $f(x_1) \leq f(x_2)$. Lo stesso si puo' fare per la nozione di funzione decrescente debolmente.

Esercizio. Verificare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ e' crescente strettamente su $[0, +\infty]$. Verificare inoltre che la funzione radice quadrata e' crescente strettamente.

Esercizio. Verificare che se due funzioni f e g sono crescenti strettamente su un intervallo I, allora
(i) $f + g$ e' cresente strettamente su I;
(ii) $-f$ e' decrescente strettamente su I.

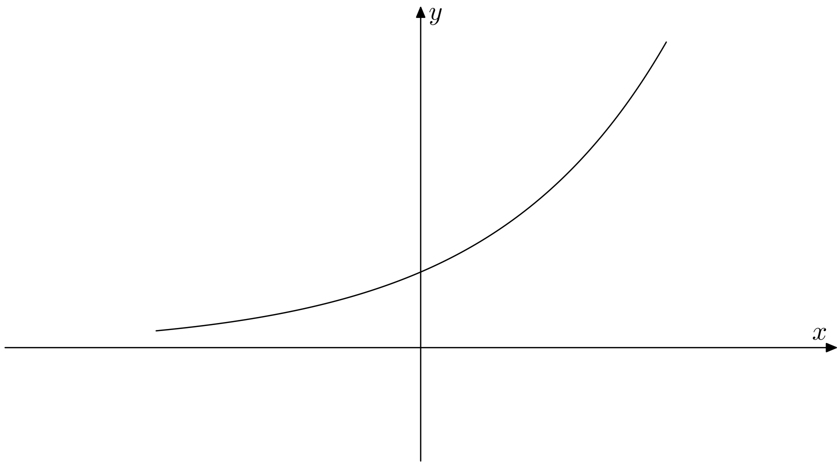

Figura 5: La funzione esponenziale.

4 13 ottobre 2005

Esempio 4.1 (La funzione esponenziale) *E' la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, *dove e e' il numero di Nepero.*

Osserviamo che $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre vale $e^x > 1$ ($e^x < 1$) se e solo se $x > 0$ ($x < 0$).

La funzione esponenziale ha le seguenti due proprieta' salienti

$$\begin{aligned} e^{x_1+x_2} &= e^{x_1}e^{x_2} \\ (e^{x_1})^{x_2} &= e^{x_1x_2} \end{aligned} \tag{1}$$

Utilizzando il fatto che che $e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$ e la proprieta' (1), si puo' riconoscere che la funzione esponenziale e' monotona crescente strettamente. Infatti, dati $x_1 < x_2$ numeri reali, scritto per comodita' $x_2 = x_1 + h$, con h positivo, troviamo, grazie a (1),

$$e^{x_1} < e^{x_1+h} \quad \Leftrightarrow 1 < e^h.$$

Esempio 4.2 (La funzione logaritmo) *E' la funzione* $\log :]0, +\infty[$ *che ad ogni* $x > 0$ *associa il suo logaritmo naturale.* [1] *Quindi*

$$e^{\log x} = x \quad \forall x > 0.$$

Osserviamo che $\log x > 0$ se e solo se $x > 1$ e $\log x > 0$ se e solo se $0 < x < 1$. Il logaritmo e' una funzione strettamente crescente su $0 < x < \infty$.

[1] Ricordiamo che il logaritmo naturale di un numero $x > 0$ e' l'unico numero $y \in \mathbb{R}$ tale che $e^y = x$.

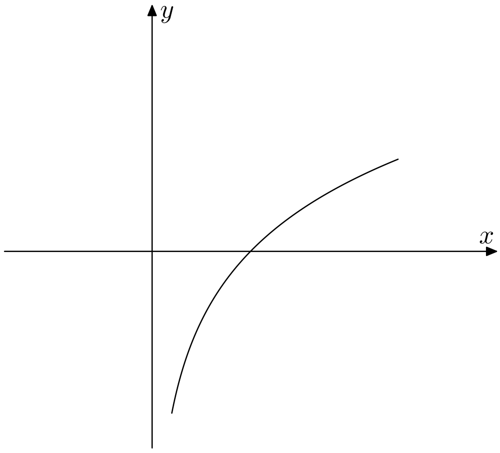

Figura 6: La funzione logaritmo.

Esercizio 4.3 *1) Convincersi del fatto che* $\log(e^x) = x$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

2) Verificare usando le proprieta' salienti dell'esponenziale (1) *che valgono le proprieta' corrispondenti per il logaritmo*

$$\begin{aligned} &\log(x_1 x_2) = \log(x_1) + \log(x_2), \\ &\log x_1^\alpha = \alpha \log x_1, \quad x_1, x_2 > 0, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Disequazioni con esponenziale e logaritmo. Usando le proprieta' di esponenziale e logaritmo si deduce che

$$e^a < b \quad \Leftrightarrow a < \log b, \quad \forall a \in \mathbb{R}, b > 0.$$

Esercizio 4.4 *Utilizzando l'ultima formula risolvere le disequazioni seguenti*

$$e^x < e, \quad e^{x^2} < 2, \quad e^{x+5} > 7$$

$$\log(1 + x^2) < 5, \quad 2^x < 3, \quad 2^x > 3^{x^2}$$

Esempio 4.5 (Funzioni circolari) *Grafico e proprieta' elementari di seno e coseno*

Definizione 4.6 (Funzione composta) *Date due funzioni* $f : A \to B$, $g : B \to C$, *definiamo la funzione composta* $g \circ f$ *come segue*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Esercizio 4.7 *Date le funzioni* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = sin(x)$, *scrivere le funzioni* $g \circ f$ *e* $f \circ g$.

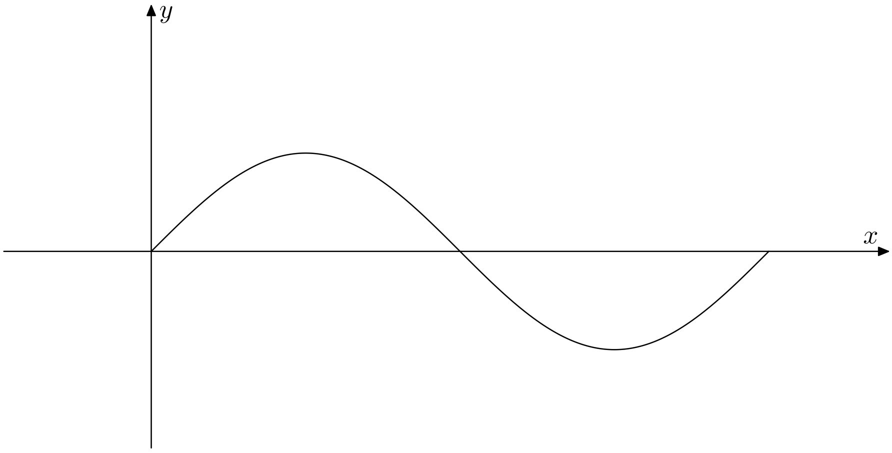

Figura 7: Grafico della funzione seno, su $[0, 2\pi]$.

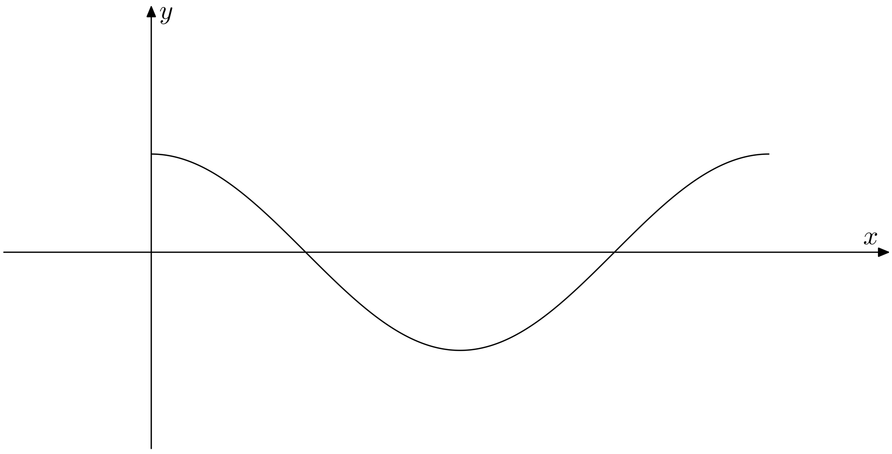

Figura 8: Grafico della funzione coseno, su $[0, 2\pi]$.

5 18 ott 2005

La nozione di limite serve a studiare il comportamento di una funzione nelle vicinanze di un punto.

Definizione 5.1 *Siano $a < b < c$ tre numeri reali e sia f una funzione definita sull'unione dei due intervalli $]a, c[$ e $]c, b[$* [2] *Sia L un numero reale. Si dice che il limite di $f(x)$ per x che tende a c e' L se per ogni numero $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta_\varepsilon > 0$* [3] *tale che*

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \quad \textit{per ogni } x \neq c, \ |x - c| < \delta_\varepsilon. \tag{3}$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

[2] Cioe' nell' intervallo $]a, b[$ privato del punto c.

[3] La ε al piede indica che il numero δ_ε dipende da ε, oltre che dalla funzione f e da c.

Esempio 5.2 *Verifichiamo che* $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. *Qui* $c = L = 0$. *Poiche'* $|x^2 - L| = |x^2 - 0| < \varepsilon$ *se e solo se* $|x - c| = |x| < \sqrt{\varepsilon}$, *basta scegliere* $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$ *e l'affermazione* (3) *e' verificata.*

Verificare per esercizio che $\lim_{x\to 0} e^{x^2} = 1$.

Esempio 5.3 *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e' definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \textit{per } x \neq 0, \\ 0 & \textit{se } x = 0, \end{cases}$$

allora, usando la definizione di limite si vede subito che $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$. *Il valore della funzione nel punto* $c = 0$ *e' irrilevante.*

Osservazione 5.4 *Il limite di una funzione* f *e' unico. Precisamente, se* $\lim_{x\to c} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to c} f(x) = M$, *allora non puo' che essere* $L = M$.

Esempio 5.5 (funzione gradino) *Poniamo* $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & \textit{per } x < 0, \\ 1 & \textit{se } x \geq 0, \end{cases}$$

allora, si puo' vedere che non c'e' nessun numero L *per il quale si verifichi* $\lim_{x\to 0} f(x) = L$. *In tal caso si dice che il limite non esiste.*

Definizione 5.6 (Limiti da destra e da sinistra) *Si dice che il limite di* $f(x)$ *per* x *che tende a* c *da destra e'* L *se* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *tale che*

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \quad \textit{per ogni } x \textit{ con } c < x < c + \delta_\varepsilon.$$

Si scrive $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = L$. *La definizione di limite da sinistra è analoga:* $\lim\limits_{x\to c-} f(x) = L$ *se* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0$ *tale che*

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \quad \textit{per ogni } x \textit{ con } c - \delta < x < c.$$

Ad esempio, la funzione gradino θ soddisfa $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$.

Si possono provare, a partire dalla definizione, le seguenti proprieta' dei limiti: se $\lim_{x\to c} f(x) = L$ e $\lim_{x\to c} g(x) = M$, $L, M \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M, \quad \lim_{x\to c} f(x)g(x) = LM \quad \text{e}$$
$$\text{se } M \neq 0,\ \lim_{x\to c} f(x)/g(x) = L/M.$$

Definizione 5.7 (Funzione continua) *Sia* $f : A \to \mathbb{R}$, *con* A *intervallo.* f *si dice continua in* $c \in A$, *se* $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. *Se* f *e' continua in ogni punto di* A, *si dice che* f *e' continua in* A.

Osserviamo che le funzioni degli Esempi 5.5 e 5.3 non sono continue in zero.

Si puo' provare che:

- le funzioni elementari, potenze, esponenziali, logaritmi, seno, coseno, ... sono continue nei loro dominî naturali;
- la composizione di funzioni continue e' continua.

Questi fatti permettono di calcolare a vista molti limiti. Esempio

$$\lim_{x\to 0}\left(x + e^x + \frac{\cos x}{x+1}\right) = 0 + 1 + \frac{e}{2}.$$

Esercizio 5.8 *Provare, usando la definizione di limite, che se* $\lim_{x\to c} f(x) = L$ *e* $L > 0$, *allora esiste un numero positivo* δ *tale che* $f(x) > 0$ *per tutti gli* $x \neq c$, $|x - c| < \delta$.

6 20 ott 2005

La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ assume valori “molto grandi, per x vicino a zero. Questo puo' essere formalizzato dicendo che $f(x)$ tende a $+\infty$, per x che tende a zero. In termini un po' piu' rigorosi si puo' dare la seguente definizione:

Definizione 6.1 *Si dice che* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ *se per ogni* $M > 0$ *esiste* $\delta_M > 0$ [4] *tale che*

$$f(x) > M \quad \forall x \neq c, \quad |x - c| < \delta_M.$$

Si puo' verificare usando la precedente definizione, che $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = +\infty$.

Analogamente si puo' dare la definizione di $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$. Si dice che $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $\delta_M > 0$ tale che $f(x) < -M$ $\forall x \neq c$, $|x - c| < \delta_M$. Ad esempio, la funzione $f(x) = -1/x^2$ tende a $-\infty$ per $x \to 0$.

Per stabilire se una funzione tende a $+\infty$ o a $-\infty$ si usa spesso il seguente criterio. La prova è una conseguenza immediata delle definizioni date.

Teorema 6.2 (Limiti di tipo $k/0$ con $k \neq 0$) . *Se* $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to c} g(x) = k > 0$ *valgono i seguenti fatti.*

- *Se* $f(x) > 0$, *per* x *vicino a* c, [5] *allora* $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.
- *Se* $f(x) < 0$, *per* x *vicino a* c, [6] *allora* $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.

---

[4] La scelta di δ_M dipende da quella di M

[5] Cioe' f tende a zero positivamente, per $x \to c$

[6] Cioe' f tende a zero negativamente, per $x \to c$

In sintesi: se $k > 0$, allora $\frac{k}{0+} = +\infty$ e $\frac{k}{0-} = -\infty$.

Il teorema enunciato vale anche per i limiti da destra o da sinistra.

Esempio 6.3

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^3} = +\infty, \quad \lim_{x\to 2-} \frac{\log x}{x-2} = \frac{\log 2}{0-} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2 - x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2(1-x^2)} = \frac{1}{1\cdot 0+} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{0+} = +\infty, \ \textit{perche'} \cos x \to 0+, \textit{ per } x \to 0.$$

Forme indeterminate di tipo $0/0$**.** Sono limiti della forma

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{dove } \lim f(x) = \lim g(x) = 0, \text{ per } x \to c.$$

In generale il risultato di un limite in forma indeterminata necessita di uno studio ad hoc per essere stabilito. Ci sono delle “forme indeterminate standard, che sono date dal seguente teorema

Teorema 6.4 *Vale*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad e \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{5}$$

La dimostrazione di questo Teorema richiede la conoscenza di un po' di trigonometria e di qualche proprietà del numero di Nepero e.

Dal Teorema precedente, si ricava che, se $f(x) \to 0$, per $x \to c$ e $f(x) \neq 0$, per x vicino a c, allora

$$\lim_{x\to c} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c} \frac{\exp(f(x)) - 1}{f(x)} = 1.$$

Ad esempio,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1.$$

Ancora:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log 2} - 1}{x \log 2} \log 2 = \log 2.$$

Un altro limite notevole è il seguente

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Questo limite puo' essere calcolato a partire da quello con l'esponenziale $\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}=1$. Basta fare la sostituzione di variabile $\log(1+x)=t$, che equivale a $e^t-1=x$. Allora si vede che $t\to 0$ equivale a $x\to 0$ e i seguenti passaggi sono corretti (anche se qui non li giustifichiamo completamente):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1}=1.$$

Un'ultimo esempio di limite e' quando la variabile x tende a $+\infty$ o $-\infty$.

Definizione 6.5 *Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Si dice che $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$* [7] *se*

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\ K_\varepsilon\in\mathbb{R}:\ |f(x)-L|<\varepsilon\ \forall x>K_\varepsilon\ .$$

Si dice invece che $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ se per ogni $M>0$ esiste $K_M>0$ tale che $f(x)>M$ per ogni $x>K_M$.

I limiti per $x\to-\infty$ possono essere definiti con una ovvia modifica.

Esempio 6.6 *Vale $\lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty}e^x=y$*

7 27 ott 2005

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione, siano x_0 e $h\in\mathbb{R}$. I due punti $(x_0,f(x_0))$ e $(x_0+h,f(x_0+h))$ appartengono al grafico di f. La retta che li contiene ha equazione

$$y=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)+f(x_0).$$

Il numero $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ si chiama $r$apporto incrementale (di punto iniziale x_0 e incremento h). Esso e' il coefficiente angolare della retta sopra scritta.

A partire dal rapporto incrementale si definisce la derivata lasciando tendere l'incremento a zero.

Definizione 7.1 *Sia data $f:\,]a,b[\,\to\mathbb{R}$ e $x_0\in\,]a,b[$. f si dice derivabile in x_0 se esiste finito il limite $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Tale limite si chiama derivata di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$, $Df(x_0)$, $\frac{d}{dx}f(x_0)$. In sintesi*

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Esempio 7.2 *Data $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=k$, k costante, si ha per $x_0\in\mathbb{R}$*

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}=0.$$

[7] $L\in\mathbb{R}$

Esempio 7.3 *Data* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = mx + q$*,* m, q *costanti, si ha per* $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{m(x+h) + q - (mx+h)}{h} = m.$$

Terminologia. Se una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e' derivabile in ogni $x \in]a, b[$, allora la nuova funzione $x \mapsto f'(x)$ si chiama *d*erivata di f.

Esempio 7.4 *Data* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = x^2$*.*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = 2x.$$

Esempio 7.5 *Calcoliamo* $\frac{d}{dx}\sqrt{x}$*, per* $x > 0$*.*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sqrt{x} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h}{x[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Esempio 7.6 *Calcoliamo* $\frac{d}{dx}e^x$*.*

$$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} e^x = e^x,$$

grazie al limite notevole della funzione esponenziale.

8 3 novembre 2005

Definizione 8.1 *Data* f *derivabile in* x_0*, la retta di equazione* $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ *si chiama retta tangente al grafico di* f *nel punto* $(x_0, f(x_0))$*.*

Tra tutte le rette che passano per $(x_0, f(x_0))$ e' quella che meglio approssima f attorno a x_0, nel senso seguente. COnsideriamo una qualsiasi retta passante per $(x_0, f(x_0))$, che ha equazione $y = m(x - x_0) + f(x_0)$ per qualche m. Allora, preso x vicino ad x_0, e considerato il punto $P = (x, f(x))$ del grafico di f e il punto $Q = (x, m(x - x_0) + f(x_0))$ della retta. ALlora vale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\text{lunghezza del segmento } PQ}{x - x_0} = |f'(x_0) - m|.$$

La scelta $m = f'(x_0)$ e' l'unica che rende nullo quel limite.

Osservazione 8.2 *Se* f *e* g *sono derivsbili in* x*, allora la loro somma e' derivabile e vale*

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Inoltre $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$*, per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$*.*

Teorema 8.3 (Derivate prodotto e quoziente) *Se f e g sono derivaili in x, allora il loro prodotto e' derivabile in x e vale*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g(x)f'(x)$$

Inoltre, se $g(x) \neq 0$, allora

$$D\Big(\frac{f}{g}\Big)(x) = \frac{f'(x)g(x) - g(x)f'(x)}{g(x)^2}$$

La prima delle due formule si prova partendo dalla definizione di derivata.

$$\begin{aligned}(fg)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{[f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x).\end{aligned}$$

[8] La seconda si prova analogamente. □

Si possono calcolare con il teorema precedente le derivate delle funzioni

$$f(x) = \frac{x^2}{\sin x}, \quad f(x) = x\cos x, \quad f(x) = \sqrt{x}e^x, \quad f(x) = \frac{x^2+1}{\log x}.$$

Teorema 8.4 (Derivata di funzioni composte) *Se f è derivabile in x e g è derivabile in $f(x)$, allora $f\circ g$ è derivabile in x e vale*

$$(f\circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Dimostrazione. Indichiamo brevemente la dimostrazione nel caso in cui valga $g'(x) \neq 0$. In questo caso si puo' riconoscere che vale $g(x+h) - g(x) \neq 0$, per h vicino a zero. Allora

$$\begin{aligned}(f\circ g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}\,\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(g(x))g'(x),\end{aligned}$$

come si voleva. □

Esempi:

$$\frac{d}{dx}\cos(2x), \quad \frac{d}{dx}e^{x^2}, \quad \frac{d}{dx}\log(1+3x^2).$$

[8] Abbiamo usato qui il fatto che, poiche' g e' derivabile in x, allora g e' continua in x. Questo segue dal fatto che

$$g(x+h) - g(x) = \frac{g(x+h) - g(x)}{h}h \longrightarrow g'(x)\cdot 0 = 0, \qquad \text{per } h \to 0.$$

9 15 novembre 2005

Definizione 9.1 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in A$. Il punto x_0 si dice*

- di massimo (oppure di minimo) *locale se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\textit{oppure } f(x) \geq f(x_0)) \ \forall x \in A, |x - x_0| < \delta.$$

- di massimo (oppure di minimo) *assoluto se*

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\textit{oppure } f(x) \geq f(x_0)) \ \forall x \in A.$$

Il valore $f(x_0)$ assunto da f in un punto di massimo o di minimo si chiama massimo o minimo.

I massimi e minimi di funzioni derivabili possono essere studiati con l'aiuto dei seguenti teoremi.

Teorema 9.2 (di Fermat) *Se x_0 è un punto di massimo o di minimo locale o assoluto per f e se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Basta considerare il quoziente

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = R(x).$$

Supponiamo x_0 punto di massimo. Per x vicino a x_0, con $x > x_0$, risulta $R(x) \leq 0$, perchè $f(x) - f(x_0) \leq 0$ (punto di massimo) e $x - x_0 > 0$. Quindi, poiche' le disuguaglianze si conservano al limite,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} R(x) \leq 0.$$

Viceversa, se x è vicino a x_0, ma $x < x_0$, vale $R(x) \geq 0$, perchè $f(x) - f(x_0) \leq 0$ (punto di massimo) e $x - x_0 > 0$. Quindi si deduce $f'(x_0) \geq 0$.

Mettendo assieme i due casi si conclude $f'(x_0) = 0$. □

Esempio 9.3 *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, ha un punto di minimo assoluto in $x = 0$.*

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ ha in $x_0 = 0$ un punto di massimo assoluto.

Teorema 9.4 (di Rolle) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ e soddisfa $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ in cui vale*

$$f'(c) = 0.$$

Dimostrazione. Se f e' costante, allora si puo' scegliere un qualsiasi $c \in \,]a,b[$ e il teorema è provato.

Se f non e' costante, allora esiste un punto $c \in \,]a,b[$ che è di massimo o di minimo. [9] In tale punto, per il Teorema di Fermat, varra' $f'(c) = 0$. □

Una generalizzazioe del Teorema di Rolle e' il seguente

Teorema 9.5 (di Lagrange) *Se f è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, allora esiste almeno un punto $c \in \,]a,b[$ che soddisfa*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Il significato geometrico di questo teorema e' il seguente: esiste almeno un $c \in \,]a,b[$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(c, f(c))$ è parallela alla retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Dimostrazione. Consideriamo l'equazione della retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$,

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La funzione $g : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) - \Big\{ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \Big\},$$

soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle (infatti si verifica subito che $g(a) = g(b) = 0$). Quindi, il Teorema di Rolle asserisce che esiste almeno un $c \in]a,b[$ che soddisfa $g'(c) = 0$. Dunque, poiche'

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$x \in]a,b[$, sara' $g'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Un corollario del precedente Teorema e' la seguente caratterizzazione delle funzioni costanti.

Corollario 9.6 (caratterizzazione delle funzioni costanti) *f e' costante su $]a,b[$ se e solo se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \,]a,b[$.*

Dimostrazione. Supponiamo f costante. Allora $f'(x) = 0$, per definizione di derivata.

Viceversa, supponiamo che f soddisfi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \,]a,b[$. Fissiamo un qualsiasi punto $x_0 \in \,]a,b[$. Applicando il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_0, x]$, otteniamo, per un opportuno $c \in \,]x_0, x[$ [10]

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0). \tag{6}$$

Ma per ipotesi la derivata e' nulla dappertutto. Quindi $f(x) = f(x_0)$. □

[9] Qui è coinvolto un teorema non banale sulle funzioni continue: se f e' continua su $[a,b]$, allora si puo' dimostrare che f ammette massimo e minimo su $[a,b]$.

[10] O in $]x, x_0[$, se $x < x_0$.

10 17 novembre 2005

Un' altra applicazione del Teorema di Lagrange e' la seguente:

Teorema 10.1 (Caratterizzazione delle funzioni monotone debolmente) *Una funzione f derivabile in $]a,b[$ e' monotona crescente debolmente su $]a,b[$ se e solo se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a,b[$*

Dimostrazione. Se f e' crescente in $]a,b[$, allora consideriamo $x < x+h$, $x, x+h \in]a,b[$. Allora per def di funzione monotona vale $f(x+h) > f(x)$. Prendendo il quoziente,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

Viceversa, se $f'(x) \geq 0$, applicando il Teorema di Lagrange (formula (6)) nell'intervallo $[x_0, x]$, con $a > x_0 < x$ otteniamo, per un opportuno $c \in]x_0, x[$

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \geq 0,$$

perché per ipotesi $f'(c) \geq 0$. Quindi $f(x) \geq f(x_0)$. Questo argomento vale per ogni coppia $x_0 < x$ di punti nell'intervallo $]a,b[$. Quindi f e' debolmente crescente. □

Osservazione 10.2 *Ragionando allo stesso modo (con il Teorema di Lagrange), si puo' riconoscere ce parte del teorema sopra vale per le funzioni strettamente crescenti. Piu' precisamente, se f soddisfa $f'(x) > 0$* [11] *per ogni $x \in]a,b[$, allora f è strettamente crescente su $]a,b[$.*

Esempi. Dire, calcolando la derivata e studiandone il segno, in quali intervalli sono crescenti le funzioni

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = xe^x, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f(x) = e^{-x^2}, \quad f(x) = x^3 - x$$

Un ultima applicazione del Teorema di Lagrange e' la regola di de l'Hôpital. Diamo qui un enunciato in un caso particolare.

Teorema 10.3 (di de l'Hôpital perlimiti di tipo $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$) *Siano f e g due funzioni derivabili su $]a,b[$. Sia $c \in]a,b[$ tale che $f(c) = g(c) = 0$. Assumiamo che sia $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a,b[$, $x \neq c$. Allora, se il limite*

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ esiste e vale } L, \text{ è anche } \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

[11] disuguaglianza stretta.

Esempi. Verificare unando Hôpital, che

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=2.$$

Dimostrazione del Teorema 10.3. Consideriamo un punto $x>c$, $x\in\,]a,b[$. Consideriamo la funzione

$$h(t)=f(x)g(t)-f(t)g(x),\quad t\in\,]a,b[\,.$$

LA funzione h soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[c,x]$. Infatti, $h(c)=f(x)g(c)-f(c)g(x)=0$, perche' f e g sono nulle in c, mentre $h(x)=f(x)g(x)-f(x)g(x)=0$. Qiondi Il Teorema di Rolle asserisce che esiste un punto $s\in\,]c,x[$ in cui $h'(s)=0$. Allora

$$f(x)g'(s)-f'(s)g(x)=0\quad\Rightarrow\quad \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(s)}{g(s)}$$

12

Lasciando tendere $x\to c$, sarà anche $s\to c$, perche' s è compreso tra c ed x. Quindi, poiche' sappiamo che $\frac{f'(s)}{g'(s)}\to L$, per $s\to c$, avremo

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=L,$$

come si voleva. □

Delle versioni simili del Teor. di de L'Hopital valgono per limiti di tipo

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)},$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ tendono all'infinito e anche con $c=+\infty$ e $-\infty$. Ad esempio, il limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$ è una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Applicando Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty.$$

Esercizio 10.4 *Applicando un numero sufficiente di volte il Teorema di de l'Hôpital, dire quanto vale*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^{1000}}.$$

[12] Osserviamo che il Teor. di Rolle applicato alla funzione g nell'intervallo $[c,x]$, afferma che, per un opportuno $c_1\in\,]c,x[$, vale $g(x)=g(x)-g(c)=g'(c_1)(x-c)\neq 0$, se $x\in\,]a,b[$ è diverso da c. QUindi nel passaggio precedente è corretto dividere per $g(x)$.

11 22 nov 2005

Esercizio 11.1 *Calcolare i seguenti limiti.*

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}, \qquad \lim_{x\to 0+} x\log x, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2+e^{2x}}.$$

Formula di Taylor. Partiamo dal caso di una funzione f di una variabile derivabile in $\bar{x} \in \mathbb{R}$. La definizione di derivata ci dice che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}).$$

Equivalentemente

$$\lim_{h\to 0} \Big(\frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} - f'(\bar{x}) \Big) = 0, \quad \text{o anche}$$

$$\lim_{h\to 0} \Big(\frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})-f'(\bar{x})h}{h} \Big) = 0.$$

Quindi dire che una funzione e' derivabile in $\bar{x}$ equivale a dire che la quantita'

$$g(h) \equiv f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})-f'(\bar{x})h \tag{7}$$

tende a zero *piu' rapidamente* di h per $h \to 0$. Per descrivere questo fenomeno introduciamo la seguente scrittura:

Definizione 11.2 *Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di una variabile e sia $k \geq 0$, $g(0) = 0$. Si dice che $g(h)$ e' un o piccolo di h^k per $h \to 0$ se*

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h^k} = 0.$$

Si scrive $g = o(x^k)$

Ad esempio, $g(h) = h^2 = o(h)$. In fatti

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = 0.$$

Analogamente si verifica che $g(x) = x^\alpha = o(x)$ ogni volta che $\alpha > 1$.

Ancora un esempio: $g(h) = h(1-\cos h) = o(h^2)$. Infatti

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(1-\cos h)}{h^2} = (Hopital) = \lim_{h\to 0} \sin h = 0.$$

Esercizio 11.3 *Verificare che*

(1) se $g(h) = o(h^2)$, per $h \to 0$, allora $g(h) = o(h)$, per $h \to 0$.

(2) la funzione $g(h) = \sin^2 h$ soddisfa $g(h) = o(h)$, ma non soddisfa $g(h) = o(h^2)$.

Con la notazione appena introdotta possiamo scrivere in sintesi che se f e' derivabile in $\bar{x}$, allora la funzione g in (7) e' un o piccolo di h per $h \to 0$. Cioe' che

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h). \tag{8}$$

La (8) si chiama *Formula di Taylor* di f di punto iniziale $\bar{x}$. Un altro modo di scrivere la (8) è ponendo $\bar{x}+h = x$. Allora si ottiene

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + o(x-\bar{x}),. \tag{9}$$

per $x \to \bar{x}$.

Per ottenere una approssimazione migliore di quella data da (8) di una funzione f vicino a un punto x, è necessario fare una approssimazione del secondo ordine. In essa apparira' anche la derivata seconda di f, che è la derivata della derivata prima e si indica con f''.

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x).$$

Teorema 11.4 (Formula di Taylor del secondo ordine) *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte. Assumiamo che $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua. ALlora vale, per ogni $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + o(h^2). \tag{10}$$

Il polinomio $f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2}$ si chiama Polinomio di Taylor di grado 2 di f di punto iniziale x.

Esempio 11.5 *Scriviamo la formula di Taylor di $f(x) = e^x$ di punto iniziale $x = 0$. Basta calcolare $f(0) = e^0 = 1$. Poi $f'(x) = e^x$. Quindi $f'(0) = e^0 = 1$. Infine $f''(x) = e^x$ e quindi $f''(0) = e^0 = 1$ In definitiva*

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

Dimostrazione della F. di Taylor del secondo ordine. La prova del teorema usa ancora la regola di de l'Hopital. Infatti, verificare (10) significa vedere che

$$\frac{f(x+h) - [f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2}]}{h^2} \to 0,$$

per $h \to 0$. Usando Hopital otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - [f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2}]}{h^2} &\overset{H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)h - f''(x)h}{2h} \\ &\overset{H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)h}{2} = 0, \end{aligned}$$

come si voleva. □

12 24 nov 2005

Una applicazione della formula di Taylor del secondo ordine e' la seguente.

Teorema 12.1 *Se f ha derivate seconde continue in $]a,b[$ e se $x \in\,]a,b[$ e' tale che $f'(x) = 0$ e $f''(x) > 0$, allora sara' f ha un minimo in x.*

Osserviamo prima di dare una dimostrazione che il viceversa è falso. Se f ha un minimo in x, alllora non è detto che la sua derivata seconda sia positiva. Questo e' provato dalla funzione $f(x) = x^4$.

Dimostraz. Basta scrivere la formula di Taylor di punto iniziale x. Si ottiene:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + R(h) = f(x) + f''(x)\frac{h^2}{2} + R(h), \tag{11}$$

dove $R(h) = o(h^2)$. Per definizione di o piccolom dato un qualsiasi $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\left|\frac{R(h)}{h^2}\right| \leq \varepsilon, \quad \text{se } 0 < |h| < \delta_\varepsilon. \tag{12}$$

La situazione suggerisce di scegliere $\varepsilon = f'(x)/4$. Dunque (12) diventa

$$-\frac{f'(x)}{4}h^2 < R(h) < \frac{f'(x)}{4}h^2, \quad \text{se } 0 < |h| < \delta_\varepsilon.$$

Se inseriamo questa informazione in (11), abbiamo, per $0 < |h| < \delta_\varepsilon$,

$$f(x+h) - f(x) = f''(x)\frac{h^2}{2} + R(h) > f''(x)\frac{h^2}{2} - f''(x)\frac{h^2}{4} > f''(x)\frac{h^2}{4} > 0.$$

Quindi x è un punto di minimo locale. □

Esercizio. Determinare i puntio di massimo o di minimo di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + e^{-x}$. Soluzione: $x = 0$ è punto di minimo (assoluto).

Nel seguito useremo il seguente Lemma-esercizio:

Lemma 12.2 *Se f è continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$ e se per una opportuna costante $L > 0$ vale*

$$|f'(x)| \leq L, \quad \forall\, x \in\,]a,b[\,,$$

allora

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in [a,b].$$

Dimostraz. Basta usare il Teorema di Lagrange, che per una qualsiasi coppia $x_1, x_2 \in [a,b]$ fornisce $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$, dove $c \in\,]x_1, x_2[$, se $x_1 < x_2$. Calcolando il valore assoluto

$$|f(x_1) - f_(x_2)| = |f'(c)(x_1 - x_2)| = |f'(c)|\,|x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|$$

Successioni. Una successione è una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cioè una funzione definita su $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$, a valori reali. Cioe' una legge f che ad ogni $n \in \mathbb{N}$ associa $f(n) \in \mathbb{N}$.

Per tradizione, in letteratura la variabile di una successione non è messa tra parentesi, ma come indice. La successione si indica con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o con (a_n).

Esempio. Definiamo la successione (a_n) come segue. $a_n = n^2$, oer ogni $n \in \mathbb{N}$. E' la successione che a ogni numero $n \in \mathbb{N}$ associa il suo quadrato. $1 \mapsto a_1 = 1^2 = 1$, $2 \mapsto a_2 = 2^2 = 4$, e via dicendo.

Si può parlare di limite di successione, imitando la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Definizione 12.3 *Si dice che (a_n) tende a $L \in \mathbb{R}$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon > 0$ per cui*

$$|a_n - L| < \varepsilon, \quad \textit{per ogni } n > n_\varepsilon.$$

Ad esempio, ragionando nello stesso modo in cui si verifica che $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, si puo' vedere che $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Enunciamo (senza dimostrazione) il seguente teorema.

Teorema 12.4 (Limiti di successioni monotone) *Se (a_n) è una successione monotona crescente,*[13] *cioè*

$$a_n \leq a_{n+1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

allora (a_n) ammette limite. Cioè esiste un $L \in \mathbb{R}$, o eventualmente $L = +\infty$, tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$.

Esempio 12.5 (Numero di Nepero e capitalizzazione) *Se mettiamo in banca un capitale C e l'interesse annuo e' i, allora dopo un anno avremo un capitale*

$$c_1 = C(1 + i).$$

Se la banca ci pagasse un interesse semestrale di $i/2$, saremmo avvantaggiati, perche', a fine anno avremmo un capitale

$$c_2 = C\Big(1 + \frac{i}{2}\Big)\Big(1 + \frac{i}{2}\Big) = C\Big(1 + \frac{i}{2}\Big)^2 = C\Big(1 + i + \frac{i^2}{4}\Big),$$

che è piu' grande di c_1. Possiamo chiederci cosa succederebbe se gli interessi fossero pagati n volte. In questo caso, a fine anno avremmo un capitale di $c_n = C\Big(1 + \frac{i}{n}\Big)^n$. Si puo' verficare, con un esercizio non banale, che in effetti c_n è monotona crescente, cioè che

$$c_n < c_{n+1}, \quad \forall n.$$

Il limite di c_n è in effetti uno dei limiti notevoli già incontrati. Infatti,

$$\lim c_n = \lim_{n\to+\infty} C\Big(1 + \frac{i}{n}\Big)^n = \lim_{n\to+\infty} C\Big\{\Big(1 + \frac{i}{n}\Big)^{\frac{n}{i}}\Big\}^i.$$

[13] Lo stesso teorema vale se f è decrescente. In quel caso L puo' essere $-\infty$.

Ponendo $i/n = x$*, osserviamo che per* $n \to +\infty$ *vale* $x \to 0+$*. Possiamo calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0+}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0+}\exp(\log((1+x)^{1/x})) = \lim_{x\to 0+}\exp\left\{\frac{1}{x}\log(1+x)\right\} = e,$$

grazie al limite notevole del logaritmo discusso nei giorni passati. Da qui si deduce che $\lim_{n\to+\infty} c_n = Ce^i$.

13 29 nov 2005

Integrali di funzioni continue. Consideramo una funzione f continua su $[0,1]$. L'integrale di f si definisce tramite un processo di limite di due successioni. La successione delle somme inferiori s_n e quella delle somme superori S_n.

Le successioni sono costruite come segue. Usiamo qui la notazione

$$\min_{[\alpha,\beta]} f = \min\{f(x) : x \in [\alpha,\beta]\},$$

per ogni intervallo $[\alpha,\beta] \subset [0,1]$. Osserviamo che, poiche' f è continua, minimo e massimo sono realizzati in un punto. Cioè esistono $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ per i quali vale $f(x_1) = \min_{[\alpha,\beta]} f$ e $f(x_2) = \max_{[\alpha,\beta]} f$. Poniamo

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \cdot \min_{[0,1]} f \\ s_2 &= \frac{1}{2}\cdot\min_{[0,\frac{1}{2}]} f + \frac{1}{2}\cdot\min_{[\frac{1}{2},1]} f, \\ s_3 &= \frac{1}{4}\cdot\min_{[0,\frac{1}{4}]} f + \frac{1}{4}\cdot\min_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]} f + \frac{1}{4}\cdot\min_{[\frac{1}{2}\frac{3}{4}]} f + \frac{1}{4}\cdot\min_{[\frac{3}{4},1]} f, \end{aligned}$$

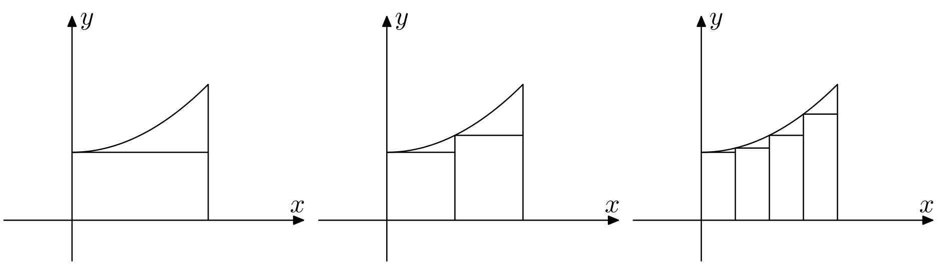

Figura 9: I primi tre passi dell'approssimazione tramite somme inferiori.

Al passo $n-$esimo avremo

$$s_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \min_{[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}]} f.$$

In modo analogo definiamo la successione delle somme superiori, sostituendo però il minimo con il massimo.

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \max_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} f.$$

Si vede immediatamente che $S_n \geq s_n$ (il massimo di una funzione su un insieme e' sempre maggiore o uguale al minimo). Inoltre se f e' costante, $f(x) = k$, allora sara' $s_n = S_n = k$, per ogni n. Evidenziamo ora altre proprietà delle due successioni:

(a) $s_n \leq s_{n+1}$, per ogni $n = 1, 2, \ldots$. (s_n monotona crescente).

(b) $S_n \geq S_{n+1}$, per ogni $n = 1, 2, \ldots$. (S_n monotona decrescente).

(c) $s_n \leq S_m$, per ogni $n, m = 1, 2, \ldots$.

Diamo l'idea della verifica di (a). Consideriamo il caso $n = 1$. Si tratta di osservare che

$$\min_{[0,\frac{1}{2}]} f \geq \min_{[0,1]} f, \qquad \text{e} \qquad \min_{[\frac{1}{2},1]} f \geq \min_{[0,1]} f \tag{13}$$

(il minimo decresce, se ingrandiamo l'insieme su cui lo calcoliamo). Allora risulta

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot \min_{[0,\frac{1}{2}]} f + \frac{1}{2} \cdot \min_{[\frac{1}{2},1]} f \geq \frac{1}{2} \cdot \min_{[0,1]} f + \frac{1}{2} \cdot \min_{[0,1]} f = 1 \cdot \min_{[0,1]} f = s_1.$$

Capito ciò , è facile riconoscere che $s_2 \leq s_3$ e via dicendo.

La proprietà (b) si puo' riconoscere analogamente alle (a), osservando che la disuguaglianza (13) si rovescia, se sostituiamo il minimo con il massimo.

Una volta vista la monotonia di (s_n) e di (S_n), possiamo verificare (c). Supponiamo ad esempio che $n \geq m$. Osserviamo ancora che $S_n \geq s_n$. Infatti,

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \max_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} f - \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \min_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} f = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \Big\{ \max_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} f - \min_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} f \Big\}.$$

Poiche' ciascuno dei termini nelle graffe è ≥ 0, la loro somma sarà ≥ 0. Quindi $S_n \geq s_n$. D' altra parte, visto che $(S_n)_n$ è decrescente (proprietà (b)), sarà $S_m \geq S_n$. Quindi

$$S_m - s_n \geq S_n - s_n \geq 0,$$

che è la proprietà (c).

Le proprietà (a), (b) e (c) ora discusse, permettono di concludere che, se indichiamo con $s = \lim_{n\to+\infty} s_n$ ed $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$, allora risulta

$$s \leq S.$$

Quindi, l'approssimazione "da sotto" ha un limite $\leq$ dell' approssimazione "da sopra". In effetti, si puo' provare che i due limiti coincidono per tutte le funzioni continue.

Teorema 13.1 *Se f è continua su $[0,1]$, allora $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$. Il valore comune dei due limiti si chiama integrale di f e si indica con*

$$\int_0^1 f(x)dx, \qquad \textit{o, piu' brevemente, con} \qquad \int_0^1 f.$$

La costruzione delle aomme superiori e inferiori fatta qui, puo' essere generalizzata a un intervallo arbitrario $[a,b]$ per una funzione f continua su $[a,b]$, conducendo alla definizione di $\int_a^b f$.

La dimostrazione del Teorema 13.1 non è facile e non verrà presentata qui. Dimostreremo invece il seguente enunciato (un po' meno generale, ma gia' significativo). Di nuovo, per semplicità di notazione, scegliamo l'intervallo $[0,1]$.

Teorema 13.2 *Sia f continua su $[0,1]$. Assumiamo inoltre che f sia derivabile e che esista una costante $L>0$ tale che*

$$|f'(x)| \le L, \quad \forall\, x \in [0,1].$$

Allora $\lim s_n = \lim S_n$.

Dimostrazione. Si tratta semplicemente di scrivere $S_n - s_n$ e mostrare che tende a zero. Iniziamo osservando la seguente conseguenza del Lemma 12.2. Se $[\alpha,\beta]$ è un qualsiasi intervallo contenuto in $[0,1]$, allora sarà

$$\max_{[\alpha,\beta]} f = f(x_1) \qquad \text{e} \qquad \min_{[\alpha,\beta]} f = f(x_2),$$

dove x_1 e x_2 sono due opportuni punti in $[\alpha,\beta]$. Ma allora

$$\max_{[\alpha,\beta]} f - \min_{[\alpha,\beta]} f = f(x_1) - f(x_2) \le (\text{Lemma 12.2}) \le L|x_1 - x_2| \le L(\beta-\alpha), \qquad (14)$$

perche' x_1 e $x_2 \in [\alpha,\beta]$.

Ora usiamo (14) per stimare $S_n - s_n$. Precisamente

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n}\Big\{ \max_{[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}]} f - \min_{[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}]} f \Big\} \le \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n}\cdot L \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{L}{2^n}$$

(abbiamo usato (14) su ciascun intervallo $[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$ e la formula $\sum_{k=1}^{2^n} 1 = 2^n$). Concludendo, abbiamo

$$S_n - s_n \le \frac{L}{2^n} \to 0, \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Quindi anche il membro di sinistra tende a zero, cioe'

$$0 = \lim(S_n - s_n) = S - s \quad \Rightarrow \quad S = s$$

e il teorema è provato. $\square$

Proprieta' elementari dell'integrale. L'integrale ha le seguenti proprietà , che possono essere verificate a partire dalla definizione: se f e g sono funzioni continue, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx. \end{array}\right\} \quad \text{(Proprieta' di linearità)}$$

Se conveniamo poi di porre, quando $b < a$,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

vale, per f continua in $\mathbb{R}$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \qquad \text{(Proprietà di additività).}$$

Inoltre,

$$f(x) \geq 0 \text{ su } [a,b] \ \Rightarrow \ \int_a^b f \geq 0. \tag{15}$$

Osserviamo che per una funzione positiv a e continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il numero $\displaystyle\int_a^b f$ definisce l'area della parte di piano compresa tra il grafico di f e l'asse x, delimitata dalle rette $x = a$ e $x = b$. La formula (15) dice anche che

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{ su } [a,b] \quad \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

La definizione come limite della successione delle somme inferiori o superiori non è utile a calcolare concretamente un integrale (a meno che non lo si voglia calcolare numericamente).

Ai fini del calcolo di qualche integrale semplice, introduciamo la nozione di primitiva

Definizione 13.3 (Primitiva di una funzione) *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo aperto $A =]a,b[$. Una funzione F derivabile in A si chiama* primitiva *di f in A se vale*

$$F'(x) = f(x), \quad \textit{per ogni } x \in A.$$

Esempio 13.4 *Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3$, la funzione $F(x) = 3x+2$ è una primitiva di f in $\mathbb{R}$. Infatti vale $F'(x) = 3$.*

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, la funzione $F(x) = \frac{x^2}{2}$ è una primitiva di f in $\mathbb{R}$. Infatti $\frac{d}{dx}x^2/2 = x$. Osserviamo che avremmo potuto scegliere $F(x) = \frac{x^2}{2} + k$, con k costante arbitraria ottenendo sempre una primitiva di f.

Teorema 13.5 (Proprietà delle primitive) *Data una funzione f:*

(A) Se F è una primitiva di f in un intervallo A, allora la funzione $x \mapsto F(x) + k$ è una primitiva di f in A per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(B) Se F e G sono due primitive di f in un intervallo A, allora esiste una costante $k \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) - G(x) = k$, per ogni $x \in A$.

Dimostrazione del Teorema 13.5. Parte (A). E' una immediata conseguenza del fatto che la derivata di una funzione costante è nulla.

Parte (B). Se F e G sono entrambe primitive di f. Quindi

$$\frac{d}{dx}(F(x) - G(x)) = f(x) - f(x) = 0.$$

Quindi la funzione $x \mapsto F(x) - G(x)$ ha derivata identicamente nulla nell'intervallo A. Pertatnto è costante, grazie al Corollario 9.6. □

14 1 dic 2005

Funzioni integrali. Se f è una funzione continua su un intervallo A, allora, fissato un punto $c \in A$, per ogni $x \in A$ è definito l'integrale $\int_c^x f(t)dt$. Indichiamo la funzione $x \mapsto \int_c^x f(t)dt$ con I_c.

$$I_c(x) = \int_c^x f(t)dt, \quad x \in A.$$

Chiameremo I_c funzione integrale di f con estremo inferiore c.

Osservazione 14.1 (Funzioni integrali e funzioni di ripartizione) *Osserviamo che la nozione di funzione integrale è strettamente legata a quella di funzione di ripartizione in Probabilità . Ad esempio, se X è una variabile aleatoria sull'intervallo $[0,1]$ con densità continua $f_X : [0,1] \to \mathbb{R}$, allora la funzione di ripartizione*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt$$

di X coincide esattamente con la funzione I_0.

Osservazione 14.2 *Se scegliamo due punti base c, c' diversi, allora le funzioni integrali I_c e $I_{c'}$ differiscono per una costante. Infatti, per la additività dell'integrale,*

$$I_c(x) - I_{c'}(x) = \int_c^x f - \int_{c'}^x f = \int_c^{c'} f = \textit{costante}.$$

Teorema 14.3 (Teorema fondamentale del calcolo integrale) *Se f è continua su un intervallo aperto A e $c \in A$ è fissato, allora*

$$I_c'(x) = \frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x), \quad \forall\, x \in A.$$

Esempio 14.4 *Calcoliamo usando Il Teorema dondamentale del calcolo la derivata* $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(t^2)dt$. *Usiamo la funzione* $f(t) = \sin(t^2)$. *Quindi*

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(t^2)dt = \sin(x^2).$$

Per calcolare quella derivata non e' necessario calcolare l'integrale (anche ammesso che si sappia farlo, questo sarebbe uno spreco di energie). Analogamente

$$\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2} = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dim. del Teorema fondamentale del calcolo. Fissiamo $x \in A$. Dobbiamo provare che

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x) \qquad \text{cioè} \qquad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(x).$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiche' f è continua in x, per definizione di funzione continua, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \text{ con } |t - x| < \varepsilon. \tag{16}$$

Ora scegliamo $h < \delta_\varepsilon$, per comodità positivo (il caso $h < 0$ è analogo). Allora, facendo l'integrale $\int_x^{x+h} f(t)dt$, saranno coinvolti in esso solo valori di $t \in [x, x+h]$. Quindi $|t - x| < \delta_\varepsilon$, in tutto l'intervallo di integrazione. Quindi, per la proprieta' di monotonia dell'integrale, (16) fornisce

$$\int_x^{x+h} [f(x) - \varepsilon]dt < dt \int_x^{x+h} f(t)dt = \int_x^{x+h} [f(x) + \varepsilon]dt,$$

che, visto che i due integrali agli estremi sono integrali di funzioni costanti, diventa

$$h[f(x) - \varepsilon] < \int_x^{x+h} f(t)dt < [f(x) + \varepsilon].$$

Poiche' stiamo considerando il caso $h > 0$, dividendo per h avremo

$$f(x) - \varepsilon < \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt < f(x) + \varepsilon.$$

Le due disuguaglianze scritte in questa riga valgono non appena $0 \le h < \delta_\varepsilon$. Quindi abbiamo di fatto verificato che la definizione di limite è soddisfatta per il limite

$$\lim_{h\to 0+}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(x).$$

Con una mimima modifica so vede che anche per $h \to 0-$ il limite è lo stesso. Quindi il Teorema è provato. $\square$

Corollario 14.5 (Teorema di Torricelli) *Sia f continua su A e sia F una sua primitiva. Allora, in ogni intervallo $[a, b] \subset A$, vale*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{17}$$

Si usano di solito le notazioni equivalenti

$$F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_{x=b}^{x=a} = F(x)\Big|_{x=b}^{x=a}.$$

Dimostrazione. Fissiamo una qualsiasi funzione integrale I_c. Per il Teorema fondamentale del calcolo I_c è una primitiva di f. Quindi, per le proprietà delle primitive, le due primitive I_c e F differiscono per una costante k: $I_c(x) = F(x) + k$, $x \in A$. Ma allora

$$\begin{aligned}\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = -\int_c^a f + \int_c^b f = -I_c(a) + I_c(b) \\ = -[F(a) + k] + F(b) + k = F(b) - F(a),\end{aligned}$$

come si voleva. □

Esempio 14.6 *Calcoliamo $\int_1^2 xdx$. Poiche' $F(x) = x^2/2$ è una primitiva della funzione integranda, avremo*

$$\int_1^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2}.$$

Alcune primitive elementari:

$$\begin{array}{ll} f(x) & F(x) \\ x^n, & \dfrac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, ... \\ e^x, & e^x, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \cos x, & \sin x, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \sin x, & -\cos x, \quad x \in \mathbb{R}, \\ x^\alpha, & \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1, x > 0, \\ \dfrac{1}{x}, & \log|x|, \quad x \neq 0. \end{array}$$

Esercizio 14.7 *Calcolare con la tabella appena scritta* $\displaystyle\int_1^2 [\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}]dx.$

Esempio 14.8 *Se X è una variabila aleatoria distribuita su $[0, 1]$ con una densità $f_X(x) = cx^2$,*

(a) dire qual'è la cosatnte c di normalizzazione.

(b) dire come è distribuita la variabile $Y = X^2$.

La costante si trova richiedendo che $\int_0^1 f_X(x) = 1$. Calcolando l'integrale,

$$\int_0^1 cx^2 dx = c\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{c}{3} = 1 \quad \Leftrightarrow c = 3.$$

Quindi la risposta ad (a) è $c = 3$.

Per rispondere a (b), un modo possibile consiste nel cercare la funzione di ripartizione di Y. Per $y \in [0,1]$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(X^2 \le y) = \mathbb{P}(X \le \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} 3x^2 dx = x^3\big|_0^{\sqrt{y}} = y^{3/2}.$$

Quindi $F_Y(y) = y^{3/2}$ e, di conseguenza, la densità risulta essere

$$f_Y(y) = \frac{3}{2}y^{1/2}.$$

15 5 dicembre 2005

Descriviamo ora alcune tecniche per il calcolo esplicito di integrali.

Teorema 15.1 (Formula di integrazione per parti) *Se f è continua su $[a,b]$ e g è derivabile in ogni punto di $[a,b]$, allora, indicando con F una primitiva di f in $[a,b]$, si ha*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \big[F(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx. \tag{18}$$

Dimostrazione. Basta calcolare la derivata

$$\frac{d}{dx}F(x)g(x) = F'(x)g(x) + f(x)g'(x) = f(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Integrando su $[a,b]$

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(F(x)g(x))dx = \int_a^b (f(x)g(x) + f(x)g'(x))dx.$$

Quindi per la Formula di Torricelli,

$$\big[F(x)g(x)\big]_a^b = \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

che da' immediatamente (18)

Esempio 15.2 *Calcoliamo $\int_0^1 xe^x dx$. Scegliendo $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, abbiamo*

$$\int_0^1 xe^x dx = \big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \big[xe^x - e^x\big]_0^1 = 1.$$

Analogamente, per integrare la funzione logaritmo,

$$\int_a^b \log x \; dx = \int_a^b 1 \cdot \log x dx = \big[x \log x\big]_a^b - \int_a^b 1dx = \big[x \log x - x\big]_a^b$$

Un ultimo esempio di integrazione per parti

$$\int_a^b x \sin x dx = [x \cdot (-\cos x)]_a^b - \int_a^b (-\cos x) dx = \big[-x \cos x + \sin x\big]_a^b.$$

Teorema 15.3 (Cambio di variabile negli integrali) *Se f è continua su $[a, b]$ e se $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ è una funzione derivabile, allora vale la formula*

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(h(t)) h'(t) dt \tag{19}$$

Prima di dare la dimostrazione, applichiamo la formula al calcolo del seguente integrale:

$$\int_0^4 \sin \sqrt{x} \, dx.$$

Poniamo $\sqrt{x} = t$. Quindi avremo $x = t^2 = h(t)$. Scegliendo $\alpha = 0$ e $\beta = 2$, avremo $h(0) = 0$ e $h(2) = 4$. Inoltre $h'(t) = 2t$. Quindi

$$\int_0^4 \sin \sqrt{x} \, dx = \int_0^2 (\sin t) \, 2t dt.$$

Questo ultimo integrale è stato calcolato nell'esempio precedente, integrando per parti.

Dimostrazione della formula del cambio di variabile. Basta considerare le due funzioni F e G definite su $[\alpha, \beta]$ come segue

$$F(z) = \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x) dx \qquad \text{e} \qquad G(z) = \int_\alpha^z f(h(t)) h'(t) dt.$$

Dire che vale la formula (19) e' esattamente equivalente a dire che vale $F(\beta) = G(\beta)$. Per riconoscere cio', verifichiamo:

(1) che F e G hanno la stessa derivata su $]\alpha, \beta[$.

(2) Che F e G coincidono in un punto opportuno.

Per provare che $F' = G'$, basta applicare il Teorema Fondamentale del Calcolo:

$$G'(z) = f(h(z)) h'(z).$$

La derivata di F si ottiene derivando la funzione composta

$$z \mapsto h(z) \mapsto \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx$$

e vale, di nuovo per il Teorema fondamentale del calcolo,

$$F'(z) = f(h(z))h'(z).$$

Quindi le due funzioni hanno la stessa derivata in ogni punto. Quindi differiscono per una costante k. D'altra parte pero', tanto G quanto F valgono zero, per $z = \alpha$. Cio' significa che la costante k è zero. Quindi $G = F$ su tutto $[\alpha, \beta]$. In particolare sarà $G(\beta) = F(\beta)$, che è esattamente (19). $\square$

16 13 dicembre 2005

Integrali generalizzati. In questa parte ci occupiamo di definire in modo corretto l' integrale di una funzione continua su un intervallo illimitato. Consideriamo una funzione continua su $[a, +\infty[$ e non negativa.

Definizione 16.1 *Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua che assume valori non negativi, $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, +\infty[$. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $[a, +\infty[$ se il limite*

$$\lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)dx$$

esiste finito. *In tal caso poniamo*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(x)dx$$

Se invece il limite e' $+\infty$, allora diciamo che la funzione non e' integrabile in senso generalizzato.

Una terminologia equivalente e': l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ e' convergente, se il limite e' finito, oppure divergente se il limite e' $+\infty$.

Esempio 16.2 *La funzione $f(x) = 1$ non è integrabile in senzo generalizzato su $[0, +\infty[$. Infatti,*

$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^R 1dx = \lim_{R \to +\infty} R = +\infty.$$

La funzione $f(x) = e^{-x}$ e' invece integrabile in senzo generalizzato su $[0, +\infty)$. Infatti, preso $R > 0$,

$$\int_0^R e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^R = 1 - e^{-R} \longrightarrow 1, \quad \textit{per } R \to +\infty. \tag{20}$$

Quindi $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$. L'integrale e' convergente.

Vale la pena osservare che se f è non negativa su $[a, +\infty[$, allora la funzione

$$R \mapsto \int_a^R f(x)dx.$$

è crescente su $[a, +\infty[$. QUindi si puo' essere certi [14] che il suo limite per $R \to \infty$ esiste (finito o $+\infty$).

Esempio 16.3 *Consideriamo la funzione $f(x) = x^\alpha$, per $\alpha \in \mathbb{R}$. Esaminiamo per quali α l'integrale $\int_1^{+\infty}$ e' convergente.*

Per discutere l'esempio, dividiamo 2 casi: $\alpha = -1$ ed $\alpha \neq -1$. Nel primo caso

$$\int_1^R \frac{dx}{x} = [\log x]_1^R = \log R \to +\infty, \quad \textit{per } R \to +\infty.$$

Quindi l'integrale e' divergente.

Nel secondo caso

$$\int_1^R x^\alpha dx = \Big[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big]_1^R = \frac{R^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}.$$

Ora, se $\alpha + 1 < 0$, $\lim_{R\to+\infty} R^{\alpha+1} = 0$, mentre se $\alpha + 1 > 0$, $\lim_{R\to+\infty} R^{\alpha+1} = +\infty$. QUindi l'integrale e' convergente soltanto se $\alpha + 1 < 0$. In tal caso vale

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha dx = -\frac{1}{\alpha+1}.$$

Per $\alpha \geq -1$ l'integrale è divergente.

Diamo ora la definizione per integrali del tipo $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Definizione 16.4 *Se $f :]-\infty, b]$ e' continua e non negativa, poniamo*

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)dx.$$

Diciamo che l'integrale e' convergente se il limite e' finito e che l'integrale e' divergente se il limite e' $+\infty$.

Infine: se $f :]-\infty, +\infty[$ e' continua e non negativa, diciamo che f è integrabile in senso generalizzato su $]-\infty, +\infty[$ se e' integrabile in senso generalizzato in entrambi gli intervalli $]-\infty, 0]$ e $[0, +\infty[$. In tal caso poniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

[14] Una dimostrazione rigorosa di questo fatto esula pero' dagli scopi di questo corso

Esempio 16.5 *Calcolare l'integrale* $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.

Integriamo per parti:

$$\int_0^R xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^R - \int_0^R e^{-xdx} = -Re^{-R} + 0 + \int_0^R e^{-xdx} \to 1,$$

per $R \to +\infty$. *Infatti,* $\lim_{R\to+\infty} Re^{-R} = 0$ *e, come visto sopra,* $\int_0^R e^{-xdx} \to 1$, *per* $R \to +\infty$.

Funzione Gamma. Poniamo, per $k = 1, 2, 3, \ldots,$ [15]

$$\Gamma(k) = \int_0^{+\infty} x^{k-1}e^{-x}dx.$$

Abbiamo gia' visto che $\Gamma(1) = 1$. Infatti

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1,$$

come visto in (20). Verifichiamo ora la seguente proprieta'.

$$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 1. \tag{21}$$

Prima di verificare (21), notiamo che, applicando questa formula ripetutamente si trova, per ogni k numero naturale

$$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k) = k(k-1)\Gamma(k-1) = \cdots = k!.$$

Quindi la funzione Γ da' anche una rappresentazione del fattoriale.

La verifica di (21) e' un esercizio sulla integrazione per parti.

$$\int_0^R x^k e^{-x}dx = [-x^k e^{-x}]_0^R + k\int_0^R x^{k-1}e^{-x}dx = -R^k e^{-R} + k\int_0^R x^{k-1}e^{-x}dx.$$

Poiche' $\lim_{R\to+\infty} R^k e^{-R} = 0$, avremo

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^R x^k e^{-x}dx = k\lim_{R\to+\infty}\int_0^R x^{k-1}e^{-x}dx.$$

Esempio 16.6 (Distribuzione Gamma) *Consideriamo la funzione* $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}$, *con* $\alpha, \beta > 0$. *Determiniamo la costante di normalizzazione* $C_{\alpha,\beta}$ *che rende la funzione* $f_{\alpha,\beta} = C_{\alpha,\beta}f(x)$ *una densita' di probabilita' su* $[0, +\infty[$.

Si tratta semplicamente di calcolare l'integrale di f*:*

$$\begin{aligned}&\int_0^R x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}dx \\ &= \text{(poniamo } x/\beta = t,\ dx = \beta dt,\ x = R \Rightarrow t = \beta R\text{)} \\ &= \int_0^{\beta R} \beta^{\alpha-1}t^{\alpha-1}e^{-t}\beta dt \to \beta^\alpha\Gamma(\alpha),\ \textit{per } R \to +\infty.\end{aligned}$$

[15] In realta' questo integrale e' convergente per ogni $k > 0$, numero reale. Questo pero' richiederebbe qualche precisazione in piu', visto che $\lim_{x\to0+} x^{k-1}e^{-x} = +\infty$, se $0 < k < 1$.

QUindi la funzione

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$$

definisce una densita' di probabilita' su $[0, +\infty)$.

17 15 dicembre 2005

Svolgimento completo dei seguenti esercizi su cambi di variabile e integrazione per parti:

Esercizio 17.1 (Media e varianza della distribuzione Gamma) *E' data una variabile* X *distribuita su* $0, +\infty[$ *con densita'*

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}.$$

Verificare che

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f_{\alpha,\beta}(x) dx = \alpha\beta \quad e \quad \mathrm{Var}(X) = \int_0^{+\infty} (x - E(X))^2 f_{\alpha,\beta}(x) dx = \alpha\beta^2.$$

Nell'esercizio seguente, assumiamo come noto il valore dell'integrale di Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{22}$$

Esercizio 17.2 (Media e varianza della distribuzione di Gauss) *Dati* $\mu \in \mathbb{R}$ *e* $\sigma > 0$, *una variabile* X *ha una distribuzione normale di parameri* μ *e* σ^2 *se la sua densita' e' data dalla funzione*

$$N_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big).$$

Verificare, con il cambio di di variabile $\dfrac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}} = t$ *e usando (22), che*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N_{\mu,\sigma^2}(x) dx = 1.$$

Se X *ha densita'* N_{μ,σ^2}, *verificare che*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x N_{\mu,\sigma^2}(x) dx = \mu.$$

Verificare infine con una opportuna integrazione per parti, che

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 dx N_{\mu,\sigma^2}(x) dx = \sigma^2.$$

Argomenti d'esame

Segue una lista di argomenti la cui conoscenza (oltre alla capacita' di svolgere degli esercizi del tipo di quelli assegnati durante il corso) e' un requisito per il conseguimento di un buon voto. Tutti gli argomenti elencati appaiono negli appunti.

- Nozione di funzione, grafici e proprietà delle funzioni elementari, potenze logaritmi seno coseno ed esponenziale.
- Funzioni pari, dispari. Funzioni composte.
- Definizione di $\lim_{x \to c} f(x) = L$, per c ed L reali, $+\infty$ e $-\infty$.
- Definizione di limite da destra e da sinistra.
- Definizione di funzione continua.
- Definizione di derivata. Derivata di una funzione e retta tangente al grafico. Conoscenza delle derivate delle funzioni elementari.
- Derivate di somme, prodotti e funzioni composte
- Definizione di punto di massimo e di minimo locale o assoluto.
- Teoremi di Fermat, Rolle e Lagrange.
- Definizione di funzione debolmente e strettamente monotona crescente o decrescente. Caratterizzazione delle funzioni (debolmente) monotone e tramite la derivata.
- Definizione di o piccolo. Formula di Taylor del secondo ordine.
- Costruzione dell'integrale. Somme superiori e inferiori.
- Definizione di primitiva e proprietà delle primitive di una funzione.
- Definizione di funzione integrale.
- Teorema fondamentale del calcolo e Teorema di Torricelli.
- Integrazione per parti e tramite cambio di variabile.
- Definizione di funzione integrabile in senso generalizzato.