Facoltà di Scienze Statistiche. Sede di Rimini. Matematica, I modulo.

Daniele Morbidelli

21 ottobre 2009

Gli studenti sono invitati a segnalare errori o a riportare commenti all'indirizzo seguente: `morbidel@dm.unibo.it`

I paragrafi contrassegnati cin l'asterisco non saranno svolti.

Indice

Riferimenti bibliografici

[1] G. Ricci, Matematica generale, McGraw–Hill.

[2] M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, Matematica; calcolo infinitesimale e algebra lineare, Zanichelli.

1 Linguaggio, funzioni elementari

1.1 Il linguaggio degli insiemi

Assumiamo come primitiva la nozione di insieme. Indichiamo gli insiemi con lettere maiuscole e i loro elementi con lettere minuscole. Introduciamo ora in maniera discorsiva un po' di terminologia.

Dato un insieme A, per dire che a è un elemento di A scriviamo

$$a \in A \qquad \text{(leggere: } a \text{ appartiene ad } A\text{).}$$

Si possono indicare gli insiemi anche elencandone gli elementi tra parentesi graffe. Se ad esempio $A = \{1, 2, 3\}$, allora

$$1 \in A,$$

mentre $5 \notin A$. ($\notin$ si legge: "non appartiene").

Sottoinsiemi e relazioni di inclusione. Dati due insiemi A e B,

$$a \in A \quad \Rightarrow \quad a \in B,$$

allora si dice che A *è sottoinsieme di* B e si scrive

$$A \subseteq B \quad \text{(leggere: } A \text{ è contenuto in } B\text{)}$$

In altre parole ogni elemento di A è anche elemento di B. Si può scrivere anche $B \supseteq A$ (leggere: "B contiene A"). Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, allora A e B sono uguali e si scrive $A = B$.

Abbiamo introdotto il simbolo $\Rightarrow$, che si legge "implica". Il simbolo $\Leftrightarrow$ si legge "se e solo se".

Ovviamente, dati A e B, non è detto che ci sia necessariamente una relazione di inclusione tra i due insiemi.

Esercizio. Dati $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{2, 3, 4\}$ verificare se ci sono relazioni di inclusione tra i tre insiemi e quali sono.

Operazioni tra insiemi. Dati due insiemi A e B:

- L'insieme unione di A e B si indica con $A \cup B$ ed è costituito da tutti gli elemanti che sono in A oppure in B.
- L'intersezione di A e B si scrive $A \cap B$ e indica gli elemanti che sono in entrambi A e B.
- La differenza tra A e B si scrive $A \setminus B$ ed è l'insieme fatto da tutti gli elementi che sono in A ma non in B.

Esercizio. Dati $A = \{1, 5\}$ e $B = \{1, 5, 6\}$, $C = \{5, 6\}$ trovare unione, intersezione e differenza tra tutte le possibili coppie di insiemi.

Insiemi numerici Richiamiamo gli insiemi numerici che utilizzeremo durante il corso. Chiamiamo *numeri naturali* i numeri correntemente usati per contare. Si denotano col simbolo $\mathbb{N}$. Quindi $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

L'insieme dei *numeri reali* si denota col simbolo $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{R} = \left\{1, 0, -\frac{3}{4}, \pi, -\sqrt{2}, 1.987, \ldots\right\}.$$

Quantificatori. Introduciamo brevemente i seguenti simboli:

- $\forall$, che significa "per ogni";
- $\exists$, che significa "esiste".

Un altro modo per indicare un insieme è mettendo tra parentesi graffe le condizioni che lo definiscono. Ad esempio

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$$

indica l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ "tali che" $x > 1$. [1] Possiamo scrivere ad esempio:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}.$$

[1] I due punti si leggono "tali che' oppure "tale che'.

Simbolo di somma. Il simbolo di sommatoria si utilizza per rappresentare in modo sintetico la somma di più numeri. Ad esempio, consideriamo i numeri a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. La loro somma si può scrivere col simbolo $\sum_{k=1}^{5} a_k$ ovvero

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Se si vuole rappresentare la somma di n numeri $a_1, a_2 \ldots a_n$, si può scrivere

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

Ancora un esempio: vale $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^1 + 2^2 + \ldots + 2^n$.

Si verifica facilmente che valgono le seguenti proprietà, dette *proprietà di linearità* : dati $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$, ed $\alpha \in \mathbb{R}$, vale

- $\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$;
- $\sum_{k=1}^{n} \alpha\, a_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k$.

1.2 Fattoriale e coefficienti binomiali $(*)$

Definizione 1.2.1 *Definiamo il fattoriale di un numero naturale:*

$$\begin{aligned} &n! = n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1, \ \textit{se } n \in \mathbb{N},\\ &0! = 1. \end{aligned}$$

Siano ora n e k due qualunque numeri naturali tali che $k \leq n$. Chiamiamo *"coefficiente binomiale di n e k"*, e si legge *"n su k"* il numero

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si può riconoscere che il numero $\binom{n}{k}$ rappresenta il numero di sottoinsiemi di k elementi in un insieme di n elementi.

Si verifica subito con la definizione che $\binom{n}{0} = 1$ ed $\binom{n}{1} = n$. Altre due proprietà del coefficiente binomiale sono

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, $0 \leq k \leq n$,
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, $0 \leq k+1 \leq n$.

1.3 Formula per la potenza di un binomio $(*)$

Teorema 1.3.2 *Dati $a, b \in \mathbb{R}$ ed $n \in \mathbb{N}$, vale*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

1.4 Funzioni elementari

Definizione 1.4.3 (Prodotto cartesiano) *Se A e B sono due insiemi, il prodotto cartesiano tra A e B si indica con $A \times B$ ed è definito come*

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Introduciamo ora l'idea intuitiva di funzione.

Siano dati A e B insiemi. Si chiama *funzione da A a B* una *legge f* che associa *ad ogni* elemento di A *uno ed un solo* elemento di B. L'insieme A è detto *dominio* della funzione. Prendiamo un elemento $a \in A$; l'elemento corrispondente ad a tramite la funzione f si denota con $f(a)$ e si legge *"f di a"* .

Nell'introdurre una funzione f da A a B si usa la notazione sintetica

$$f : A \longrightarrow B,$$

L'insieme di tutti i valori assunti da f al variare di $a \in A$ si chiama *immagine di f*.

Definizione 1.4.4 (Grafico di una funzione) *Sia $f : A \to B$. Il grafico di una funzione è il seguente sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.*

$$\mathrm{Graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

Esempio 1.4.5 (Funzione identità) *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che associa x stesso ad ogni $x \in \mathbb{R}$ si chiama funzione identità. Vedi Figura 1*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$$

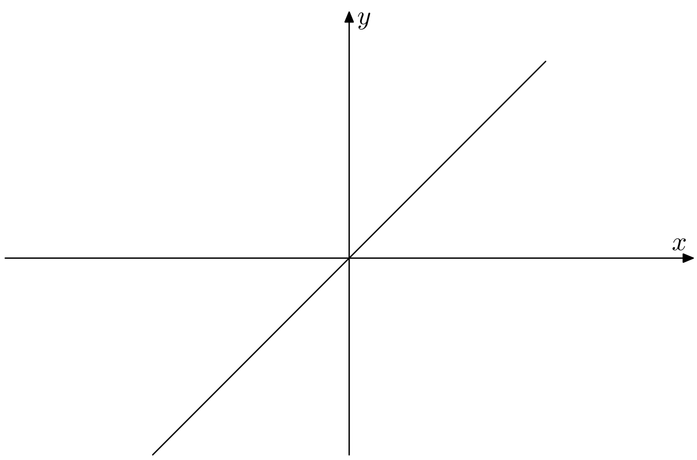

Figura 1: Grafico della funzione identità.

Esempio 1.4.6 (Funzione costante) *Dato un numero $k \in \mathbb{R}$, poniamo*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = k.$$

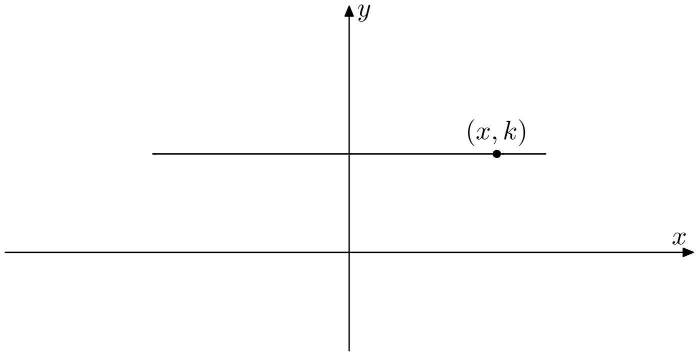

Figura 2: Grafico di una funzione costante $f(x) = k$.

Esempio 1.4.7 (Funzione valore assoluto) *È la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,*

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{se } x \geq 0, \\ -x & \textit{se } x \leq 0. \end{cases}$$

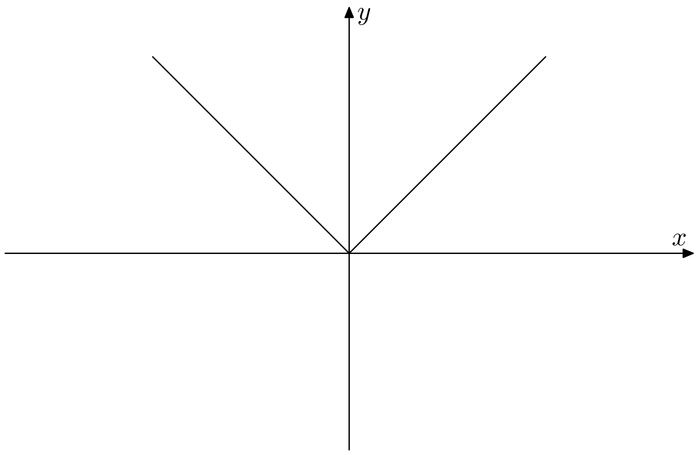

Figura 3: La funzione valore assoluto .

Esempio 1.4.8 (Funzioni affini) *Sono funzioni del tipo*

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = mx + q$$

dove m *e* q *rappresentano delle costanti fissate. Il grafico di questa funzione è una retta.* m *e* q *hanno un significato particolare:* m *è detto coefficiente angolare e misura la pendenza della retta;* q *si chiama ordinata all'origine e rappresenta il punto in cui la retta taglia l'asse delle ordinate.*

Esercizio. Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si definisca $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + 1$. Che legame c'è tra i grafici di f e g? Si definisca poi $h(x) = f(x + 1)$. Che legame c'è tra i grafici di f ed h?

Esercizio. Data la funzione $f : A \to \mathbb{R}$, come sono legati il grafico di f e quello di $g : A \to \mathbb{R}$, $g(x) = -f(x)$?

Esempio 1.4.9 *Funzioni potenza a esponente naturale Sono le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, dove $n \in \mathbb{N}$ è un assegnato numero naturale.*

Definizione 1.4.10 (Funzioni pari e dispari) *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice pari se vale $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. f si dice dispari se $f(x) = -f(-x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.*

Osserviamo che una funzione pari ha grafico simmetrico rispetto all'asse y; una funzione dispari ha grafico simmetrico rispetto all'origine.

Esercizio. Verificare che le funzioni potenza ad esponente pari (dispari) sono pari (dispari).

Esempio 1.4.11 (Funzione radice quadrata) *È la funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Vedere Figura 4.*

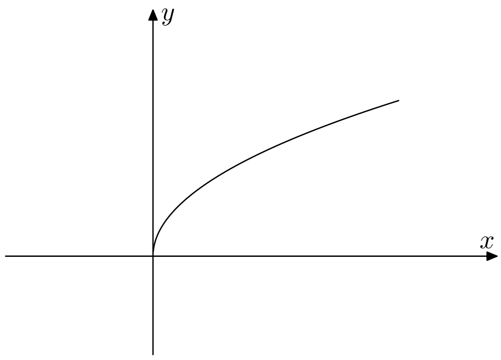

Figura 4: Funzione radice quadrata.

Definizione 1.4.12 (Funzione monotóna) *Una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ si dice*

- *monotona crescente strettamente su un insieme $I \subset A$ se*

$$x_1, x_2 \in I, \; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2);$$

- *monotona decrescente strettamente su un insieme $I \subset A$ se*

$$x_1, x_2 \in I, \; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2).$$

Si puo' dare la definizione di funzione crescente debolmente, sostituendo la disuguaglianza stretta $f(x_1) < f(x_2)$ con quella debole $f(x_1) \leq f(x_2)$. Lo stesso si puo' fare per la nozione di funzione decrescente debolmente.

Esercizio. Verificare che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ è crescente strettamente su $[0, +\infty]$. Verificare inoltre che la funzione radice quadrata è crescente strettamente.

Esercizio. Verificare che se due funzioni f e g sono crescenti strettamente su un intervallo I, allora
(i) $f + g$ è cresente strettamente su I;
(ii) $-f$ è decrescente strettamente su I.

Esempio 1.4.13 (La funzione esponenziale) *È la funzione* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, *dove* $e = 2.718\ldots$ *è il numero di Nepero.* [2] *Il grafico è in Figura 5.*

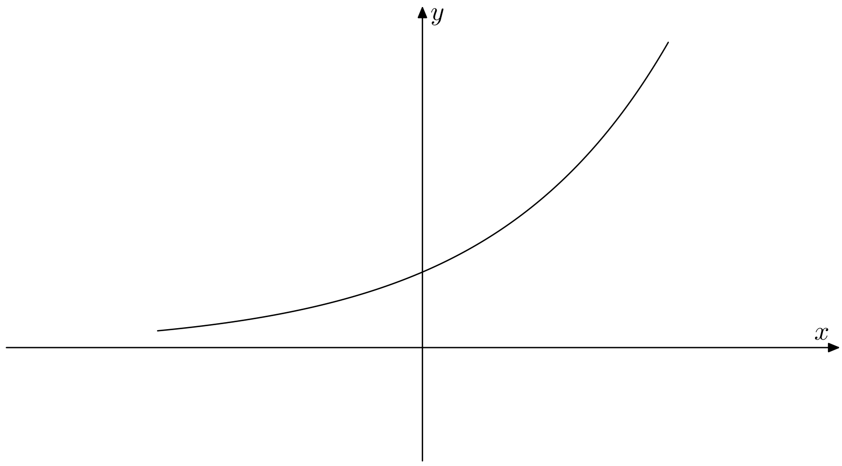

Figura 5: La funzione esponenziale.

Osserviamo che $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Inoltre vale $e^x > 1$ ($e^x < 1$) se e solo se $x > 0$ ($x < 0$).

La funzione esponenziale ha le seguenti due proprietà salienti

$$\begin{aligned} e^{x_1 + x_2} &= e^{x_1} e^{x_2}; \\ (e^{x_1})^{x_2} &= e^{x_1 x_2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Si scrive anche $\exp(x)$ in luogo di e^x. Osserviam che $e^x > 1$ ogni volta che $x > 0$. Utilizzando questo fatto, e la proprietà (1), si puo' riconoscere che la funzione esponenziale è monotona crescente strettamente. Infatti, dati $x_1 < x_2$ numeri reali, scritto per comodità $x_2 = x_1 + h$, con h positivo, troviamo, grazie a (1),

$$e^{x_1} < e^{x_1 + h} \quad \Leftrightarrow 1 < e^h.$$

Esempio 1.4.14 (La funzione logaritmo) *È la funzione* $\log :]0, +\infty[$ *che ad ogni* $x > 0$ *associa il suo logaritmo naturale.* [3] *Quindi*

$$e^{\log x} = x \quad \forall x > 0.$$

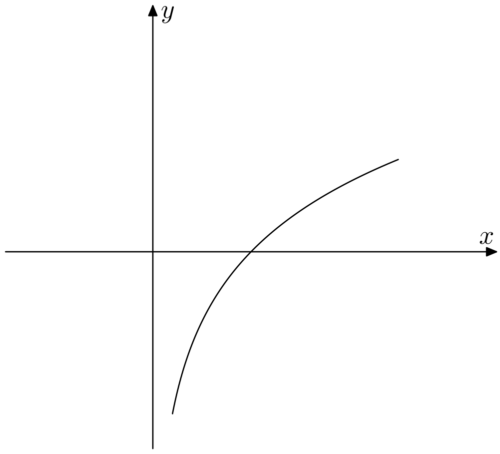

Figura 6: La funzione logaritmo.

Osserviamo che $\log x > 0$ se e solo se $x > 1$ e $\log x < 0$ se e solo se $0 < x < 1$. Il logaritmo è una funzione strettamente crescente su $0 < x < \infty$.

Esercizio 1.4.15 *1) Convincersi del fatto che* $\log(e^x) = x$ *per ogni* $x \in \mathbb{R}$.

2) Verificare usando le proprietà salienti dell'esponenziale (1) *che valgono le proprietà corrispondenti per il logaritmo*

$$\begin{aligned} &\log(x_1 x_2) = \log(x_1) + \log(x_2), \\ &\log x_1^\alpha = \alpha \log x_1, \quad x_1, x_2 > 0, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{2}$$

Disequazioni con esponenziale e logaritmo. Usando le proprietà di esponenziale e logaritmo si deduce che

$$e^a < b \quad \Leftrightarrow a < \log b, \quad \forall a \in \mathbb{R}, b > 0.$$

Esercizio 1.4.16 *Utilizzando l'ultima formula risolvere le disequazioni seguenti*

$$e^x < e, \quad e^{x^2} < 2, \quad e^{x+5} > 7$$

$$\log(1 + x^2) < 5, \quad 2^x < 3, \quad 2^x > 3^{x^2}$$

Esempio 1.4.17 (Funzioni circolari) *I grafici di seno e coseno sono nelle figure 7 e 8*

Definizione 1.4.18 (Funzione composta) *Date due funzioni* $f : A \to f(A) \subset \mathbb{R}$*,* $g : B \to C$*, con* $f(A) \subset B$*, definiamo la funzione composta* $g \circ f$ *come segue*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

---

[2]La cui origine è spiegata dalla formula (5) a pag. 14. Si veda anche Esempio 4.6.3 a pag. 26.

[3]Ricordiamo che il logaritmo naturale di un numero $x > 0$ è l'unico numero $y \in \mathbb{R}$ tale che $e^y = x$.

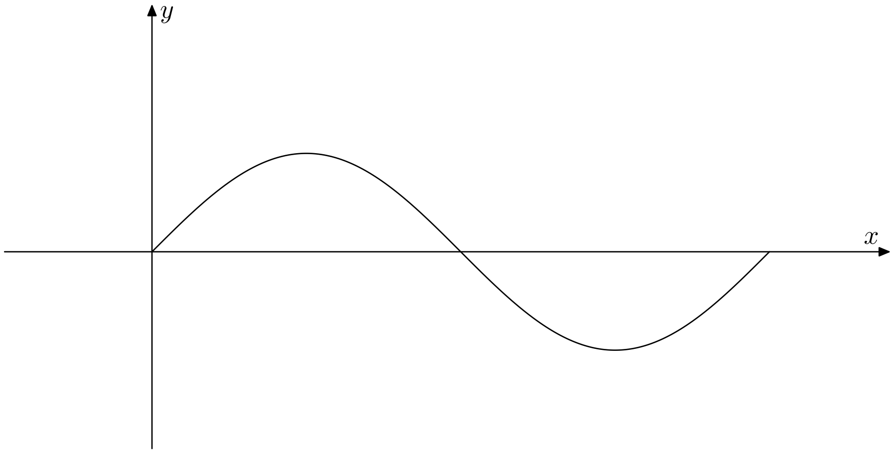

Figura 7: Grafico della funzione seno, su $[0, 2\pi]$.

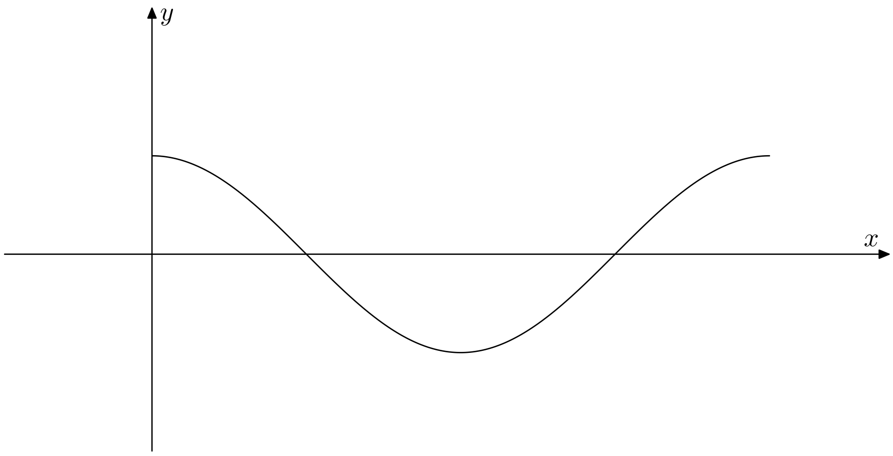

Figura 8: Grafico della funzione coseno, su $[0, 2\pi]$.

Esercizio 1.4.19 *Date le funzioni* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = sin(x)$, *scrivere le funzioni* $g \circ f$ *e* $f \circ g$.

Definizione 1.4.20 (Funzione inversa) *Sia* $f : A \to B$, $A, B \subset \mathbb{R}$. *La funzione* $g : B \to A$ *si dice l'inversa di* f *se vale*

$$\begin{aligned} f(g(x)) &= x, \qquad \forall x \in B \quad e \\ g(f(x)) &= x, \qquad \forall x \in A. \end{aligned}$$

2 Limiti

La nozione di limite serve a studiare il comportamento di una funzione nelle vicinanze di un punto.

Definizione 2.0.1 *Siano $a < b < c$ tre numeri reali e sia f una funzione definita almeno sull'unione dei due intervalli $]a, c[$ e $]c, b[$* [4] *Sia L un numero reale. Si dice che il limite di $f(x)$ per x che tende a c è L se per ogni numero $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta_\varepsilon > 0$* [5] *tale che*

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \quad \textit{per ogni } x \neq c, |x - c| < \delta_\varepsilon. \tag{3}$$

In tal caso si scrive

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Esempio 2.0.2 *Verifichiamo che $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$. Qui $c = L = 0$. Poiché $|x^2 - L| = |x^2 - 0| < \varepsilon$ se e solo se $|x - c| = |x| < \sqrt{\varepsilon}$, basta scegliere $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$ e l'affermazione* (3) *è verificata.*

Verificare per esercizio che $\lim_{x\to 0} e^{x^2} = 1$.

Esempio 2.0.3 *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da:*

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \textit{per } x \neq 0, \\ 0 & \textit{se } x = 0, \end{cases}$$

allora, usando la definizione di limite si vede subito che $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$. Il valore della funzione nel punto $c = 0$ è irrilevante.

Osservazione 2.0.4 *Il limite di una funzione f è unico. Precisamente, se $\lim_{x\to c} f(x) = L$ e $\lim_{x\to c} f(x) = M$, allora non puo' che essere $L = M$.*

Esempio 2.0.5 (funzione gradino) *Poniamo $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & \textit{per } x < 0, \\ 1 & \textit{se } x \geq 0, \end{cases}$$

allora, si puo' vedere che non c'è nessun numero L per il quale si verifichi $\lim_{x\to 0} f(x) = L$. In tal caso si dice che il limite non esiste.

Teorema 2.0.6 (Della permanenza del segno) *Siano a, b, c tre numeri reali con $a < b < c$. Sia data una funzione f che soddisfi $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, $x \neq c$. Allora, se f ha limite per $x \to c$, vale*

$$\lim_{x\to c} f(x) \geq 0.$$

Dimostrazione. Assumiamo che sia $\lim f(x) = L < 0$, per $x \to c$. Allora, preso $\varepsilon = |L|/2$, esiste δ tale che

$$L - \frac{|L|}{2} < f(x) < L + \frac{|L|}{2}$$

per $x \neq c$, $|x - c| < \delta$. Tolto il valora assoluto, la diusuguaglianza di destra diventa $f(x) < L/2$ per gli stessi x. Ma poiché $L < 0$, questo contraddice l'ipotesi che f sia non negativa. □

[4] Cioè nell' intervallo $]a, b[$ privato del punto c.

[5] La ε al piede indica che il numero δ_ε dipende da ε, oltre che dalla funzione f e da c.

2.1 Limiti da destra e da sinistra

Definizione 2.1.1 (Limiti da destra e da sinistra) *Si dice che il limite di $f(x)$ per x che tende a c da destra è L se $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta > 0$ tale che*

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \quad \textit{per ogni } x \textit{ con } c < x < c + \delta_\varepsilon.$$

Si scrive $\lim_{x\to c+} f(x) = L$. La definizione di limite da sinistra è analoga: $\lim_{x\to c-} f(x) = L$ se $\forall\varepsilon > 0$ $\exists\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$|f(x) - L| < \varepsilon, \quad \textit{per ogni } x \textit{ con } c - \delta < x < c.$$

Ad esempio, la funzione gradino θ soddisfa $\lim_{x\to 0+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0-} f(x) = 0$.

Si possono provare, a partire dalla definizione, le seguenti proprietà dei limiti: se $\lim_{x\to c} f(x) = L$ e $\lim_{x\to c} g(x) = M$, $L, M \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{x\to c}(f(x) + g(x)) = L + M, \quad \lim_{x\to c} f(x)g(x) = LM \quad \text{e}$$
$$\text{se } M \neq 0, \lim_{x\to c} f(x)/g(x) = L/M.$$

2.2 Funzioni continue

Definizione 2.2.1 (Funzione continua) *Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con A intervallo. f si dice continua in $c \in A$, se $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Se f è continua in ogni punto di A, si dice che f è continua in A.*

Osserviamo che le funzioni degli Esempi 2.0.5 e 2.0.3 non sono continue in zero.

Si puo' provare che:

- le funzioni elementari, potenze, esponenziali, logaritmi, seno, coseno, ... sono continue nei loro dominî naturali;
- la composizione di funzioni continue è continua.
- Prodotti e quozienti di funzioni continue sono continue [6]

Questi fatti permettono di calcolare a vista molti limiti. Esempio

$$\lim_{x\to 0}\left(x + e^x + \frac{\cos x}{x+1}\right) = 0 + 1 + \frac{e}{2}.$$

Esercizio 2.2.2 *Provare, usando la definizione di limite, che se $\lim_{x\to c} f(x) = L$ e $L > 0$, allora esiste un numero positivo δ tale che $f(x) > 0$ per tutti gli $x \neq c$, $|x - c| < \delta$.*

Un teorema importante in Analisi, che ci limitiamo a enunciare è il seguente:

Teorema 2.2.3 *Una funzione $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in ogni punto, ammette massimo e minimo.*

[6] purché non si annulli il denominatior, nel caso di quozienti

2.3 Limiti che coinvolgono ∞

La funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ assume valori "molto grandi, per x vicino a zero. Questo puo' essere formalizzato dicendo che $f(x)$ tende a $+\infty$, per x che tende a zero. In termini un po' piu' rigorosi si puo' dare la seguente definizione:

Definizione 2.3.4 *Si dice che* $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ *se per ogni* $M > 0$ *esiste* $\delta_M > 0$ [7] *tale che*

$$f(x) > M \quad \forall x \neq c, \quad |x - c| < \delta_M.$$

Si puo' verificare usando la precedente definizione, che $\lim_{x\to 0} 1/x^2 = +\infty$.

Analogamente si puo' dare la definizione di $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$. Si dice che $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $\delta_M > 0$ tale che $f(x) < -M$ $\forall x \neq c$, $|x - c| < \delta_M$. Ad esempio, la funzione $f(x) = -1/x^2$ tende a $-\infty$ per $x \to 0$.

Per stabilire se una funzione tende a $+\infty$ o a $-\infty$ si usa spesso il seguente criterio. La prova è una conseguenza immediata delle definizioni date.

Teorema 2.3.5 (Limiti di tipo $k/0$ con $k \neq 0$) . *Se* $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to c} g(x) = k > 0$ *valgono i seguenti fatti.*

- *Se* $f(x) > 0$, *per* x *vicino a* c, [8] *allora* $\lim_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.
- *Se* $f(x) < 0$, *per* x *vicino a* c, [9] *allora* $\lim_{x\to c} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$.

In sintesi: se $k > 0$, allora $\frac{k}{0+} = +\infty$ e $\frac{k}{0-} = -\infty$.

Il teorema enunciato vale anche per i limiti da destra o da sinistra.

Esempio 2.3.6

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{x^3} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 2-} \frac{\log x}{x-2} = \frac{\log 2}{0-} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2 - x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2(1-x^2)} = \frac{1}{1\cdot 0+} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-\cos x} = \frac{1}{0+} = +\infty, \text{ perché } 1 - \cos x \to 0+, \text{ per } x \to 0.$$

Forme indeterminate di tipo $0/0$. Sono limiti della forma

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{dove } \lim f(x) = \lim g(x) = 0, \text{ per } x \to c.$$

In generale il risultato di un limite in forma indeterminata necessita di uno studio ad hoc per essere stabilito. Ci sono delle "forme indeterminate standard", che sono date dal seguente teorema

[7] La scelta di δ_M dipende da quella di M

[8] Cioè f tende a zero positivamente, per $x \to c$

[9] Cioè f tende a zero negativamente, per $x \to c$

Teorema 2.3.7 *Vale*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad e \tag{4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \tag{5}$$

La dimostrazione di questo teorema richiede la conoscenza di un po' di trigonometria e di qualche proprietà del numero di Nepero e.

Dal teorema precedente, si ricava che, se $f(x) \to 0$, per $x \to c$ e $f(x) \neq 0$, per x vicino a c, allora

$$\lim_{x\to c} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to c} \frac{\exp(f(x)) - 1}{f(x)} = 1.$$

Ad esempio,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1.$$

Ancora:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log 2} - 1}{x \log 2} \log 2 = \log 2.$$

Un altro limite notevole è il seguente

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Questo limite puo' essere calcolato a partire da quello con l'esponenziale $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t - 1}{t} = 1$. Basta fare la sostituzione di variabile $\log(1+x) = t$, che equivale a $e^t - 1 = x$. Allora si vede che $t \to 0$ equivale a $x \to 0$ e i seguenti passaggi sono corretti (anche se qui non li giustifichiamo completamente):

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1.$$

Un ultimo caso di limite è quello in cui la variabile x tende a $+\infty$ o $-\infty$.

Definizione 2.3.8 *Sia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Si dice che* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ [10] *se*

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ K_\varepsilon \in \mathbb{R} :\ |f(x) - L| < \varepsilon \quad \forall\, x > K_\varepsilon\ .$$

Si dice invece che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *se per ogni* $M > 0$ *esiste* $K_M > 0$ *tale che* $f(x) > M$ *per ogni* $x > K_M$.

I limiti per $x \to -\infty$ *possono essere definiti con una ovvia modifica.*

Esempio 2.3.9 *Vale* $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

[10] $L \in \mathbb{R}$

3 Derivate

3.1 Definizione e prime proprietà

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, siano x_0 e $h \in \mathbb{R}$. I due punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ appartengono al grafico di f. La retta che li contiene ha equazione

$$y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0) + f(x_0).$$

Il numero $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ si chiama *r*apporto incrementale (di punto iniziale x_0 e incremento h). Esso è il coefficiente angolare della retta sopra scritta.

A partire dal rapporto incrementale si definisce la derivata lasciando tendere l'incremento a zero.

Definizione 3.1.1 *Sia data $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$. f si dice derivabile in x_0 se esiste finito il limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Tale limite si chiama derivata di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$, $Df(x_0)$, $\dfrac{d}{dx}f(x_0)$. In sintesi*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Esempio 3.1.2 *Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = k$, k costante, si ha per $x_0 \in \mathbb{R}$*

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{k - k}{h} = 0.$$

Esempio 3.1.3 *Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + q$, m, q costanti, si ha per $x \in \mathbb{R}$*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{m(x + h) + q - (mx + h)}{h} = m.$$

Terminologia: se una funzione $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ è derivabile in ogni $x \in]a, b[$, allora la nuova funzione $x \mapsto f'(x)$ si chiama *d*erivata di f.

Esempio 3.1.4 *Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.*

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = 2x.$$

Esempio 3.1.5 *Calcoliamo $\frac{d}{dx}\sqrt{x}$, per $x > 0$.*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sqrt{x} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}\,\frac{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h}{x[\sqrt{x + h} + \sqrt{x}]} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Esempio 3.1.6 *Calcoliamo $\frac{d}{dx}e^x$.*

$$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}e^x = e^x,$$

grazie al limite notevole (5) *(p. 14) della funzione esponenziale.*

3.2 Derivata e retta tangente

Definizione 3.2.7 *Data f derivabile in x_0, la retta di equazione $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ si chiama retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$.*

Tra tutte le rette che passano per $(x_0, f(x_0))$, la retta tangente è quella che meglio approssima f attorno a x_0, nel senso seguente. Consideriamo una qualsiasi retta passante per $(x_0, f(x_0))$, non verticale. Essa avrà equazione $y = m(x - x_0) + f(x_0)$ per qualche $m \in \mathbb{R}$. Prendiamo ora x vicino ad x_0 e consideriamo il punto $P = (x, f(x))$ sul grafico di f e il punto $Q = (x, m(x - x_0) + f(x_0))$ sulla retta. Allora vale

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\text{lunghezza del segmento } PQ}{|x - x_0|} = |f'(x_0) - m|.$$

La scelta $m = f'(x_0)$ è l'unica che rende nullo quel limite.

3.3 Tecniche di derivazione

Osservazione 3.3.8 *Se f e g sono derivabili in x, allora la loro somma è derivabile e vale*

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Inoltre $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 3.3.9 (Derivate prodotto e quoziente) *Se f e g sono derivaili in x, allora il loro prodotto è derivabile in x e vale*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

Inoltre, se $g(x) \neq 0$, allora

$$D\Big(\frac{f}{g}\Big)(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}$$

La prima delle due formule si prova partendo dalla definizione di derivata.

$$\begin{aligned}
(fg)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)] \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\{[f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)]\\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h \to 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + g'(x)f(x).
\end{aligned}$$

[11] La seconda si prova analogamente. □

[11] Abbiamo usato qui il fatto che, poiché g è derivabile in x, allora g è continua in x. Questo segue dal fatto che

$$g(x + h) - g(x) = \frac{g(x + h) - g(x)}{h} h \longrightarrow g'(x) \cdot 0 = 0, \quad \text{per } h \to 0.$$

Si possono calcolare con il teorema precedente le derivate delle funzioni

$$f(x) = \frac{x^2}{\sin x}, \quad f(x) = x\cos x, \quad f(x) = \sqrt{x}e^x, \quad f(x) = \frac{x^2+1}{\log x}.$$

Teorema 3.3.10 (Derivata di funzioni composte) *Se f è derivabile in x e g è derivabile in $f(x)$, allora $f \circ g$ è derivabile in x e vale*

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Dimostrazione. Indichiamo brevemente la dimostrazione nel caso in cui valga $g'(x) \neq 0$. In questo caso si puo' riconoscere che vale $g(x+h) - g(x) \neq 0$, per h vicino a zero. Allora

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(g(x))g'(x),\end{aligned}$$

come si voleva. □

Esercizio 3.3.11 *Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:*

$$\frac{d}{dx}\cos(2x), \quad \frac{d}{dx}e^{x^2}, \quad \frac{d}{dx}\log(1+3x^2),$$

$$f(x) = a^{x\cos x}, \quad (a > 0), \quad f(x) = \sin(1 + 2\cos x),$$

$$f(x) = (x + e^{2x} + x\sin x)^2, \quad f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1+2x^{3/2}}, \quad f(x) = \exp(\sin(x^2)),$$

$$f(x) = x^2 e^{-2x} \sin x.$$

4 Massimi e minimi di funzioni

Definizione 4.0.1 *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ ed $x_0 \in A$. Il punto x_0 si dice*

- di massimo (oppure di minimo) *locale se esiste $\delta > 0$ tale che*

$$f(x) \le f(x_0) \quad \text{(oppure } f(x) \ge f(x_0)\text{)} \; \forall x \in A, |x - x_0| < \delta.$$

- di massimo (oppure di minimo) *assoluto se*

$$f(x) \le f(x_0) \quad \text{(oppure } f(x) \ge f(x_0)\text{)} \; \forall x \in A.$$

Il valore $f(x_0)$ assunto da f in un punto di massimo o di minimo si chiama massimo o minimo.

I massimi e minimi di funzioni derivabili possono essere studiati con l'aiuto dei seguenti teoremi.

4.1 Teoremi di valor medio

Teorema 4.1.2 (di Fermat) *Se x_0 è un punto di massimo o di minimo locale o assoluto per f e se f è derivabile in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Basta considerare il quoziente

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = R(x).$$

Supponiamo x_0 punto di massimo. Per x vicino a x_0, con $x > x_0$, risulta $R(x) \leq 0$, perchè $f(x) - f(x_0) \leq 0$ (punto di massimo) e $x - x_0 > 0$. Quindi, poiché le disuguaglianze si conservano al limite (Teorema della permanenza del segno),

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} R(x) \leq 0.$$

Viceversa, se x è vicino a x_0, ma $x < x_0$, vale $R(x) \geq 0$, perchè $f(x) - f(x_0) \leq 0$ (punto di massimo) e $x - x_0 > 0$. Quindi si deduce $f'(x_0) \geq 0$.

Mettendo assieme i due casi si conclude $f'(x_0) = 0$. □

Esempio 4.1.3 *La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, ha un punto di minimo assoluto in $x = 0$.*

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ ha in $x_0 = 0$ un punto di massimo assoluto.

Teorema 4.1.4 (di Rolle) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ e soddisfa $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in\,]a, b[$ in cui vale*

$$f'(c) = 0.$$

Dimostrazione. Se f è costante, allora si puo' scegliere un qualsiasi $c \in\,]a, b[$ e il teorema è provato.

Se f non è costante, allora esiste un punto $c \in\,]a, b[$ che è di massimo o di minimo. [12] In tale punto, per il Teorema di Fermat, varrà $f'(c) = 0$. □

Una generalizzazioe del Teorema di Rolle è il seguente

Teorema 4.1.5 (di Lagrange) *Se f è continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, allora esiste almeno un punto $c \in\,]a, b[$ che soddisfa*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Il significato geometrico di questo teorema è il seguente: esiste almeno un $c \in\,]a, b[$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(c, f(c))$ è parallela alla retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

[12] Qui è coinvolto un teorema non banale sulle funzioni continue: se f è continua su $[a, b]$, allora si puo' dimostrare che f ammette massimo e minimo su $[a, b]$.

Dimostrazione. Consideriamo l'equazione della retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$,

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La funzione $g : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) - \left\{ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right\},$$

soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle (infatti si verifica subito che $g(a) = g(b) = 0$). Quindi, il Teorema di Rolle asserisce che esiste almeno un $c \in]a, b[$ che soddisfa $g'(c) = 0$. Dunque, poiché

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$x \in]a, b[$, sarà $g'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Un corollario del precedente Teorema è la seguente caratterizzazione delle funzioni costanti.

Corollario 4.1.6 (caratterizzazione delle funzioni costanti) *f è costante su $]a, b[$ se e solo se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in]a, b[$.*

Dimostrazione. Supponiamo f costante. Allora $f'(x) = 0$, per definizione di derivata.

Viceversa, supponiamo che f soddisfi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in]a, b[$. Fissiamo un qualsiasi punto $x_0 \in]a, b[$. Applicando il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_0, x]$, otteniamo, per un opportuno $c \in]x_0, x[$ [13]

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0). \tag{6}$$

Ma per ipotesi la derivata è nulla dappertutto. Quindi $f(x) = f(x_0)$. □

4.2 Derivate e monotonia

Un' altra applicazione del Teorema di Lagrange è la seguente:

Teorema 4.2.1 (Caratterizzazione delle funzioni monotone debolmente) *Una funzione f derivabile in $]a, b[$ è monotona crescente debolmente su $]a, b[$ se e solo se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a, b[$*

Dimostrazione. Se f è crescente in $]a, b[$, allora consideriamo $x < x+h$, dove $x, x+h$ sono punti in $]a, b[$. Allora per definizione di funzione monotona vale $f(x + h) > f(x)$. Prendendo il quoziente,

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

[13] O in $]x, x_0[$, se $x < x_0$.

Viceversa, se $f'(x) \geq 0$, applicando il Teorema di Lagrange (formula (6)) nell'intervallo $[x_0, x]$, con $a < x_0 < x < b$ otteniamo, per un opportuno $c \in]x_0, x[$

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \geq 0,$$

perché per ipotesi $f'(c) \geq 0$. Quindi $f(x) \geq f(x_0)$. Questo argomento vale per ogni coppia $x_0 < x$ di punti nell'intervallo $]a, b[$. Quindi f è debolmente crescente. □

Osservazione 4.2.2 *Ragionando allo stesso modo (con il Teorema di Lagrange), si puo' riconoscere che una parte del teorema sopra vale per le funzioni strettamente crescenti. Piu' precisamente, se f soddisfa $f'(x) > 0$ [14] per ogni $x \in]a, b[$, allora f è strettamente crescente su $]a, b[$.*

Esercizio 4.2.3 *Dire, calcolando la derivata e studiandone il segno, in quali intervalli sono crescenti le funzioni*

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = xe^x, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f(x) = e^{-x^2}, \quad f(x) = x^3 - x.$$

Esercizio 4.2.4 *Calcolare le derivate delle seguenti funzioni, dire in quali intervalli ciascuna di esse è crescente o decrescente e individuarne i punti di massimo o di minimo locale.*

$$f(x) = \sqrt{1 + x^4}, \quad f(x) = e^x - x, \quad f(x) = x^3 - x, \quad f(x) = x^2 e^x$$
$$f(x) = e^{2x} + e^{-x}, \quad f(x) = x \log x, \quad \textit{(per } x > 0,\textit{)}$$
$$f(x) = xe^{-x^2}, \quad f(x) = \frac{1+2x}{2+3x}, \quad f(x) = (x-3)\sqrt{x}.$$

4.3 Teorema di de l'Hôpital

Un'ultima applicazione del Teorema di Lagrange è la regola di de l'Hôpital. Diamo qui un enunciato in un caso particolare.

Teorema 4.3.1 (di de l'Hôpital perlimiti di tipo $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$) *Siano f e g due funzioni derivabili su $]a, b[$. Sia $c \in]a, b[$ tale che $f(c) = g(c) = 0$. Assumiamo che sia $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$, $x \neq c$. Allora, se il limite*

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esiste e vale L, sarà anche

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

[14]disuguaglianza stretta.

Esempi. Verificare usando Hôpital, che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\log x}{x-1} = 1, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x} = 2.$$

Dimostrazione del Teorema 4.3.1. Consideriamo un punto $x > c$, $x \in \,]a,b[$. Consideriamo la funzione

$$h(t) = f(x)g(t) - f(t)g(x), \quad t \in \,]a,b[\,.$$

LA funzione h soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[c,x]$. Infatti, $h(c) = f(x)g(c) - f(c)g(x) = 0$, perché f e g sono nulle in c, mentre $h(x) = f(x)g(x) - f(x)g(x) = 0$. Quindi Il Teorema di Rolle asserisce che esiste un punto $s \in \,]c,x[$ in cui $h'(s) = 0$. Allora

$$f(x)g'(s) - f'(s)g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(s)}{g(s)}$$

15

Lasciando tendere $x \to c$, sarà anche $s \to c$, perché s è compreso tra c ed x. Quindi, poiché sappiamo che $\frac{f'(s)}{g'(s)} \to L$, per $s \to c$, avremo

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L,$$

come si voleva. □

Delle versioni simili del Teor. di de L'Hopital valgono per limiti di tipo

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)},$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ tendono all'infinito e anche con $c = +\infty$ e $-\infty$. Ad esempio, il limite $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$ è una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Applicando Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

4.4 Esercizi di riepilogo

Esercizio 4.4.1 *Applicando un numero sufficiente di volte il Teorema di de l'Hôpital, dire quanto vale*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^{1000}}.$$

[15]Osserviamo che il Teorema di Rolle applicato alla funzione g nell'intervallo $[c,x]$, afferma che, per un opportuno $c_1 \in \,]c,x[$, vale $g(x) = g(x) - g(c) = g'(c_1)(x-c) \neq 0$, se $x \in \,]a,b[$ è diverso da c. QUindi nel passaggio precedente è corretto dividere per $g(x)$.

Esercizio 4.4.2 *Calcolare i seguenti limiti.*

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}, \quad \lim_{x\to 0+} x\log x, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2+e^{2x}}.$$

Esercizio 4.4.3 *Calcolare i seguenti limiti:*

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(e^{x^2}-1)}{x\sin x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{e^x-1}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{ax^2}, \quad \textit{per ogni possibile } a\in\mathbb{R}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x - x, \quad \lim_{x\to 0-} e^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0+} (1-2\cos x)e^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x-x^2}.$$

Esercizio 4.4.4 *Calcolare i limiti*

$$\lim_{x\to 0\pm} e^{1/x}, \qquad \lim_{x\to 2} \frac{e^{x^2-4x}-e^{-4}}{x^4-3x^3-2x^2+12x-8}, \qquad \lim_{x\to+\infty} xe^{1/x}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(e^x-e+1)}{\sin(x-1)}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\log(1+e^x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 1+} \frac{x^2+1-3x^4}{e^x-e}.$$

Esercizio 4.4.5 *Dire in queli intervalli sono crescenti (o decrescenti) le funzioni*

$$f(x) = x+\sin x, \qquad f(x)=e^{1/x}, \quad x\neq 0;$$

$$f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}, \ f(x) = x-\log(1+x);$$

Esercizio 4.4.6 *Determinare il massimo e il minimo valore assunti dalle funzioni* f : $[-1,3]$, $f(x)=x^3$ *e* $g : [-1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=e^{-x^2}$.

Esercizio 4.4.7 *È data la funzione* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$. *Calcolare*

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x).$$

Stabilire in quali intervalli la funzione è positiva, negativa, crescente, decrescente e determinare i suoi eventuali punti di massimo o di minimo. Tracciare un grafico qualitativo della funzione data che sia compatibile con le informazioni acquisite.

Esercizio 4.4.8 *Data la funzione* $f : [0,2]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x(2-x)}$, *dire quali sono i suoi punti di massimo o di minimo. Tracciare un grafico qualitativo di* f.

Esercizio 4.4.9 *Per le tre funzioni* $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$$f_1(x)=e^x+e^{-x}, \qquad f_2(x)=e^{-x^2}, \qquad f_3(x)=e^{-x^3},$$

calcolare $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, *dire in quali intervalli esse sono crescenti o decrescenti e tracciarne un grafico qualitativo.*

4.5 Formula di Taylor

Partiamo dal caso di una funzione f di una variabile derivabile in $\bar{x} \in \mathbb{R}$. La definizione di derivata ci dice che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}).$$

Equivalentemente

$$\lim_{h\to 0} \Big(\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} - f'(\bar{x}) \Big) = 0, \quad \text{o anche}$$

$$\lim_{h\to 0} \Big(\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})h}{h} \Big) = 0.$$

Quindi dire che una funzione è derivabile in $\bar{x}$ equivale a dire che la quantità

$$g(h) \equiv f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})h \tag{7}$$

tende a zero *piu' rapidamente* di h per $h \to 0$. Per descrivere questo fenomeno introduciamo la seguente scrittura:

Definizione 4.5.1 *Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di una variabile con $g(0) = 0$ e sia $k \geq 0$. Si dice che $g(h)$ è un o piccolo di h^k per $h \to 0$ se*

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h^k} = 0.$$

Si scrive $g(x) = o(x^k)$.

Ad esempio, $g(h) = h^2 = o(h)$. In fatti

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = 0.$$

Analogamente si verifica che $g(x) = x^\alpha = o(x)$ ogni volta che $\alpha > 1$.

Ancora un esempio: $g(h) = h(1 - \cos h) = o(h^2)$. Infatti

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(1-\cos h)}{h^2} = (Hopital) = \lim_{h\to 0} \sin h = 0.$$

Esercizio 4.5.2 *Verificare che*
(1) se $g(h) = o(h^2)$, per $h \to 0$, allora $g(h) = o(h)$, per $h \to 0$.
(2) la funzione $g(h) = \sin^2 h$ soddisfa $g(h) = o(h)$, ma non soddisfa $g(h) = o(h^2)$.

Con la notazione appena introdotta possiamo scrivere in sintesi che se f è derivabile in $\bar{x}$, allora la funzione g in (7) è un o piccolo di h per $h \to 0$. Cioè che

$$f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h). \tag{8}$$

La (8) si chiama *Formula di Taylor* del primo ordine di f di punto iniziale $\bar{x}$. Un altro modo di scrivere la (8) è ponendo $\bar{x} + h = x$. Allora si ottiene

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}),. \tag{9}$$

per $x \to \bar{x}$. Il seguente polinomio di grado uno nella variabile x:

$$T_{1,\bar{x}}(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}),$$

si chiama Polinomio di Taylor di grado uno della funzione f e di punto iniziale $\bar{x}$.

Per ottenere una approssimazione migliore di quella data da (8) di una funzione f vicino a un punto x, è necessario fare una approssimazione del secondo ordine. In essa apparirà anche la derivata seconda di f, che è la derivata della derivata prima e si indica con f'':

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x).$$

Teorema 4.5.3 (Formula di Taylor del secondo ordine) *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile due volte. Assumiamo che $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sia una funzione continua. ALlora vale, per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}$,*

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + f''(\bar{x})\frac{h^2}{2} + o(h^2). \tag{10}$$

La formula (10) *si chiama Formula di Taylor del secondo ordine di f con punto iniziale $\bar{x}$. Il polinomio di grado due*

$$T_{2,\bar{x}}(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + f''(\bar{x})\frac{(x - \bar{x})^2}{2}$$

si chiama Polinomio di Taylor di grado 2 di f di punto iniziale $\bar{x}$.

Esempio 4.5.4 *Scriviamo la formula di Taylor di $f(x) = e^x$ di punto iniziale $x = 0$. Basta calcolare $f(0) = e^0 = 1$. Poi $f'(x) = e^x$. Quindi $f'(0) = e^0 = 1$. Infine $f''(x) = e^x$ e quindi $f''(0) = e^0 = 1$ In definitiva*

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

Dimostrazione della Formula di Taylor del secondo ordine. La prova del teorema usa ancora la regola di de l'Hopital. Infatti, verificare (10) significa vedere che

$$\frac{f(x + h) - [f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2}]}{h^2} \to 0,$$

per $h \to 0$. Usando Hopital otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - [f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2}]}{h^2} &\overset{H}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f'(x + h) - f'(x)h - f''(x)h}{2h} \\ &\overset{H}{=} \lim_{h \to 0} \frac{f''(x + h) - f''(x)h}{2} = 0, \end{aligned}$$

come si voleva. $\square$

Una applicazione della formula di Taylor del secondo ordine è la seguente.

Teorema 4.5.5 *Se f ha derivate seconde continue in $]a, b[$ e se $x \in]a, b[$ è tale che $f'(x) = 0$ e $f''(x) > 0$, allora sarà f ha un minimo in x.*

Osserviamo prima di dare una dimostrazione che il viceversa è falso. Se f ha un minimo in x, allora non è detto che la sua derivata seconda sia positiva. Questo è provato dalla funzione $f(x) = x^4$.

Dimostraz. Basta scrivere la formula di Taylor di punto iniziale x. Si ottiene:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + R(h) = f(x) + f''(x)\frac{h^2}{2} + R(h), \tag{11}$$

dove $R(h) = o(h^2)$. Per definizione di o piccolo dato un qualsiasi $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\left|\frac{R(h)}{h^2}\right| \le \varepsilon, \quad \text{se } 0 < |h| < \delta_\varepsilon. \tag{12}$$

La situazione suggerisce di scegliere $\varepsilon = f''(x)/4$. Dunque (12) diventa

$$-\frac{f''(x)}{4}h^2 < R(h) < \frac{f''(x)}{4}h^2, \quad \text{se } 0 < |h| < \delta_\varepsilon.$$

Se inseriamo questa informazione in (11), abbiamo, per $0 < |h| < \delta_\varepsilon$,

$$f(x+h) - f(x) = f''(x)\frac{h^2}{2} + R(h) > f''(x)\frac{h^2}{2} - f''(x)\frac{h^2}{4} > f''(x)\frac{h^2}{4} > 0.$$

Quindi x è un punto di minimo locale. □

Esercizio 4.5.6 *Determinare i punti di massimo o di minimo di $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + e^{-x}$. Soluzione: $x = 0$ è punto di minimo (assoluto).*

4.6 Successioni $(*)$

Una successione è una funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, cioè una funzione definita su $\mathbb{N} = 1, 2, 3, \ldots$, a valori reali. In altre parole, una legge f che ad ogni $n \in \mathbb{N}$ associa $f(n) \in \mathbb{N}$.

Per tradizione, in letteratura la variabile di una successione non è messa tra parentesi, ma come indice. La successione si indica con $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ o con (a_n).

Esempio. Definiamo la successione (a_n) come segue. $a_n = n^2$, oer ogni $n \in \mathbb{N}$. È la successione che a ogni numero $n \in \mathbb{N}$ associa il suo quadrato. $1 \mapsto a_1 = 1^2 = 1$, $2 \mapsto a_2 = 2^2 = 4$, e via dicendo.

Si può parlare di limite di successione, imitando la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Definizione 4.6.1 *Si dice che (a_n) tende a $L \in \mathbb{R}$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon > 0$ per cui*

$$|a_n - L| < \varepsilon, \quad \textit{per ogni } n > n_\varepsilon.$$

Ad esempio, ragionando nello stesso modo in cui si verifica che $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, si puo' vedere che $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$.

Enunciamo (senza dimostrazione) il seguente teorema.

Teorema 4.6.2 (Limiti di successioni monotone) *Se (a_n) è una successione monotona crescente,*[16] *cioè*

$$a_n \le a_{n+1}, \quad \forall\, n\in\mathbb{N},$$

allora (a_n) ammette limite. Cioè esiste un $L\in\mathbb{R}$, o eventualmente $L=+\infty$, tale che $\lim_{n\to+\infty}a_n = L$.

Esempio 4.6.3 (Numero di Nepero e capitalizzazione) *Se mettiamo in banca un capitale C e l'interesse annuo è i, allora dopo un anno avremo un capitale*

$$c_1 = C(1+i).$$

Se la banca ci pagasse un interesse semestrale di $i/2$, saremmo avvantaggiati, perché, a fine anno avremmo un capitale

$$c_2 = C\Big(1+\frac{i}{2}\Big)\Big(1+\frac{i}{2}\Big) = C\Big(1+\frac{i}{2}\Big)^2 = C\Big(1+i+\frac{i^2}{4}\Big),$$

che è piu' grande di c_1. Possiamo chiederci cosa succederebbe se gli interessi fossero pagati n volte. In questo caso, a fine anno avremmo un capitale di $c_n = C\Big(1+\frac{i}{n}\Big)^n$. Si puo' verficare, con un esercizio non banale, che in effetti c_n è monotona crescente, cioè che

$$c_n < c_{n+1}, \quad \forall n.$$

Il limite di c_n è in effetti uno dei limiti notevoli già incontrati. Infatti,

$$\lim c_n = \lim_{n\to+\infty} C\Big(1+\frac{i}{n}\Big)^n = \lim_{n\to+\infty} C\Big\{\Big(1+\frac{i}{n}\Big)^{\frac{n}{i}}\Big\}^i.$$

Ponendo $i/n=x$, osserviamo che per $n\to+\infty$ vale $x\to 0+$. Possiamo calcolare il limite

$$\lim_{x\to0+}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to0+}\exp(\log((1+x)^{1/x})) = \lim_{x\to0+}\exp\left\{\frac{1}{x}\log(1+x)\right\} = e,$$

grazie al limite notevole del logaritmo discusso nei giorni passati. Da qui si deduce che $\lim_{n\to+\infty}c_n = Ce^i$.

5 Integrali

5.1 Costruzione $(*)$

Consideramo una funzione f continua su $[0,1]$. L'integrale di f si definisce tramite un processo di limite di due successioni. La successione delle somme inferiori s_n e quella delle somme superori S_n.

[16]Lo stesso teorema vale se f è decrescente. In quel caso L puo' essere $-\infty$.

Le successioni sono costruite come segue. Usiamo qui la notazione

$$\min_{[\alpha,\beta]} f = \min\{f(x) : x \in [\alpha,\beta]\},$$

per ogni intervallo $[\alpha,\beta] \subset [0,1]$. Osserviamo che, poiché f è continua, minimo e massimo sono realizzati in un punto. Cioè esistono $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ per i quali vale $f(x_1) = \min_{[\alpha,\beta]} f$ e $f(x_2) = \max_{[\alpha,\beta]} f$. Poniamo

$$\begin{aligned}
s_0 &= 1 \cdot \min_{[0,1]} f \\
s_1 &= \frac{1}{2} \cdot \min_{[0,\frac{1}{2}]} f + \frac{1}{2} \cdot \min_{[\frac{1}{2},1]} f, \\
s_2 &= \frac{1}{4} \cdot \min_{[0,\frac{1}{4}]} f + \frac{1}{4} \cdot \min_{[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]} f + \frac{1}{4} \cdot \min_{[\frac{1}{2}\frac{3}{4}]} f + \frac{1}{4} \cdot \min_{[\frac{3}{4},1]} f,
\end{aligned}$$

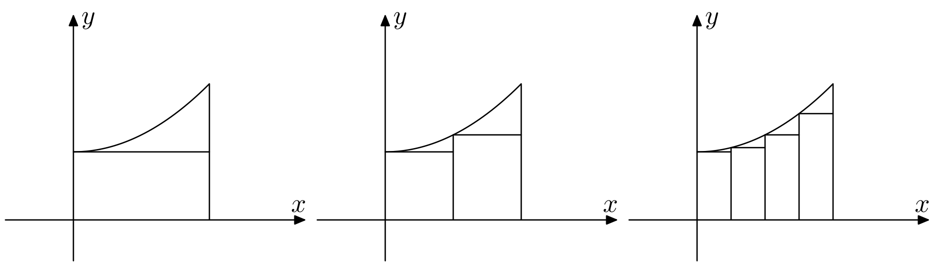

Figura 9: I primi tre passi dell'approssimazione tramite somme inferiori.

Al passo $n-$esimo avremo

$$s_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \min_{[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}]} f.$$

In modo analogo definiamo la successione delle somme superiori, sostituendo però il minimo con il massimo.

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \max_{[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}]} f.$$

Si vede immediatamente che $S_n \geq s_n$ (il massimo di una funzione su un insieme è sempre maggiore o uguale al minimo). Inoltre se f è costante, $f(x) = k$, allora sarà $s_n = S_n = k$, per ogni n. Evidenziamo ora altre proprietà delle due successioni:

(a) $s_n \leq s_{n+1}$, per ogni $n = 1, 2, \ldots$. (s_n monotona crescente).

(b) $S_n \geq S_{n+1}$, per ogni $n = 1, 2, \ldots$. (S_n monotona decrescente).

(c) $s_n \leq S_m$, per ogni $n, m = 1, 2, \ldots$.

Diamo l'idea della verifica di (a). Consideriamo il caso $n = 1$. Si tratta di osservare che

$$\min_{[0,\frac{1}{2}]} f \geq \min_{[0,1]} f, \qquad \text{e} \qquad \min_{[\frac{1}{2},1]} f \geq \min_{[0,1]} f \tag{13}$$

(il minimo decresce, se ingrandiamo l'insieme su cui lo calcoliamo). Allora risulta

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot \min_{[0,\frac{1}{2}]} f + \frac{1}{2} \cdot \min_{[\frac{1}{2},1]} f \geq \frac{1}{2} \cdot \min_{[0,1]} f + \frac{1}{2} \cdot \min_{[0,1]} f = 1 \cdot \min_{[0,1]} f = s_1.$$

Capito ciò , è facile riconoscere che $s_2 \leq s_3$ e via dicendo.

La proprietà (b) si puo' riconoscere analogamente alle (a), osservando che la disuguaglianza (13) si rovescia, se sostituiamo il minimo con il massimo.

Una volta vista la monotonia di (s_n) e di (S_n), possiamo verificare (c). Supponiamo ad esempio che $n \geq m$. Osserviamo ancora che $S_n \geq s_n$. Infatti,

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \max_{[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}]} f - \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \min_{[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}]} f = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \Big\{ \max_{[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}]} f - \min_{[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}]} f \Big\}.$$

Poiché ciascuno dei termini nelle graffe è ≥ 0, la loro somma sarà ≥ 0. Quindi $S_n \geq s_n$. D' altra parte, visto che $(S_n)_n$ è decrescente (proprietà (b)), sarà $S_m \geq S_n$. Quindi

$$S_m - s_n \geq S_n - s_n \geq 0,$$

che è la proprietà (c).

Le proprietà (a), (b) e (c) ora discusse, permettono di concludere che, se indichiamo con $s = \lim_{n\to+\infty} s_n$ ed $S = \lim_{n\to+\infty} S_n$, allora risulta

$$s \leq S.$$

Quindi, l'approssimazione "da sotto" ha un limite $\leq$ dell' approssimazione "da sopra". In effetti, si puo' provare che i due limiti coincidono per tutte le funzioni continue.

Teorema 5.1.1 *Se f è continua su $[0, 1]$, allora $\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$. Il valore comune dei due limiti si chiama integrale di f e si indica con*

$$\int_0^1 f(x)dx, \qquad \textit{o, piu' brevemente, con} \qquad \int_0^1 f.$$

La costruzione delle somme superiori e inferiori fatta qui, puo' essere generalizzata a un intervallo arbitrario $[a, b]$ per una funzione f continua su $[a, b]$, conducendo alla definizione di $\int_a^b f$.

La dimostrazione del Teorema 5.1.1 non è facile e non verrà presentata qui.

5.2 Proprietà elementari dell'integrale

L'integrale ha le seguenti proprietà , che possono essere verificate a partire dalla definizione:

Proprietà di linearità. Se f e g sono funzioni continue, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ \displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx. \end{array}\right\} \quad \text{(Proprietà di linearità)}$$

Proprietà di additività. Se conveniamo poi di porre, quando $b < a$,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

vale, per f continua in $\mathbb{R}$ e $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \qquad \text{(Proprietà di additività).}$$

Proprietà di monotonia.

$$f(x) \geq 0 \text{ su } [a,b] \ \Rightarrow \ \int_a^b f \geq 0. \tag{14}$$

Osserviamo che per una funzione positiv a e continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, il numero $\displaystyle\int_a^b f$ definisce l'area della parte di piano compresa tra il grafico di f e l'asse x, delimitata dalle rette $x = a$ e $x = b$. La formula (14) dice anche che

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{ su } [a,b] \quad \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

La definizione come limite della successione delle somme inferiori o superiori non è utile a calcolare concretamente un integrale (a meno che non lo si voglia calcolare numericamente).

5.3 Primitive e funzioni integrali

Ai fini del calcolo di qualche integrale semplice, introduciamo la nozione di primitiva

Definizione 5.3.1 (Primitiva di una funzione) *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo aperto $A =]a, b[$. Una funzione F derivabile in A si chiama* primitiva *di f in A se vale*

$$F'(x) = f(x), \quad \textit{per ogni } x \in A.$$

Esempio 5.3.2 *Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3$, la funzione $F(x) = 3x + 2$ è una primitiva di f in $\mathbb{R}$. Infatti vale $F'(x) = 3$.*

Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, la funzione $F(x) = \frac{x^2}{2}$ è una primitiva di f in $\mathbb{R}$. Infatti $\frac{d}{dx}x^2/2 = x$. Osserviamo che avremmo potuto scegliere $F(x) = \frac{x^2}{2} + k$, con k costante arbitraria ottenendo sempre una primitiva di f.

Teorema 5.3.3 (Proprietà delle primitive) *Data una funzione f:*

(A) Se F è una primitiva di f in un intervallo A, allora la funzione $x \mapsto F(x) + k$ è una primitiva di f in A per ogni $k \in \mathbb{R}$.

(B) Se F e G sono due primitive di f in un intervallo A, allora esiste una costante $k \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) - G(x) = k$, per ogni $x \in A$.

Dimostrazione del Teorema 5.3.3. Parte (A). È una immediata conseguenza del fatto che la derivata di una funzione costante è nulla.

Parte (B). Se F e G sono entrambe primitive di f. Pertanto

$$\frac{d}{dx}(F(x) - G(x)) = f(x) - f(x) = 0,$$

per ogni $x \in A$. Quindi la funzione $x \mapsto F(x) - G(x)$ ha derivata identicamente nulla nell'intervallo A. Pertanto è costante, grazie al Corollario 4.1.6. □

Funzioni integrali. Se f è una funzione continua su un intervallo A, allora, fissato un punto $c \in A$, per ogni $x \in A$ è definito l'integrale $\int_c^x f(t)dt$. Indichiamo la funzione $x \mapsto \int_c^x f(t)dt$ con I_c.

$$I_c(x) = \int_c^x f(t)dt, \quad x \in A.$$

Chiameremo I_c funzione integrale di f con estremo inferiore c.

Osservazione 5.3.4 (Funzioni integrali e funzioni di ripartizione) *Osserviamo che la nozione di funzione integrale è strettamente legata a quella di funzione di ripartizione in Probabilità . Ad esempio, se X è una variabile aleatoria sull'intervallo $[0, 1]$ con densità continua $f_X : [0, 1] \to \mathbb{R}$, allora la funzione di ripartizione*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt$$

di X coincide esattamente con la funzione I_0.

Osservazione 5.3.5 *Se scegliamo due punti base c, c' diversi, allora le funzioni integrali I_c e $I_{c'}$ differiscono per una costante. Infatti, per la additività dell'integrale,*

$$I_c(x) - I_{c'}(x) = \int_c^x f - \int_{c'}^x f = \int_c^{c'} f = \textit{costante}.$$

5.4 Teorema fondamentale del calcolo

Teorema 5.4.1 (Teorema fondamentale del calcolo integrale) *Se f è continua su un intervallo aperto A e $c \in A$ è fissato, allora*

$$I'_c(x) = \frac{d}{dx}\int_c^x f(t)dt = f(x), \quad \forall\, x \in A.$$

Esempio 5.4.2 *Calcoliamo usando Il Teorema fondamentale del calcolo la derivata*

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(t^2)dt.$$

Usiamo la funzione $f(t) = \sin(t^2)$. Quindi

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(t^2)dt = \sin(x^2).$$

Per calcolare quella derivata non è necessario calcolare l'integrale (anche ammesso che si sappia farlo, questo sarebbe uno spreco di energie). Analogamente

$$\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2} = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione del Teorema fondamentale del calcolo. Fissiamo $x \in A$. Dobbiamo provare che

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x) \quad \text{cioè} \quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(x).$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché f è continua in x, per definizione di funzione continua, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \text{ con } |t - x| < \varepsilon. \tag{15}$$

Ora scegliamo $h < \delta_\varepsilon$, per comodità positivo (il caso $h < 0$ è analogo). Allora, facendo l'integrale $\int_x^{x+h} f(t)dt$, saranno coinvolti in esso solo valori di $t \in [x, x+h]$. Quindi $|t - x| < \delta_\varepsilon$, in tutto l'intervallo di integrazione. Quindi, per la proprietà di monotonia dell'integrale, (15) fornisce

$$\int_x^{x+h} [f(x) - \varepsilon]dt < \int_x^{x+h} f(t)dt = \int_x^{x+h} [f(x) + \varepsilon]dt,$$

che, visto che i due integrali agli estremi sono integrali di funzioni costanti, diventa

$$h[f(x) - \varepsilon] < \int_x^{x+h} f(t)dt < h[f(x) + \varepsilon].$$

Poiché stiamo considerando il caso $h > 0$, dividendo per h avremo

$$f(x) - \varepsilon < \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt < f(x) + \varepsilon.$$

Le due disuguaglianze scritte in questa riga valgono non appena $0 \le h < \delta_\varepsilon$. Quindi abbiamo di fatto verificato che la definizione di limite è soddisfatta per il limite

$$\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(x).$$

Con una minima modifica si vede che anche per $h \to 0-$ il limite è lo stesso. Quindi il teorema è provato. □

Corollario 5.4.3 (Teorema di Torricelli) *Sia f continua su A e sia F una sua primitiva. Allora, in ogni intervallo $[a, b] \subset A$, vale*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{16}$$

Si usano di solito le notazioni equivalenti

$$F(b) - F(a) = \big[F(x)\big]_{x=b}^{x=a} = F(x)\Big|_{x=b}^{x=a}.$$

Dimostrazione. Fissiamo una qualsiasi funzione integrale I_c. Per il Teorema fondamentale del calcolo I_c è una primitiva di f. Quindi, per le proprietà delle primitive, le due primitive I_c e F differiscono per una costante k: $I_c(x) = F(x) + k$, $x \in A$. Ma allora

$$\begin{aligned}\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f = -\int_c^a f + \int_c^b f = -I_c(a) + I_c(b)\\ = -[F(a) + k] + F(b) + k = F(b) - F(a),\end{aligned}$$

come si voleva. □

Esempio 5.4.4 *Calcoliamo $\int_1^2 xdx$. Poiché $F(x) = x^2/2$ è una primitiva della funzione integranda, avremo*

$$\int_1^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2}.$$

5.5 Tabella di alcune primitive elementari

$f(x)$	$F(x)$
$x^n,$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, ...$
$e^x,$	$e^x, \quad x \in \mathbb{R},$
$\cos x,$	$\sin x, \quad x \in \mathbb{R},$
$\sin x,$	$-\cos x, \quad x \in \mathbb{R},$
$x^\alpha,$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1, x > 0,$
$\frac{1}{x},$	$\log \lvert x \rvert, \quad x \neq 0.$

Esercizio 5.5.1 *Calcolare con la tabella appena scritta*

$$\int_1^2 [\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}]dx,$$

$$\int_1^3 (2x^3 + x^{3/2})dx, \quad \int_{-1}^{-1/2} \frac{dx}{x}, \quad \int_0^\pi \sin x dx, \int_{-\pi}^\pi \cos x dx.$$

Esempio 5.5.2 *Se X è una variabila aleatoria distribuita su $[0,1]$ con una densità $f_X(x) = cx^2$,*

(a) dire qual è la costante c di normalizzazione.

(b) dire come è distribuita la variabile $Y = X^2$.

La costante si trova richiedendo che $\int_0^1 f_X(x) = 1$. Calcolando l'integrale,

$$\int_0^1 cx^2 dx = c\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{c}{3} = 1 \quad \Leftrightarrow c = 3.$$

Quindi la risposta ad (a) è $c = 3$.

Per rispondere a (b), un modo possibile consiste nel cercare la funzione di ripartizione di Y. Per $y \in [0,1]$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \le y) = \mathbb{P}(X^2 \le y) = \mathbb{P}(X \le \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} 3x^2 dx = x^3\Big|_0^{\sqrt{y}} = y^{3/2}.$$

Quindi $F_Y(y) = y^{3/2}$ e, di conseguenza, la densità risulta essere

$$f_Y(y) = \frac{3}{2}y^{1/2}.$$

6 Tecniche di calcolo degli integrali

Descriviamo ora alcune tecniche per il calcolo esplicito di integrali.

6.1 Integrali di derivate di funzioni composte

Date due funzioni f, g tali che si possa scrivere $f \circ g$, vale la formula

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Allora il Teorema di Torricelli assicura che

$$\int_a^b f'(g(x))g'(x)dx = \int_a^b \frac{d}{dx} f(g(x))dx = [f(g(x))]_a^b. \tag{17}$$

Da (17) si possono ottenere numerose primitive in modo quasi immediato.
Come applicazione della formula (17) si svolga il seguente esercizio.

Esercizio 6.1.1 *Sia g una funzione derivabile su $\mathbb{R}$. Dire quanto vale la derivata della funzione composta $h(x) = e^{g(x)}$. Usando questo calcolo (assieme al Teorema di Torricelli) dire quanto vale l'integrale $\int_a^b e^{g(x)} g'(x)dx$.*

Calcolare, usando le considerazioni appena fatte e scegliendo di volta in volta una $g(x)$ opportuna, gli integrali

$$\int_1^2 2xe^{x^2} dx, \quad \int_0^5 e^{-x} dx, \quad \int_3^5 x^2 e^{-x^3} dx, \quad \int_0^3 e^{\sin x} \cos x dx, \quad \int_0^\pi e^{\cos x} \sin x \, dx.$$

Esercizio 6.1.2 *Nello stesso spirito dell'esercizio precedente, scrivere la derivata della funzione composta $h(x) = \log(g(x))$, dove $g(x)$ e' una funzione positiva. Usare questo risultato per calcolare gli integrali*

$$\int_1^2 \frac{x^2}{1+x^3} dx, \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

Esercizio 6.1.3 *Ancora ragionando come sopra, ma usando l'espressione della derivata della funzione composta $h(x) = \sin(g(x))$, calcolare*

$$\int_0^{\pi^{1/3}} x^2 \cos(x^3) dx, \quad \int_{-\sqrt{\pi}}^0 x \cos x^2 dx.$$

Sostituendo la funzione seno con la funzione coseno, calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2x) dx, \quad \int_0^{\pi^2/4} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$$

Esercizio 6.1.4 *Calcolare*

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos(x) dx.$$

6.2 Integrazione per parti

Teorema 6.2.5 (Formula di integrazione per parti) *Se f è continua su $[a,b]$ e g è derivabile in ogni punto di $[a,b]$, allora, indicando con F una primitiva di f in $[a,b]$, si ha*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \big[F(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx. \tag{1}$$

Dimostrazione. Basta calcolare la derivata

$$\frac{d}{dx}F(x)g(x) = F'(x)g(x) + f(x)g'(x) = f(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Integrando su $[a,b]$

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(F(x)g(x))dx = \int_a^b (f(x)g(x) + f(x)g'(x))dx.$$

Quindi per la Formula di Torricelli,

$$\big[F(x)g(x)\big]_a^b = \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

che dà immediatamente (1).

Esempio 6.2.6 *Calcoliamo $\int_0^1 xe^x dx$. Scegliendo $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, abbiamo*

$$\int_0^1 xe^x dx = \big[xe^x\big]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = \big[xe^x - e^x\big]_0^1 = 1.$$

Analogamente, per integrare la funzione logaritmo,

$$\int_a^b \log x \ dx = \int_a^b 1 \cdot \log x dx = \big[x \log x\big]_a^b - \int_a^b 1 dx = \big[x \log x - x\big]_a^b$$

Un ultimo esempio di integrazione per parti

$$\int_a^b x \sin x dx = [x \cdot (-\cos x)]_a^b - \int_a^b (-\cos x)dx = \big[-x\cos x + \sin x\big]_a^b.$$

6.3 Cambi di variabile

Teorema 6.3.1 (Cambio di variabile negli integrali) *Se f è continua su $[a,b]$ e se $h : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ è una funzione derivabile, allora vale la formula*

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(h(t))h'(t)dt \tag{2}$$

Prima di dare la dimostrazione, applichiamo la formula al calcolo del seguente integrale:

$$\int_0^4 \sin\sqrt{x}\,dx.$$

Poniamo $\sqrt{x} = t$. Quindi avremo $x = t^2 = h(t)$. Scegliendo $\alpha = 0$ e $\beta = 2$, avremo $h(0) = 0$ e $h(2) = 4$. Inoltre $h'(t) = 2t$. Quindi

$$\int_0^4 \sin\sqrt{x}\,dx = \int_0^2 (\sin t)\, 2t dt.$$

Questo ultimo integrale è stato calcolato nell'esempio precedente, integrando per parti.

Dimostrazione della formula del cambio di variabile. Basta considerare le due funzioni F e G definite su $[\alpha, \beta]$ come segue

$$F(z) = \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx \qquad \text{e} \qquad G(z) = \int_{\alpha}^{z} f(h(t))h'(t)dt.$$

Dire che vale la formula (2) e' esattamente equivalente a dire che vale $F(\beta) = G(\beta)$. Per riconoscere cio', verifichiamo:

(1) che F e G hanno la stessa derivata su $]\alpha, \beta[$.

(2) Che F e G coincidono in un punto almeno.

Per provare che $F' = G'$, basta applicare il Teorema Fondamentale del Calcolo:

$$G'(z) = f(h(z))h'(z).$$

La derivata di F si ottiene derivando la funzione composta

$$z \mapsto h(z) \mapsto \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx$$

e vale, di nuovo per il Teorema fondamentale del calcolo,

$$F'(z) = f(h(z))h'(z).$$

Quindi le due funzioni hanno la stessa derivata in ogni punto. Pertanto differiscono per una costante k. D'altra parte, tanto G quanto F valgono zero, per $z = \alpha$. Ciò significa che la costante k è zero. Quindi $G = F$ su tutto $[\alpha, \beta]$. In particolare sarà $G(\beta) = F(\beta)$, che è esattamente (2). $\square$

6.4 Esercizi sul Teorema fondamentale del calcolo.

Esercizio 6.4.1 *Dire, usando il Teorema fondamentale del calcolo, quanto valgono le derivate delle funzioni*

$$f(x) = \int_0^x \cos(t^2)dt, \qquad \int_x^0 \sin te^t dt.$$

Esercizio 6.4.2 *Consideriamo, data una funzione f continua, la sua funzione integrale di estremo inferiore $c = 0$ e la indichiamo con I. $I(x) = \int_0^x f(t)dt$. Il Teorema fondamentale del calcolo afferma che $I'(x) = f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.*

Se g e' una funzione qualsiasi derivabile, dire quanto vale la derivata della funzione composta $x \mapsto I(g(x))$.

Usare la risposta alla domanda appena posta per calcolare le derivate

$$\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} f(t)dt, \quad \frac{d}{dx}\int_0^{x^2+x} e^{-t^2}dt, \quad \int_x^{2x} t^2 e^t dt.$$

(per calcolare l'ultima derivata, si provi a scrivere l'integrale come somma di due integrali usando la additività $\int_a^b f = \int_a^0 f + \int_0^b f$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$).

6.5 Integrali generalizzati

In questa parte ci occupiamo di definire in modo corretto l' integrale di una funzione continua su un intervallo illimitato. Consideriamo una funzione continua su $[a, +\infty[$ e non negativa.

Definizione 6.5.1 *Sia $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua che assume valori non negativi, $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, +\infty[$. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $[a, +\infty[$ se il limite*

$$\lim_{R\to+\infty}\int_a^R f(x)dx$$

esiste finito. *In tal caso poniamo*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty}\int_a^R f(x)dx$$

Se invece il limite è $+\infty$, allora diciamo che la funzione non e' integrabile in senso generalizzato.

Una terminologia equivalente è: l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ e' convergente, se il limite e' finito, oppure divergente se il limite è $+\infty$.

Esempio 6.5.2 *La funzione $f(x) = 1$ non è integrabile in senzo generalizzato su $[0, +\infty[$. Infatti,*

$$\lim_{R\to+\infty}\int_0^R 1dx = \lim_{R\to+\infty} R = +\infty.$$

La funzione $f(x) = e^{-x}$ e' invece integrabile in senzo generalizzato su $[0, +\infty)$. Infatti, preso $R > 0$,

$$\int_0^R e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^R = 1 - e^{-R} \longrightarrow 1, \quad \textit{per } R \to +\infty. \tag{3}$$

Quindi $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$. L'integrale e' convergente.

Vale la pena osservare che se f è non negativa su $[a, +\infty[$, allora la funzione

$$R \mapsto \int_a^R f(x)dx.$$

è crescente su $[a, +\infty[$. QUindi si puo' essere certi [17] che il suo limite per $R \to \infty$ esiste (finito o $+\infty$).

Esempio 6.5.3 *Consideriamo la funzione $f(x) = x^\alpha$, per $\alpha \in \mathbb{R}$. Esaminiamo per quali α l'integrale $\int_1^{+\infty}$ e' convergente.*

Per discutere l'esempio, dividiamo 2 casi: $\alpha = -1$ ed $\alpha \neq -1$. Nel primo caso

$$\int_1^R \frac{dx}{x} = [\log x]_1^R = \log R \to +\infty, \quad \textit{per } R \to +\infty.$$

Quindi l'integrale e' divergente.

Nel secondo caso

$$\int_1^R x^\alpha dx = \Big[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big]_1^R = \frac{R^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}.$$

Ora, se $\alpha + 1 < 0$, $\lim_{R\to+\infty} R^{\alpha+1} = 0$, mentre se $\alpha + 1 > 0$, $\lim_{R\to+\infty} R^{\alpha+1} = +\infty$. QUindi l'integrale e' convergente soltanto se $\alpha + 1 < 0$. In tal caso vale

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha dx = -\frac{1}{\alpha+1}.$$

Per $\alpha \geq -1$ l'integrale è divergente.

Diamo ora la definizione per integrali del tipo $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Definizione 6.5.4 *Se $f :]-\infty, b]$ e' continua e non negativa, poniamo*

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{R\to-\infty} \int_R^b f(x)dx.$$

Diciamo che l'integrale e' convergente se il limite e' finito e che l'integrale e' divergente se il limite e' $+\infty$.

Infine: se $f :]-\infty, +\infty[$ e' continua e non negativa, diciamo che f è integrabile in senso generalizzato su $]-\infty, +\infty[$ se e' integrabile in senso generalizzato in entrambi gli intervalli $]-\infty, 0]$ e $[0, +\infty[$. In tal caso poniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^0 f(x)dx + \int_0^{+\infty} f(x)dx.$$

Esempio 6.5.5 *Calcolare l'integrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$.*

Integriamo per parti:

$$\int_0^R xe^{-x}dx = [-xe^{-x}]_0^R - \int_0^R e^{-xdx} = -Re^{-R} + 0 + \int_0^R e^{-xdx} \to 1,$$

per $R \to +\infty$. Infatti, $\lim_{R\to+\infty} Re^{-R} = 0$ e, come visto sopra, $\int_0^R e^{-xdx} \to 1$, per $R \to +\infty$.

[17] Una dimostrazione rigorosa di questo fatto esula pero' dagli scopi di questo corso

Funzione Gamma Poniamo, per $k = 1, 2, 3, \dots,$ [18]

$$\Gamma(k) = \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-x} dx.$$

Abbiamo già visto che $\Gamma(1) = 1$. Infatti

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1,$$

come visto in (3). Verifichiamo ora la seguente proprietà.

$$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k), \quad k > 1. \tag{4}$$

Prima di verificare (4), notiamo che, applicando questa formula ripetutamente si trova, per ogni k numero naturale

$$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k) = k(k-1)\Gamma(k-1) = \cdots = k!.$$

Quindi la funzione Γ dà anche una rappresentazione del fattoriale.

La verifica di (4) e' un esercizio sulla integrazione per parti.

$$\int_0^R x^k e^{-x} dx = [-x^k e^{-x}]_0^R + k \int_0^R x^{k-1} e^{-x} dx = -R^k e^{-R} + k \int_0^R x^{k-1} e^{-x} dx.$$

Poiché $\lim_{R \to +\infty} R^k e^{-R} = 0$, avremo

$$\lim_{R \to +\infty} \int_0^R x^k e^{-x} dx = k \lim_{R \to +\infty} \int_0^R x^{k-1} e^{-x} dx.$$

Esempio 6.5.6 (Distribuzione Gamma) *Consideriamo la funzione* $f : [0, +\infty] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$, *con* $\alpha, \beta > 0$. *Determiniamo la costante di normalizzazione* $C_{\alpha,\beta}$ *che rende la funzione* $f_{\alpha,\beta} = C_{\alpha,\beta} f(x)$ *una densità di probabilità su* $[0, +\infty[$.

Si tratta semplicemente di calcolare l'integrale di f*:*

$$\begin{aligned}
&\int_0^R x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} dx \\
&= \text{(poniamo } x/\beta = t,\ dx = \beta dt,\ x = R \Rightarrow t = \beta R\text{)} \\
&= \int_0^{\beta R} \beta^{\alpha-1} t^{\alpha-1} e^{-t} \beta dt \to \beta^\alpha \Gamma(\alpha), \text{ per } R \to +\infty.
\end{aligned}$$

QUindi la funzione

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$$

definisce una densità di probabilità su $[0, +\infty)$.

---

[18] In realtà questo integrale e' convergente per ogni $k > 0$, numero reale. Questo pero' richiederebbe qualche precisazione in piu', visto che $\lim_{x \to 0+} x^{k-1} e^{-x} = +\infty$, se $0 < k < 1$.

Esempi

Esercizio 6.5.7 (Media e varianza della distribuzione Gamma) *È data una variabile X distribuita su $0, +\infty[$ con densità*

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}.$$

Verificare che

$$E(X) = \int_0^{+\infty} x f_{\alpha,\beta}(x) dx = \alpha\beta \quad e \quad \mathrm{Var}(X) = \int_0^{+\infty} (x - E(X))^2 f_{\alpha,\beta}(x) dx = \alpha\beta^2.$$

Nell'esercizio seguente, assumiamo come noto il valore dell'integrale di Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \tag{5}$$

Esercizio 6.5.8 (Media e varianza della distribuzione di Gauss) *Dati $\mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma > 0$, una variabile X ha una distribuzione normale di parameri μ e σ^2 se la sua densità è data dalla funzione*

$$N_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big).$$

Verificare, con il cambio di di variabile $\dfrac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}} = t$ e usando (5), che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N_{\mu,\sigma^2}(x) dx = 1.$$

Se X ha densità N_{μ,σ^2}, verificare che

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x N_{\mu,\sigma^2}(x) dx = \mu.$$

Verificare infine con una opportuna integrazione per parti, che

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 dx N_{\mu,\sigma^2}(x) dx = \sigma^2.$$