

17 Ottimizzazione vincolata. Condizioni del secondo ordine

Lavoriamo in dimensione $n = 2$. Siano date $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $h : A \rightarrow \mathbb{R}$, funzioni di classe C^1 su un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$. Fissiamo un livello b e consideriamo il problema vincolato

$$\begin{cases} \max / \min f(x) \\ h(x) = b \end{cases}, \quad x = (x_1, x_2) \in A \quad (30)$$

Assumiamo che le funzioni f, h siano di classe C^2 e che l'insieme di livello $h^{-1}(b) := \{x \in A : h(x) = b\}$ sia regolare. Ricordiamo che cio' significa che $\nabla h(x) \neq 0$ per ogni $x \in h^{-1}(b)$.

Ricordiamo che la Lagrangiana $L : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ associata al problema:

$$L(x, \mu) = f(x) - \mu[h(x) - b].$$

Introduciamo l'hessiano orlato $H : A \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$,

$$H(x, \mu) := \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 h(x) & \partial_2 h(x) \\ \partial_1 h(x) & \partial_{11} L(x, \mu) & \partial_{12} L(x, \mu) \\ \partial_2 h(x) & \partial_{21} L(x, \mu) & \partial_{22} L(x, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & Dh(x) \\ (Dh(x))^T & D_x^2 H(x, \mu) \end{pmatrix} \quad (31)$$

Teorema 17.1 (condizioni sufficienti del secondo ordine) Siano date $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 su un aperto $A \subset \mathbb{R}^2$. Assumiamo che l'insieme $h^{-1}(b)$ sia regolare. Sia $(\tilde{x}, \tilde{\mu}) \in A \times \mathbb{R}$ un punto critico libero per $L(x, \mu) = f(x) - \mu[h(x) - b]$, cioe' valga

$$(D_x L(\tilde{x}, \tilde{\mu}), \partial_\mu L(\tilde{x}, \tilde{\mu})) = 0 \in \mathbb{R}^3. \quad (32)$$

Allora, se

$$\det H(\tilde{x}, \tilde{\mu}) < 0, \quad (33)$$

il punto \tilde{x} è di minimo vincolato. Se invece $\det H(\tilde{x}, \tilde{\mu}) > 0$, allora \tilde{x} è di massimo vincolato.¹⁶

Esempio 17.2 Calcolare i punti critici vincolati per $f(x, y) = x^2 + y^2$ con il vincolo $y - x^2 = 0$ e verificare usando il Teorema 17.1 se sono di massimo o di minimo. Questo esercizio ha solo scopo didattico, perche' sarebbe risolvibile facilmente senza moltiplicatori di Lagrange. Perché?

Dimostrazione del Teorema 17.1. Poiche' l'insieme $h^{-1}(b)$ e' regolare, in $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ almeno una delle due derivate di h e' non nulla. Assumiamo che sia $\frac{\partial h}{\partial x_2}(\tilde{x}) \neq 0$. Allora per il teorema della funzione implicita esiste $I \times J$ intorno rettangolare di \tilde{x} ed esiste $\phi : I \rightarrow J$ di classe C^2 , tale che

$$\{x = (x_1, x_2) \in I \times J : h(x) = b\} = \{(x_1, \phi(x_1)) : x_1 \in I\} \quad (34)$$

In particolare sarà $h(x_1, \phi(x_1)) \equiv 0$ identicamente nell'intervallo I che contiene \tilde{x}_1 . Differenziando, $\frac{d}{dx_1} h(x_1, \phi(x_1)) = 0$ identicamente in I . Quindi

$$0 = \partial_1 h(x_1, \phi(x_1)) + \partial_2 h(x_1, \phi(x_1)) \phi'(x_1) \quad \forall x_1 \in I. \quad (35)$$

Dalla (35) si ricava

$$\phi'(\tilde{x}_1) = -\frac{\partial_1 h(\tilde{x}_1, \phi(\tilde{x}_1))}{\partial_2 h(\tilde{x}_1, \phi(\tilde{x}_1))} = -\frac{\partial_1 h(\tilde{x})}{\partial_2 h(\tilde{x})}. \quad (36)$$

¹⁶Se, per finire $\det H(\tilde{x}, \tilde{\mu}) = 0$, allora questo criterio non si può applicare e occorre analizzare condizioni su derivate successive.

Qui abbiamo usato il fatto che $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \phi(\tilde{x}_1)) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$. Osserviamo anche che la (36) corrisponde alla (15) ottenuta a pagina 10).

Da ora in poi introduciamo la notazione abbreviata: (x_1, ϕ) invece di $(x_1, \phi(x_1))$ e ϕ , o ϕ' invece di $\phi(x_1)$ o $\phi'(x_1)$.

Consideriamo la funzione $U : I \rightarrow \mathbb{R}$, $U(x_1) = f(x_1, \phi(x_1)) = f(x_1, \phi)$. Ci proponiamo di dimostrare che la funzione U ha un punto di minimo locale in \tilde{x}_1 . Questo dimostra immediatamente che \tilde{x} e' di minimo vincolato per il problema. Per provare ciò, calcoliamo le derivate di U e proveremo che

$$U'(\tilde{x}_1) = 0 \quad (37a)$$

$$U''(\tilde{x}_1) > 0 \quad (37b)$$

Iniziamo provando (37a). Ci serve U' .

$$U'(x_1) = \frac{d}{dx_1} f(x_1, \phi) = \partial_1 f(x_1, \phi) + \partial_2 f(x_1, \phi) \phi' \quad (38)$$

Ora moltiplicando la (35) per $-\tilde{\mu}$ e sommando con (38), otteniamo

$$U'(x_1) = \partial_1 L(x_1, \phi, \tilde{\mu}) + \partial_2 L(x_1, \phi, \tilde{\mu}) \phi'$$

Calcolando in $(\tilde{x}_1, \phi(\tilde{x}_1)) = \tilde{x}$ e ricordando l'ipotesi (32), si ottiene $U'(\tilde{x}_1) = 0$, che e' la (37a), come richiesto.

Ora differenziamo ulteriormente

$$\begin{aligned} U''(x_1) &= \frac{d^2}{dx_1^2} U'(x_1) = \frac{d}{dx_1} \left(\partial_1 L(x_1, \phi, \tilde{\mu}) + \partial_2 L(x_1, \phi, \tilde{\mu}) \phi' \right) \\ &= \frac{d}{dx_1} \partial_1 L(x_1, \phi, \tilde{\mu}) + \left\{ \frac{d}{dx_1} \partial_2 L(x_1, \phi, \tilde{\mu}) \right\} \phi' + \partial_2 L(x_1, \phi, \tilde{\mu}) \phi'' \\ &= \partial_{11} L(x_1, \phi, \tilde{\mu}) + \partial_{12} L(x_1, \phi, \tilde{\mu}) \phi' + \\ &\quad + \left\{ \partial_{12} L(x_1, \phi, \tilde{\mu}) + \partial_{22} L(x_1, \phi, \tilde{\mu}) \phi' \right\} \phi' + \partial_2 L(x_1, \phi, \tilde{\mu}) \phi'' \\ &= \partial_{11} L(x_1, \phi, \tilde{\mu}) + 2\partial_{12} L(x_1, \phi, \tilde{\mu}) \phi' + \partial_{22} L(x_1, \phi, \tilde{\mu}) (\phi')^2 + \partial_2 L(x_1, \phi, \tilde{\mu}) \phi'' \end{aligned}$$

Questa uguaglianza vale per ogni punto $x_1 \in I$. Se calcoliamo in \tilde{x}_1 , sara' $(x_1, \phi) = (\tilde{x}_1, \phi(\tilde{x}_1)) = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \tilde{x}$. In particolare l'ultimo termine diviene $\partial_2 L(\tilde{x}, \tilde{\mu})$ che si annulla grazie ad (32). In definitiva:

$$U''(\tilde{x}_1) = \partial_{11} L(\tilde{x}, \tilde{\mu}) + 2\partial_{12} L(\tilde{x}, \tilde{\mu}) \phi'(\tilde{x}_1) + \partial_{22} L(\tilde{x}, \tilde{\mu}) (\phi'(\tilde{x}_1))^2.$$

Ora usiamo (36) e otteniamo immediatamente

$$U''(\tilde{x}_1) = \frac{1}{(\partial_2 h(\tilde{x}))^2} \left\{ \partial_{11} L(\tilde{x}, \tilde{\mu}) (\partial_2 h(\tilde{x}))^2 - 2\partial_{12} L(\tilde{x}, \tilde{\mu}) \partial_1 h(\tilde{x}) \partial_2 h(\tilde{x}) + \partial_{22} L(\tilde{x}, \tilde{\mu}) (\partial_1 h(\tilde{x}))^2 \right\} \quad (39)$$

Un rapido calcolo del determinante in (33) mostra che

$$\begin{aligned} \det H(\tilde{x}, \tilde{\mu}) &= -\partial_{11} L(\tilde{x}, \tilde{\mu}) (\partial_2 h(\tilde{x}))^2 + 2\partial_{12} L(\tilde{x}, \tilde{\mu}) \partial_1 h(\tilde{x}) \partial_2 h(\tilde{x}) - \partial_{22} L(\tilde{x}, \tilde{\mu}) (\partial_1 h(\tilde{x}))^2 \\ &= -U''(\tilde{x}_1) (\partial_2 h(\tilde{x}))^2. \end{aligned}$$

Quindi abbiamo verificato (37b) e la prova e' conclusa.

18 Numeri complessi

Svolti i contenuti nel testo, Appendici A1, A2, A3. (Non discussa l'appendice A4 e A5). In particolare ricordiamo la definizione di esponenziale complesso

$$e^{x+iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y)), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (40)$$

e la formula per la derivata della curva $t \mapsto e^{zt}$, con $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, che ci servirà tra poco.

$$\frac{d}{dt} e^{(\alpha+i\beta)t} = (\alpha + i\beta) e^{(\alpha+i\beta)t}. \quad (41)$$

Esercizio: verificare la (41) usando la definizione di esponenziale complesso (40).

19 Equazioni differenziali ordinarie

Sia $f : I \times A \rightarrow \mathbb{R}$, I, A sono intervalli aperti di \mathbb{R} . Indichiamo con $(t, y) \in I \times A$ le variabili. Supponiamo sempre $f = f(t, y)$ continua. Una *equazione differenziale ordinaria del primo ordine* è una scrittura del tipo

$$\dot{y} = f(t, y). \quad (42)$$

Una funzione derivabile $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ con $J \subset I$ si chiama *soluzione* di (42) se soddisfa

$$\dot{y}(t) = f(t, y(t)), \quad \forall t \in J.$$

Qui e nel seguito scriviamo $\dot{y}(t)$ invece di $\frac{d}{dt}y(t)$.

Esempio. L'equazione $\dot{y} = \alpha y$, con $\alpha > 0$, e sua interpretazione in relazione al modello "rozzo" di crescita di una popolazione.

19.1 Equazioni del primo ordine lineari.

Sono le equazioni del tipo:

$$\dot{y} = a(t)y, \quad (43)$$

dove $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ e' la funzione incognita e si indica $y = y(t)$ e $\dot{y} = \frac{d}{dt}y(t)$.

Mostriamo la procedura per risolvere l'equazione (43). Introduciamo una funzione $A : I \rightarrow \mathbb{R}$, che sia una primitiva di a su I . Per fissare le idee scegliamo $t_0 \in I$ e poniamo $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$. Riscriviamo l'equazione come

$$\dot{y} - a(t)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-A(t)} \{ \dot{y} - a(t)y \} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt} \{ e^{-A(t)} y(t) \} = 0$$

Ma allora, per qualche $c \in \mathbb{R}$ sarà $e^{-A(t)} y(t) = c$ che equivale a

$$y(t) = e^{A(t)} c. \quad (44)$$

Queste sono tutte e sole le soluzioni di (43). Sono infinite perché la c è arbitraria. Fissando una condizione iniziale, poniamo il **Problema di Cauchy (o Problema ai valori iniziali)**

$$\begin{cases} \dot{y} = a(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (45)$$

con $y_0 \in A$ dato assegnato. Il problema (45) ha quindi l'unica soluzione

$$y(t) = y_0 e^{A(t)} = y_0 \exp \left(\int_{t_0}^t a(s) ds \right).$$

Esercizio 19.1 *Risolvere i Problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{y} = t^2 y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{1}{t} y \\ y(1) = 2 \quad e \quad y(1) = 0. \end{cases}$$

19.2 Equazioni del primo ordine lineari non omogenee.

Sono le equazioni del tipo

$$\dot{y} = a(t)y + b(t), \tag{46}$$

dove $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue su un intervallo aperto I . Per risolvere questo tipo di equazioni ragioniamo come segue: prendiamo ancora $t_0 \in I$ e la primitiva $A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$. Allora

$$\dot{y} - a(t)y = b(t) \Leftrightarrow e^{-A(t)}(\dot{y} - a(t)y) = e^{-A(t)}b(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left\{ e^{-A(t)} y \right\} = e^{-A(t)} b(t).$$

Integrando sull'intervallo di estremi t_0 e t , ricordando che $A(t_0) = 0$, otteniamo

$$e^{-A(t)} y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \Leftrightarrow y(t) = e^{A(t)} \left\{ y(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right\}.$$

Ci sono infinite soluzioni perche' $y(t_0)$ è indeterminato. Se consideriamo il *Problema di Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{y} = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{47}$$

allora la soluzione e' unica e precisamente ha la forma

$$y(t) = e^{A(t)} \left\{ y_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right\}, \quad \text{dove} \quad A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds$$

Esercizio 19.2 *Risolvere i seguenti problemi di Cauchy:*

$$\begin{cases} \dot{y} = ty + t \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \dot{y} = y + 1 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

19.3 Esistenza e unicità per la soluzione del Problema di Cauchy.

Esempio 19.3 (di non unicità) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t, y) = |y|^{1/2}$. Verificare che le funzioni $y(t) = 0$ e $y(t) = \frac{1}{4}t|t|$ sono entrambe soluzioni del problema

$$\begin{cases} \dot{y} = |y|^{1/2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (48)$$

sull'intervallo $(-\infty, +\infty)$.

Questo esempio prova che il Problema di Cauchy (48) ha più di una soluzione.

È interessante avere delle condizioni sul dato $f(t, y)$ che assicurino l'unicità.

Teorema 19.4 (di esistenza e unicità per il problema di Cauchy. [SB], Teorema 14.5) ¹⁷ Sia I, A intervalli di \mathbb{R} e sia $f : I \times A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Assumiamo che f sia di classe C^1 . Allora per ogni $(t_0, y_0) \in I \times A$ esiste una funzione $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 sull'intervallo $J \subset I$, J contenente t_0 , che è soluzione di

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (49)$$

La soluzione è unica nel senso seguente: se è data una qualsiasi altra soluzione di (49) $z : \tilde{J} \rightarrow \mathbb{R}$, allora $y(t) = z(t)$ per ogni $t \in \tilde{J} \cap J$.

Osserviamo che la funzione $f(t, y) = |y|^{1/2}$ non è di classe C^1 in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Infatti $\frac{\partial f}{\partial y}(0, t)$ non esiste per nessun $t \in \mathbb{R}$.

Esempio 19.5 (fenomeno di blow-up) Verificare che il Problema di Cauchy

$$\dot{y} = y^2, \quad y(0) = 1$$

ammette la (unica) soluzione $y = \frac{1}{1-t}$. Osserviamo che mentre la funzione $f(t, y) = y^2$ è definita per tutto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la soluzione y è definita su $J = (-\infty, 1)$. Risulta anche $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-t} = +\infty$. La soluzione tende all'infinito in un tempo finito. Questo esempio prova che l'introduzione di un intervallo $J \subset I$ nel teorema sopra non è artificiosa, ma necessaria. In questo esempio J è un sottoinsieme stretto di I .

19.4 Equazioni a variabili separabili ([SB, p. 410])

Sono le equazioni del tipo

$$\dot{y} = g(y)h(t), \quad (50)$$

con $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni di classe C^1 .

Il metodo di soluzione è il seguente. Consideriamo il problema

$$\dot{y} = g(y)h(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad (51)$$

dove $(t_0, y_0) \in I \times A$. Allora :

¹⁷Questo enunciato e quello in [SB] contengono delle ipotesi largamente sovrabbondanti. Lo studente interessato ad approfondire può consultare un qualsiasi testo specialistico di Equazioni Ordinarie, ad esempio P. Hartman, Ordinary differential equations. Classics in Applied Mathematics, 38. SIAM, Philadelphia, 2002.

(CASO A): Risulta $g(y_0) = 0$. Allora $y(t) = y_0$ costante e' la soluzione. Essa e' l'unica per il teorema di unicita' sopra enunciato.

(CASO B): Vale $g(y_0) \neq 0$. Allora facciamo i seguenti passaggi (parzialmente informali, ma giustificati a posteriori dalla formula risolutiva che otterremo in (52)). Partiamo da

$$\dot{y}(t) = g(y(t))h(t) \Leftrightarrow \frac{\dot{y}(t)}{g(y(t))} = h(t) \Leftrightarrow \int_{t_0}^t \frac{\dot{y}(\tau)}{g(y(\tau))} d\tau = \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau$$

Passando alla variabile $s = y(\tau)$, $ds = \dot{y}(\tau)d\tau$ e sostituendo in modo appropriato gli estremi di integrazione si ottiene la formula risolutiva.

$$\int_{y_0}^{y(t)} \frac{ds}{g(s)} = \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau \tag{52}$$

Esercizio 19.6 Risolvere per separazione delle variabili il problema

$$\dot{y} = ty, \quad y(0) = 0 \quad e \quad \dot{y} = ty, \quad y(0) = 1.$$

Esercizio 19.7 Scrivere un esempio di equazione $\dot{y} = f(t, y)$ che **non** sia a variabili separabili.

Esercizio 19.8 Risolvere i problemi di Cauchy

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{\sin t}{y}, \quad y(0) = 1, & \dot{y} &= ty + t, \quad \text{con } y(0) = y_0, \\ \dot{y} &= ty + y, \quad y(1) = 1, & e \quad \dot{y} &= y + 1, \quad \text{con } y(1) = 2 \end{aligned}$$

19.5 Equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti. [SB, Sez. 14.3]

Sono del tipo

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + c = 0, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ assegnati.} \tag{53}$$

Esercizio 19.9 (svolto in classe. Associazione tra equazioni differenziali e algebriche) Verificare che se $r \in \mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione

$$ar^2 + br + c = 0, \tag{54}$$

allora la funzione $y(t) = e^{tr}$ risolve l'equazione differenziale (53).

Osservazione 19.10 (Principio di sovrapposizione) Se y_1 e y_2 sono soluzioni di (53), allora per ogni $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, la funzione

$$y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$$

è ancora soluzione di (53).

Analizziamo l'equazione caratteristica. Possono occorrere tre casi:

Caso A. L'equazione (54) ha radici $r_1 \neq r_2$ reali.

Caso B. L'equazione (54) ha solo la radice $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$.

Caso C. L'equazione (54) ha radici $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta$ complesse coniugate.

Discutiamo separatamente ciascuno dei tre casi e studiamo la risolubilità del problema di Cauchy

$$\begin{cases} a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0 \\ y(t_0) \in y_0 \\ \dot{y}(t_0) = v_0, \end{cases} \tag{55}$$

dove y_0, v_0 e t_0 sono numeri reali assegnati.

Caso A. Per l'esercizio 19.9 abbiamo già due soluzioni

$$y_1(t) = e^{r_1 t} \quad \text{e} \quad y_2(t) = e^{r_2 t}.$$

Osserviamo che infinite soluzioni possono ottenersi scrivendo

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

con c_1, c_2 parametri arbitrari. Vale allora il seguente

Teorema 19.11 ([SB], Teorema 14.1, dimostrato in classe) Siano $r_1 \neq r_2$ radici reali e distinte di (54). Allora per ogni $(y_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ esistono unici $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tali che il problema di Cauchy (55) ha l'unica soluzione $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

Esercizio 19.12 (svolto) Riosolvere

$$\ddot{y} - y = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Caso B. Sia r_1 la radice di (54). Poiché l'equazione caratteristica ha solo una radice doppia r_1 , si può scrivere

$$ar^2 + br + c = a(r - r_1)^2 = a(r^2 - 2r r_1 + r_1^2).$$

Cioè l'equazione (53) è in effetti

$$a(\ddot{y} - 2r_1 \dot{y} + r_1^2 y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{y} - 2r_1 \dot{y} + r_1^2 y = 0. \quad (56)$$

Con un calcolo semplice (da fare almeno una volta!) si verifica che la funzione $y(t) = t e^{r_1 t}$ è una soluzione di (53). Quindi abbiamo infinite soluzioni del tipo

$$y(t) = k_1 e^{r_1 t} + k_2 t e^{r_1 t} = (k_1 + k_2 t) e^{r_1 t}. \quad (57)$$

Vale allora il seguente Teorema

Teorema 19.13 ([SB], Teorema 14.2, dimostrato anche in classe) Sia $r_1 \in \mathbb{R}$ radice doppia di (54). Allora per ogni $(y_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ esistono unici $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tali che il problema di Cauchy (55) ha l'unica soluzione $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$y(t) = (k_1 + k_2 t) e^{r_1 t}.$$

Caso C. L'equazione (54) ha le radici $r_1 = \alpha + i\beta$ e $r_2 = \alpha - i\beta = \bar{r}_1$. Usando la formula (41) si verifica subito che la funzione $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $y_1(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}$ fornisce una soluzione di (53) (verificare!). Per la stessa ragione, anche la funzione $y(t) = e^{(\alpha-i\beta)t}$ dà una soluzione. In generale per il principio di sovrapposizione abbiamo una famiglia di soluzioni:

$$y(t) = k_1 e^{(\alpha+i\beta)t} + k_2 e^{(\alpha-i\beta)t}. \quad (58)$$

A questo punto, però abbiamo delle soluzioni complesse. Per riottenere delle soluzioni reali, ricordiamo il fatto che, se $z, w \in \mathbb{C}$, allora $z + w$ è reale se e solo se $z = \bar{w}$. Quindi,

poiché $e^{(\alpha+i\beta)t} = \overline{e^{(\alpha-i\beta)t}}$, avremo che $y(t)$ è reale se e solo se $k_2 = \bar{k}_1$. Quindi, se scriviamo $k_1 = u + iv$, con $u, v \in \mathbb{R}$, la nostra soluzione sarà

$$\begin{aligned} y(t) &= (u + iv)e^{(\alpha+i\beta)t} + (u - iv)e^{(\alpha-i\beta)t} \\ &= \text{scrivendo l'esponenziale con la definizione (40)} \\ &= 2e^{\alpha t}(u \cos(\beta t) - v \sin(\beta t)) \\ &= C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t), \end{aligned}$$

se poniamo $C_1 = 2u$ e $C_2 = -2v$. Le due costanti reali C_1, C_2 sono arbitrarie e ora abbiamo delle soluzioni reali. Vale il seguente teorema.

Teorema 19.14 *Se l'equazione (54) ha soluzioni complesse coniugate $\alpha \pm i\beta$, allora per ogni $y_0, v_0 \in \mathbb{R}$ esistono unici $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ tali che l'unica soluzione di*

$$\begin{cases} a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ \dot{y}(t_0) = v_0, \end{cases}$$

ha la forma $y(t) = C_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + C_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

Esempi discussi.

Esempio 19.15 (oscillatore armonico, [SB], pag. 421) *Discussione e commento dell'equazione differenziale*

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0,$$

con $\omega > 0$ assegnato. Risolvere il problema di Cauchy con dati iniziali $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = 0$.

Esempio 19.16 (oscillatore smorzato [SB], pag. 421) *Discussione e commento dell'equazione*

$$\ddot{y} + \varepsilon \dot{y} + \omega^2 y = 0,$$

con $0 < \varepsilon < 4\omega^2$. Risolto e commentato il problema di Cauchy con dati iniziali $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = 0$.¹⁸

Esempio 19.17 (modello di crescita di popolazione) *Risolta, per separazione di variabili, l'equazione*

$$\begin{cases} \dot{y} = ay \left(1 - \frac{y}{N}\right) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (59)$$

¹⁸Che succede se $\varepsilon^2 > 4\omega^2$? Che forma hanno le soluzioni?