Insiemi di livello.

Data $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, l'insieme di livello c di f è

$$\{x \in S : f(x) = c\}$$

Esempio 8.4 *Analisi degli insiemi di livello delle funzioni* $f(x,y) = x + y$, $f(x,y) = x^2 + y^2$, $f(x,y) = xy$ *al variare di* $c \in \mathbb{R}$.

Teorema della funzione implicita Ci domandiamo quando un insieme di livello della forma $G(x,y) = c$ possa essere scritto come grafico del tipo $y = \phi(x)$ oppure $x = \phi(y)$ per una opportuna funzione ϕ.

Analisi dettagliata dei seguenti esempi:

Esempio 8.5 *La funzione* $f(x,y) = ax + by$.

Esempio 8.6 *La funzione* $f(x,y) = x^2 - y^2$.

Esempio 8.7 *La funzione* $f(x,y) = x^2 + y^2$.

9 6 marzo 2009

Teorema 9.1 (Teorema della funzione implicita (Teor. 5.3)) *Data* $G : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *con* A *aperto di* $\mathbb{R}^2$ *e* G *di classe* C^1, *supponiamo che in* $(x_0, y_0) \in A$ *avvenga che*

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0. \tag{14}$$

Allora esistono due intervalli $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *e* $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ *e una funzione* $\phi : I \to J$ *tali che*

$$\{(x,y) \in A : G(x,y) = G(x_0,y_0)\} \cap (I \times J) = \{(x,y) \in I \times J : y = \phi(x)\}.$$

Osservazione 9.2 *A partire dall' identità* $G(x.\phi(x)) = c$, *valida per* $x \in I$, *derivando rispetto ad* x, *si puo' calcolare* ϕ' *in termini delle derivate parziali di* G. *Precisamente*

$$\phi'(x) = -\frac{\partial_x G(x, \phi(x))}{\partial_y G(x, \phi(x))}, \tag{15}$$

per x *vicino a* x_0.

Un risultato analogo vale se $\partial G/\partial x(x_0, y_0) \neq 0$. Allora il grafico sara' del tipo $x = \psi(y)$ per qualche funzione ψ.

Esempio 9.3 *La funzione* $G(x,y) = x^2 + y^2$, *attorno al punto* $(x_0, y_0) = (0,1)$. *Verificare se* $\partial G/\partial y(0,1) \neq 0$. *Scrivere esplicitamente* $y = f(x)$.

La funzione $G(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_2^3$, *attorno al punto* $(0,1)$. *Verificare che* $\partial G/\partial x_2(0,1) \neq 0$. *Differenziare l'identita'* $G(x_1, \phi(x_1)) = 0$ *per ottenere* $\phi'(0)$.

Gradiente e insiemi di livello.

Definizione 9.4 (Insieme di livello regolare) *Data $G : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, di classe C^1, diciamo che l'insieme $x_0 \in A$ è un punto regolare per l'insieme di livello $\{x \in A : G(x) = G(x_0)\}$ se $\nabla G(x_0) \neq 0$. Se ogni punto x_0 in un insieme di livello $\{x \in A : G(x) = c\}$ è regolare diciamo che l'insieme di livello è regolare.*

Proposizione 9.5 ([SB], Teorema 5.4) *Se $x_0 \in \mathbb{R}^2$ è un punto regolare per $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, con G di classe C^1, allora $\nabla G(x_0)$ è perpendicolare all'insieme di livello di G contenente x_0.*

Verifica della Proposizione 9.5. Usare l'osservazione 9.2 per scrivere un vettore tangente all'insieme di livello in questione e constatare che e' ortogonale a $\nabla G(x_0)$.

Esercizio 9.6 *Data $F(x,y) = (y^2 + y)e^{x^2}$ e il punto $(x_0, y_0) = (1,1)$, dire a quale isieme di livello appartiene (x_0, y_0). E' possibile scrivere tale insieme localmente come grafico $y = \phi(x)$? Se si' calcolare $\phi'(1)$. E' possibile scrivere l'insieme localmente come grafico $x = \phi(y)$?*

Illustrazione della dimostrazione del teorema della funzione implicita in 2 variabili (libro, pag. 109). [12]

Teorema della funzione implicita. Caso di dimensione > 2.

Discussione dettagliata del caso tridimensionale.

Esercizio 9.7 *Dato l'insieme di livello definito in $\mathbb{R}^3$ da $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = x^3 e^y z + z^4 = 2\}$, verificare che $(1,0,1) \in \Sigma$. Verificare se è possibile scrivere Σ come grafico della forma $z = \phi(x,y)$ e in caso affermativo calcolare $\partial_x \phi(1.0)$ e $\partial_y \phi(1,0)$.*

Esercizio 9.8 *Data $G(x,y,z) = z^2 e^x + y e^y$, verificare se è possibile scrivere l'insieme di livello 0 di G attorno all'origine come grafico $z = \phi(x,y)$, $y = \phi(x,z)$ o $x = \phi(y,z)$.*

10 Martedi' 10 marzo

Teorema 10.1 (della funzione implicita in $\mathbb{R}^n$, [SB], Teorema 5.6, punto (a)) *Data $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, di classe C^1, consideriamo un insieme di livello $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = c\}$. Sia $a = (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) \in \Sigma$ un punto regolare.* [13] *Assumiamo che sia $\partial_n F(a) \neq 0$. Allora esiste una palla $B_\rho = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \|(x_1, \ldots, x_{n-1}) - (a_1, \ldots, a_{n-1})\| < \rho\}$, un intervallo $I_\varepsilon = (a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon)$ e una funzione $\phi : B_\rho \to I_\varepsilon$ di classe C^1, tali che*

$$\Sigma \cap (B_\rho \times I_\varepsilon) = \{(x,y) \in B_\rho \times I_\varepsilon : y = \phi(x)\}.$$

[12] Attenzione all'errore nel libro, p. 109. Sostituire l'affermazione errata

$$G(x, y_0 - \varepsilon) < 0 \quad \text{e} \quad G(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

con quella corretta: esiste $\delta \leq \varepsilon$ tale che

$$G(x, y_0 - \varepsilon) < 0 \quad \text{e} \quad G(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

[13] Cioè tale che valga $\nabla F(a) \neq 0$.

In particolare, $F(x_1, \ldots, x_{n-1}, \phi(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0$ *per ogni* $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in B_\rho$ *e*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = -\frac{\partial_j F(x_1, \ldots, x_{n-1}, \phi(x_1, \ldots, x_{n-1}))}{\partial_n F(x_1, \ldots, x_{n-1}, \phi(x_1, \ldots, x_{n-1}))},$$

per ogni $j = 1 \ldots, n-1$ *e* $(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in B_\rho$.

Esercizio 10.2 *Preso l'insieme definito in* $\mathbb{R}^n$ *dall'uguaglianza* $F(x_1, \ldots, x_n) = \|x\|^2 - x_1\|x\|^4 - 1 = 0$ *e il punto* $a = e_n = (0, 0, \ldots, 1)$*, verificare che questo insieme e' localmente attorno ad* a *un grafico del tipo* $x_n = \phi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ *e calcolare* $\frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x_1, \cdots x_{n-1})$ *per ogni* $j = 1, \ldots, n-1$ *e* $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ *vicino a zero.*

Ottimizzazione vincolata Consideriamo, date due funzioni f, h di due variabili a valori reali e di classe C^1, il problema

$$\begin{cases} \max f(x_1, x_2) \\ h(x_1, x_2) = c \end{cases} \tag{16}$$

Definizione 10.3 (punto di massimo/minimo vincolato per (16)) $\tilde{x}$ *è di massimo vinzolato per* (16) *se esiste* $\delta > 0$ *tale che* $f(x) \geq f(\tilde{x})$ *per ogni* $x \in B_\delta(\tilde{x})$ *tale che* $h(x) = c$.

- Considerazione geometrica ([SB, Figura 8.1, p. 179]): disegnando gli insiemi di livello di f, h si intuisce che, se $\tilde{x}$ è un punto di massimo per (16), allora gli insiemi di livello di f ed h debbono essere tangenti in $\tilde{x}$.

- Confronto tra la nozione di punto di massimo libero vs vincolato. Massimo libero implica massimo vincolato. Per il viceversa, analisi dell'esempio

$$\max x_1^2 - x_2^2, \quad \text{con vincolo} \quad x_1 = 0$$

  e

$$\max x_1^2 - x_2^2, \quad \text{con vincolo} \quad x_2 = 0.$$

Teorema 10.4 (Condizioni necessarie/punti critici vincolati) *Se* $\tilde{x}$ *è un punto di minimo vincolato per* (16)*, le funzioni* f, h *sono di classe* C^1 *e* $\tilde{x}$ *è regolare,* [14] *allora esiste* $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\nabla f(\tilde{x}) = \tilde{\mu} \nabla h(\tilde{x}). \tag{17}$$

Se $\tilde{x}$ soddisfa (17) si chiama *punto critico vincolato.* Il numero $\tilde{\mu}$ si chiama *moltiplicatore.*

Dimostrazione. Svolta usando il teorema della funzione implicita per h e l'analisi della funzione di una variabile $x \mapsto f(x, \phi(x))$.

Esercizio 10.5 *Calcolare i punti critici vincolati per il problema*

$$\begin{cases} \max x_1^2 + x_2 \\ \textit{con vincolo } x_1^2 + x_2^2 = 1. \end{cases}$$

[14] $\nabla h(\tilde{x}) \neq 0$

11 Mercoledì 11 marzo

Versione $n-$dimensionale del problema. Date f, h funzioni di classe C^1 di n variabili a valori scalari, consideriamo

$$\begin{cases} \max f(x) \\ \text{con vincolo } h(x) = c \end{cases} \tag{18}$$

Avremo quindi

Teorema 11.1 (Condizioni necessarie/punti critici vincolati) *Se $\tilde{x}$ è un punto di minimo vincolato per* (18) *e $\tilde{x}$ è regolare,* [15] *allora esiste $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(\tilde{x}) = \tilde{\mu} \nabla h(\tilde{x}).$$

Se $\tilde{x}$ soddisfa (17) si chiama *punto critico vincolato.*

Formalismo lagrangiano. In associazione al problema (18) introduciamo $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$L(x, \mu) = f(x) - \mu[h(x) - c]. \tag{19}$$

Proposizione 11.2 *$\tilde{x}$ è un punto critico vincolato per* (18) *se e solo se esiste $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$ tale che $(\tilde{x}, \tilde{\mu})$ è critico libero per L.*

La dimostrazione è del tutto elementare.

Esercizio 11.3 *Cercare i punti critici vincolati per*

$$\begin{cases} \max x_1 + x_2 \\ \textit{con } x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \max x_1 x_2 \\ \textit{con } x_1 + 2x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \max x_1^2 + x_2 x_3 \\ \textit{con } x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max \|x\|^2 \\ \textit{con } b \cdot x = c \end{cases} \quad \textit{dove } x \in \mathbb{R}^n \textit{ con } b \in \mathbb{R}^n \textit{ è fissato.}$$

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 + x_3^2 \\ \textit{con } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \end{cases}$$

Ottimizzazione con più vincoli di uguaglianza Caso di tre variabili e due vincoli.

$$\begin{cases} \max f(x, y, z) \\ \text{con } h_1(x, y, z) = c_1 \quad h_2(x, y, z) = c_2 \end{cases}$$

Breve discussione sul caso di due vincoli lineari del tipo

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \quad \text{e} \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_1 \end{cases} \tag{20}$$

Cosa succede a seconda che siano (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) linearmente dipendenti/indipendenti? Qual è la struttura dell'insieme di punti che soddisfano (20)?

[15] $\nabla h(\tilde{x}) \neq 0$

Problema con n variabili e $m < n$ vincoli. [SB, p. 185 e seguenti] Date $f, h_1, \ldots, h_m : A \to \mathbb{R}$, tutte funzioni di classe C^1, con A aperto di $\mathbb{R}^n$, consideriamo

$$\begin{cases} \max f(x) \\ \text{con vincoli} \\ h_1(x) = c_1 \\ \vdots \\ h_m(x) = c_m. \end{cases} \tag{21}$$

Definizione 11.4 (Vincolo regolare) *Date $h_1, \ldots, h_m : A \to \mathbb{R}$, funzioni di classe C^1 su A aperto di $\mathbb{R}^n$, assumiamo che l'insieme*

$$\Sigma := \{x \in A : h_1(x) = c_1, \ldots, h_m(x) = c_m\},$$

sia non vuoto. Allora diciamo che Σ è regolare se i gradienti $\nabla h_1(x), \ldots, \nabla h_m(x)$ sono linearmente indipendenti in ogni $x \in \Sigma$.

La *Lagrangiana* associata al problema (21) è la funzione $L : A \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$L(x, \mu_1, \ldots, \mu_m) = f(x) - \mu_1[h_1(x) - c_1] - \cdots - \mu_m[h_m(x) - c_m].$$

I candidati puntio di massimo/minimo per il problema (21) si cercheranno tra gli $\tilde{x} \in A$ per i quali esistono $\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_m$ tali che

$$\nabla L(\tilde{x}, \tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_m) = 0 \tag{22}$$

La condizione (22) è equivalente (verifica immediata) al sistema di $n + m$ equazioni nelle $n + m$ incognite $(x_1, \ldots, x_n, \mu_1, \ldots, \mu_m)$

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \mu_k \nabla h_k(x), \\ h_1(x) = c_1 \\ \vdots \\ h_m(x) = c_m. \end{cases} \tag{23}$$

Quando le equzioni (23) sono tutte soddisfatte in un $(\tilde{x}, \tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_m) \in A \times \mathbb{R}^m$, si dice che $\tilde{x}$ è un punto critico vincolato con moltiplicatori $\tilde{\mu}_1, \ldots, \tilde{\mu}_m$.

Esercizio 11.5 *Trovare i punti di critico vincolati per il problema*

$$\begin{cases} \min(x^2 + y^2 + z^2) \\ x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Esercizio 11.6 *Considerare il problema*

$$\begin{cases} \max / \min x^2 + y^2 \\ x^2 + y^2 + xy = 1 \end{cases}$$

Individuare i punti critici vincolati usando il programma maxima.

Soluzione: basta eseguire le seguenti righe di codice:

```
(% i1) L : x^2 + y^2 - m *(x^2 + x *y + y^2 -1 );
(% i2) E1:  diff(L,x)=0;
(% i3) E2:  diff(L,y)=0;
(% i4) E3:  diff(L,m)=0;
(% i5) solve ([E1,E2,E3],[x,y,m]) ;
```

12 Martedì 17 marzo

Esercizio 12.1 *Trovare i punti di critico vincolati per il problema*

$$\begin{cases} \min(xy + z^2) \\ x + y = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$