# Laboratorio di Matematica. Schema lezioni

23 aprile 2009

Questi appunti sono un riassunto schematico degli argomenti discussi in classe.

## Riferimenti bibliografici

[SB] C. P. Simon, L. E. Blume, Matematica 2, per l'Economia e la Scienze sociali, Università Bocconi Editore.

## 1 18 febbraio 2009

**Richiami** [1] Utilizzeremo lo spazio euclideo

$$\mathbb{R}^n := \{x : x = (x_1, \dots, x_n), \quad \text{con } x_j \in \mathbb{R} \text{ per ogni } j = 1, \dots, n\}$$

con le operazioni standard di somma tra vettori e prodotto di un vettore con uno scalare.

**Prodotto interno o scalare.** Definiamo, dati $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

$$x \cdot y = x^T y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Proprietà verificate:

- $x \cdot y = y \cdot x$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- $(\lambda x + \lambda' x') \cdot y = \lambda x \cdot y + \lambda' x' \cdot y$, per ogni $x, x', y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$.
- $x \cdot x \geq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}^n$. Inoltre $x \cdot x = 0$ se e solo se $x = 0$, il vettore nullo.

**Definizione (vettori ortogonali).** $x$ e $y \in \mathbb{R}^n$ si dicono *ortogonali* se vale $x \cdot y = 0$.

[1] Non contenuti nel libro di testo.

**Norma euclidea.** Poniamo

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$$

La distanza tra due punti $x$ e $y$ in $\mathbb{R}^n$ è data dal numero $\|x - y\|$.

Proprietà .

- Vale $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.
- Vale $\|x\| \geq 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}^n$. Inoltre $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$.
- Vale la *disuguaglianza triangolare* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Svolti in classe:

**Esercizio 1.1** Calcolare $x \cdot y$ dati $x = (1, 2, 2)$ e $y = (2, 1, 3)$. Calcolare inoltre la distanza tra $x$ e $y$.

**Esercizio 1.2** Trovare tutti i vettori ortogonali a $v = (1, 2)$. Stessa domanda per $w = (1, 2, 1)$.

**Esercizio 1.3** Verificare usando le proprietà descritte sopra, che che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$, vale

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\, x \cdot y + \|y\|^2. \tag{1}$$

**Osservazione 1.4** *Se $x$ e $y$ sono ortogonali, allora vale il* Teorema di Pitagora

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

**Teorema 1.5 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)** *Vale*

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|, \tag{2}$$

*per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$. Inoltre vale l'uguaglianza in* (2) *se e solo se $x$ e $y$ sono linearmente dipendenti.* [2]

**Corollario 1.6** *Vale la disuguaglianza triangolare $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$.*

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \leq \text{per Cauchy-Schwarz} \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| + \|y\|^2 = \big(\|x\| + \|y\|\big)^2. \end{aligned} \tag{3}$$

## 2 18 febbraio 2009

**Esercizio 2.1** *Verificare che, dati $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ vale*

$$\|x - y\| \leq \|x - z\| + \|y - z\|.$$

**Definizione 2.2** *Definiamo, dati $v \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$, la* sfera (o palla) *di centro $v$ e reggio $r$.*

$$B_r(v) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - v\| < r\}.$$

[2] Cioè $\lambda x + \mu y = 0$ per una opportuna scelta di scalari $\lambda, \mu$ che soddisfino $\lambda^2 + \mu^2 > 0$.

Esempio: la palla $B_r(0,0) \subset \mathbb{R}^2$.

**Esercizio 2.3** *Verificare che, dati $v, w \in \mathbb{R}^n$, risulta $B_r(v) \cap B_r(w) \neq \varnothing$ se e solo se $r > \|v-w\|/2$.*

**Definizione 2.4 (Successione convergente)** *Una successione $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di vettori in $\mathbb{R}^n$ si dice convergente a $x \in \mathbb{R}^n$ [3] se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $k_\varepsilon > 0$ tale che*

$$\|x_k - x\| < \varepsilon, \quad \forall k > k_\varepsilon.$$

Verificare per esercizio che $x_k = (1/k, (k+1)/k) \to (0,1)$, per $k \to +\infty$

**Teorema 2.5** *([SB, Teorema 1.1, p. 5] Una successione $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ha limite $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ se e solo se, scritto $x_k = (x_{1k}, \ldots, x_{nk})$, risulta*

$$\lim_{k\to\infty} x_{jk} = x_k, \qquad \forall\, j = 1, \ldots, n.$$

Esercizi svolti in classe:

**Esercizio 2.6** *Verificare i seguenti fatti sulle successioni in $\mathbb{R}^n$.*
*(1) Se $x_k \to x$ ed $x_k \to x'$ in $\mathbb{R}^n$, allora $x = x'$. (Unicità del limite).*
*(2) Se $x_k \to x$ e $y_k \to y$, allora vale $x_k \cdot y_k \to x \cdot y$.*

**Definizione 2.7 (Insieme aperto)** *Un insieme $S \subset \mathbb{R}^n$ si dice* insieme aperto *se per ogni $x \in S$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(x) \subset S$.*

**Definizione 2.8 (Insieme chiuso)** *Un insieme $C \subset \mathbb{R}^n$ si dice chiuso se vale $C = \mathbb{R}^n \setminus S$ con $S$ insieme aperto.*

Una notazione per l'insieme complementare è anche $\mathbb{R}^n \setminus S = S^c$

**Esercizio 2.9** *Verificare che $S = ]0,1[ \times ]0,1[$ e' aperto. Verificare che $C = [0,1] \times [0,1]$ è chiuso. Verificare che $A = ]0,1] \times ]0,1]$ non e' ne' aperto ne' chiuso.*

## 3 20 febbraio 2000

**Esercizio svolto.** ([SB, Teorema 1.6, p. 11]) Verificare che, dati $S_1$ e $S_2 \subset \mathbb{R}^n$ insiami aperti, l'insieme $S_1 \cup S_2$ e' aperto. Verificare che per ogni coppia di insiemi $K, H \subset \mathbb{R}^n$ vale $(K \cup H)^c = K^c \cap H^c$. Verificare poi che, dati $A_1$ e $A_2$ insiemi chiusi in $\mathbb{R}^n$, risulta $A_1 \cap A_2$ ancora chiuso.

**Funzioni.** Nozione di funzione $f : A \to B$, con $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$. Terminologia: $A$ è il dominio. Il grafico di $f$ è l'insieme

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k : x \in A, y = f(x)\big\} = \big\{(x, f(x)) : x \in A\big\}.$$

Casi particolari

**Esempio 3.1 (funzioni a valori scalari)** *Sono le funzioni del tipo $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}^n$.*

[3] e si scrive $x_k \to x$ oppure $\lim_{k\to+\infty} x_k = x$

**Esempio 3.2 (curve parametriche)** *Sono del tipo* $f : I \to \mathbb{R}^m$, con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo.

**Esempio 3.3** *Visualizzare il grafico delle funzioni* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) = 1 - p_1 x_1 - p_2 x_2$, *con* $p_1, p_2 \in ]0, 1[$ *parametri fissati.*

**Esempio 3.4 (funzioni lineari)** *Sono le* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *del tipo* $f(x) = Ax$, *con* $A$ *matrice* $m \times n$.

**Esempio 3.5 (forme quadratiche)** *Sono le* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *del tipo*

$$f(x) = x^T A x = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k, \tag{4}$$

*con* $A = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ *matrice quadrata* $n \times n$ *simmetrica.*

**Definizione 3.6 (Funzione continua)** *Data* $f : A \to \mathbb{R}^m$, *con* $A \subset \mathbb{R}^n$, *diciamo che* $f$ *è contunua in* $a \in A$ *se per ogni successione* $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, *con* $x_k \in A$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$, *risulta*

$$x_k \to a \quad \Rightarrow \quad f(x_k) \to f(a).$$

*Si dice che* $f$ *è continua in* $A$ *se è continua per ogni* $a \in A$.

Tutte le funzioni con cui lavoreremo usualmente saranno continue.

**Osservazione 3.7** *Se* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *è continua, allora, per ogni* $c \in \mathbb{R}$ *gli insiemi*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > c\}$$

*sono aperti. Se sostituiamo la disuguaglianza stretta con quella debole* $A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \geq c\}$, *allora l'insieme è chiuso. Inoltre, la stessa cosa vale per insiemi del tipo*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) > c_1, \ldots, f_p(x) > c_p\},$$

*che sono aperti se* $f_1, \ldots, f_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sono continue. Sono invece chiusi se le disuguaglianze sono deboli.*

**Esempio 3.8** *Riconoscere che il quadrato* $[0, 1] \times [0, 1]$ *è chiuso usando la osservazione precedente.*

**Definizione 3.9 (insieme limitato)** $A \subset \mathbb{R}^n$ *si dice limitato se esiste* $M > 0$ *tale che* $A \subset B_M(0)$.

Nello studiare problemi di ottimizzazione utilizzeremo il seguente teorema importante.

**Teorema 3.10 (Weierstrass)** *([SB, p. 55]). Se* $f : A \to \mathbb{R}$ *è continua ed* $A$ *è chiuso e limitato,* [4] *allora* $f$ *ha massimo e minimo su* $A$. *Cioè esistono* $x_m$ *e* $x_M$ entrambi in $A$ *tali che*

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), \qquad \forall\, x \in A.$$

**Esempio 3.11** *Fare il grafico delle funzioni* $f : ]0, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{x}$ *e* $f : ]0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$. *Hanno massimo? Minimo? I loro domini sono o non sono chiusi? Limitati?*

[4] Un insieme chiuso e limitato in $\mathbb{R}^n$ si dice insieme *compatto*.

**Definizione 3.12 (Derivate parziali)** *È data $f : A \to R^m$, con $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme aperto. Fissiamo $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in A$ e un indice $j \in \{1, \dots n\}$, poniamo, qualora esista il membro di destra,*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_j^0 + h, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_n^0)}{h} = \frac{f(x^0 + he_j) - f(x^0)}{h},$$

Qui indichiamo con $e_j$ il $j-$esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$.

**Esercizio 3.13 (calcolo derivate parziali)** *Calcolare le derivate parziali rispetto a tutte le variabili delle seguenti funzioni:*

$$\begin{aligned}
&f(x_1,x_2) = x_1 x_2, \quad f(x_1,x_2) = x_1(x_2 + e_1^x), \quad f(x_1,x_2) = x_1^2 x_2 \\
&f(x_1,x_2) = \sqrt{1+x_2}, \quad f(x_1,x_2) = \log(1 + x_1 + x_1 x_2), \quad f(x_1,x_2) = (e^{x_1}+1)^2, \\
&f(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_2 x_3, \quad f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2)e^{-x_3}, \quad f(x_1,x_2) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2, \\
&f(x_1,x_2) = \|(x_1,x_2)\|, \quad f(x_1,x_2) = \frac{x_1+x_2}{x_1^2+1}, \\
&f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|^2, \quad f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \ f(x) = \|x\|.
\end{aligned}$$

# 4 24 febbraio 2009

**Differenziabilità in una variabile.** Partiamo dal caso di una funzione $f$ di una variabile derivabile. La derivabilità in una variabile si può caratterizzare come segue.

**Proposizione 4.1** *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile in $\bar{x} \in \mathbb{R}$ se e solo se vale*

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + R_1(h, x).$$

*con* $\lim_{h\to 0} \frac{R_1(h,\bar{x})}{h} = 0.$

Per provare al proposizione, partendo dalla definizione di derivata,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}),$$

si ottiene,

$$\lim_{h\to 0} \Big(\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})h}{h}\Big) = 0.$$

Ponendo $R_1(h,x) \equiv f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})h$, possiamo affermare che dire che una funzione e' derivabile in $\bar{x}$ equivale a dire che la quantita' $R_1(h,\bar{x})$ tende a zero *piu' rapidamente* di $h$ per $h \to 0$. Cioè $\lim_{h\to 0} \frac{R_1(h,\bar{x})}{h} = 0$.

Per funzioni di piu' variabili abbiamo il seguente teorema

**Teorema 4.2 (Teorema fondamentale sulla differenziabilità )** *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione, con $A$ aperto di $\mathbb{R}^n$. Assumiamo che $f$ sia di classe $C^1$ su $A$ [5] Fissiamo un punto $a = (a_1, a_n) \in A$. Allora vale, se $\|h\|$ è piccola*

$$f(a+h) = f(a) + \nabla f(a) \cdot h + R_1(h,a), \tag{5}$$

[5] cioè che tutte le derivate parziali $\partial f / \partial x_j$, $j = 1, \dots, n$ siano continue in $A$.

*dove*

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_1(h,a)}{\|h\|} = 0. \tag{6}$$

**Definizione 4.3 (Differenziale)** *La funzione lineare da $\mathbb{R}^n$ in se' $h \mapsto \nabla f(a) \cdot h$ che appare in* (5) *si chiama* differenziale *di $f$ in $a$.*

**Esercizio 4.4** *Scrivere la approssimazione al primo ordine* (5) *per $f(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_1x_2$ vicino ad $a = (1,1)$.*

**Derivate lungo una curva.**

**Definizione 4.5 (Curva parametrica)** *Una curva parametrica* [6] *in $\mathbb{R}^n$ è una mappa $x : I \to \mathbb{R}^n$, dove $I \subset \mathbb{R}$ è un intervallo aperto.*

Data una curva $t \mapsto x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, se le componenti $x_j : I \to \mathbb{R}$ sono derivabili in $t \in I$, il vettore

$$x'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$$

si chiama *velocità (o vettore tangente)* di $x$ in $t$. Una curva derivabile si dice regolare se $x'(t) \neq 0$ per ogni $t \in I$.

# 5 24 febbraio 2009

**Teorema 5.1 (Derivata lungo una curva, [SB] Teor. 4.1)** *Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ di classe $C^1$ e una curva $x : I \to \mathbb{R}^n$ derivabile in ogni $t \in I$, allora vale*

$$\frac{d}{dt} f(x(t)) = \nabla f(x(t)) \cdot x'(t). \tag{7}$$

Dimostrazione svolta in classe.

**Esercizio 5.2** *Date $f(x_1, x_2) = x_1 x_2^2$ e $x(t) = (t^2, 2t)$, scrivere esplicitamente la funzione $t \mapsto f(x(t))$. Calcolarne la derivata. Calcolare la stessa derivata $\frac{d}{dt} f(x(t))$ usando la formula* (7).

**Definizione 5.3 (Derivata direzionale)** *Poniamo, dato un vettore $v \neq 0$ in $\mathbb{R}^n$,*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}.$$

**Teorema 5.4** *[Calcolo derivate direzionali per funzioni $C^1$] Se $f : S \to \mathbb{R}$, con $S \subset \mathbb{R}^n$ aperto è differenziabile in $x$, allora vale*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \nabla f(x) \cdot v. \tag{8}$$

**Esercizio 5.5** *Dimostrare il Teorema 5.4 usando il Teorema 5.1 con $x(t) = x + tv$.*

[6] brevemente curva

## 6 27 febbraio

**Osservazione 6.1 ([SB], Teor. 4.2 p. 81)** *Se $f : S \to \mathbb{R}$ ($S \subset \mathbb{R}^n$ aperto) è di classe $C^1$ e se vale $\nabla f(x) \neq 0$, allora $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ è massima (tra tutti i vettori $v$ di norma unitaria) per $v = \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}$. Ciò significa che $\nabla f(x)$ individua la direzione di massima crescita di $f$ a partire da $x$.*

**Derivate seconde.** Se la derivate parziali $\partial f/\partial x_j$ di una funzione $f :\to \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono derivabili, poniamo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

**Esercizio 6.2** *Calcolare le derivte seconde di $f(x_1, x_2) = x_1 e^{x_1+x_2}$. Confrontare $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ con $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$. Calcolare poi le derivate seconde di $f(x, y) = xe^{xy}$.*

**Teorema 6.3 (Schwarz)** *Se $f : S \subset \mathbb{R}^n$ è di classe $C^2$,[7] allora vale*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}, \quad \forall j, k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{9}$$

Se $f$ è di classe $C^2$ in $S$, allora la matrice Hessiana di $f$ in $x \in S$ si indica con $D^2 f(x)$ ed è una matrice $n \times n$ definita come segue:

$$(D^2 f(x))_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x), \qquad j, k = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

Osserviamo che $D^2 f(x)$ è simmetrica.

Notazione: scriviamo, per $f : S \to R$, $S$ aperto di $\mathbb{R}^n$ ed $a \in S$,

$$Df(a) = [D_1 f(a), \ldots, D_n f(a)].$$

QUindi $Df(a)$ è il vettore *riga* le cui componenti sono quelle del gradiente e vale $Df(a)\xi = \nabla f(a) \cdot \xi$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$.

**Teorema 6.4 (Formula di Taylor del secondo ordine)** *Se $f : S \to R$ ha derivate seconde contunue in $S \subset \mathbb{R}^n$, allora dato $a \in S$, vale, se $\|h\|$ è piccola*

$$f(a + h) = f(a) + Df(a)h + \frac{1}{2}h^T D^2 f(a)h + R_2(h, a), \tag{11}$$

*dove*

$$\lim_{h \to 0} \frac{R_2(h, a)}{\|h\|^2} = 0.$$

**Esercizio 6.5** *Scrivere la formula di Taylor del secondo ordine per*

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + y}, \quad a = (0, 0)$$

$$f(x_1, x_2) = 1 + x_1^2 x_2, \quad a = (1, 1).$$

---

[7] Tutte le derivate seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ sono continue su $S$,

**Ottimizzazione libera.**

**Definizione 6.6** *Se $S \subset \mathbb{R}^n$ e $f : S \to \mathbb{R}$ sono assegnate, si dice che un punto $a \in S$ è di minimo locale se esiste $\varepsilon > 0$ tale che*

$$f(x) \geq f(a), \quad \textit{per ogni } x \in S, \, x \in B_\varepsilon(a). \tag{12}$$

Le definizioni di massimo locale e minimo e massimo globali sono costruite analogamente.

**Proposizione 6.7 (Condizioni necessarie per $a$ punto di minimo)** *Sia $S$ aperto di $\mathbb{R}^n$. Se $a \in S$ e' punto di minimo locale per $f : S \to \mathbb{R}$ ed $f$ è $C^1$, allora*

$$\nabla f(a) = 0. \tag{13}$$

Se vale (13) allora si dice che $a$ e' un *punto critico (o stazionario) libero*

Per dimostrare la Proposizione 6.7 basta considerare, preso $j = 1, \dots, n$, la funzione di una variabile $g(t) = f(a + te_j)$ definita per $t$ vicino a zero. Essa ha un minimo in $t = 0$ ...

**Esercizio 6.8** *Trovare i punti stazionari liberi per le funzioni di due variabili $f(x, y) = x^2 + y^2 + y$ e $f(x, y) = x^2 + y^2$. Si considerino poi le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) = \|x|^2 + b \cdot x$ e se ne trovino i punti critici liberi.*

**Forme quadratiche.** Una forma quadratica in $\mathbb{R}^n$ è una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, del tipo

$$f(x) = x^T A x = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k,$$

dove $(a_{jk})_{jk=1,\dots,n}$ è simmetrica $n \times n$.

## 7 3 marzo 2009

**Esempio 7.1** *Data $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, scrivere la forma quadratica associata ad $A$, Data la f.q. $f(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2$ scrivere la $A$ simmetrica corrispondente.*

**Definizione 7.2 (Segno di forme quadratiche/matrici)** *Data una forma quadratica $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^t A x$, con $A$ $n \times n$ simmetrica, diciamo che*

*1) La forma quadratica è definita positivva [8] se $x^T A x > 0$ per ogni $x \neq 0$.*

*2) La forma quadratica è definita negativa [9] se $x^T A x < 0$ per ogni $x \neq 0$.*

*3) La forma quadratica è non definita se esistono $x, y \in \mathbb{R}^n$ tali che*

$$x^T A x < 0 < y^T A y.$$

Osserviamo che non tutte le matrici quadrate simmetriche rientrano in una delle tre classi definite.

**Esempio 7.3** *Discussione delle forme quadratiche associate a matrici diagonali $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ e, in $\mathbb{R}^n$, del tipo $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.*

[8] Scriviamo anche $A > 0$

[9] Scriviamo anche $A < 0$

**Proposizione 7.4 (Classificazione matrici $2 \times 2$)** *Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ è una matrice assegnata, allora*

*1) $A > 0$ se e solo se $a > 0$ e $\det A > 0$*
*2) $A < 0$ se e solo se $a < 0$ e $\det A > 0$*
*3) $A$ è non definita se e solo se $\det A < 0$.*

Dimostrazione svolta in classe. Osserviamo che se $\det A = 0$ la matrice non è né positiva, né negativa, né non definita.

**Esempio 7.5** *Discutere il segno di $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

Nel caso $n-$dimensionale abbiamo la seguente classificazione: [10]

**Teorema 7.6 (Classificazione forme quadratiche)** *Se $A$ è $n \times n$ simmetrica. Indichiamo con $|A_k|$ il minore $k-$esimo di nord-ovest. Allora:*
*1) $A > 0$ se e solo se $|A_k| > 0$ per ogni $k = 1, \ldots, n$.*
*2) $A < 0$ se e solo se $(-1)^k |A_k| > 0$, per ogni $k = 1, \ldots, n$.*

Discutere ad esempio il segno di $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

# 8 Mercoledi' 4 marzo

Come applicazione presentiamo una condizione sufficiente per la classificazione di massimi e minimi.

**Teorema 8.1 (Condizioni sufficienti per massimi/minimi)** *Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto e $f : A \to \mathbb{R}$ di classe $C^2$. Allora se un punto stazionario $a$ soddisfa $D^2 f(a) > 0$, $a$ è di minimo. Se $D^2 f(a) < 0$, $a$ è di massimo.* [11]

Dimostrazione. Svolta seguendo [SB, p. 174].

**Esercizio 8.2** *Analizzare $f(x, y) = x^4 + x^2 - 6xy + 3y^2$ e $f(x, y) = 3x^4 + 3x^2 y - y^3$. Individuare i puntio critici e, quando possibile con gli strumenti finora sviluppati, classificarli.*

**Esercizio 8.3** *Impostazione del problema della retta di regressione [SB, p. 171].*

**Insiemi di livello.** Data $f : S \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, l'insieme di livello $c$ di $f$ è

$$\{x \in S : f(x) = c\}$$

**Esempio 8.4** *Analisi degli insiemi di livello delle funzioni $f(x, y) = x + y$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $f(x, y) = xy$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.*

[10] Si veda il testo per una descrizione più completa
[11] Se infine $D^2 f(a)$ è non definita, allora $a$ si chiama *punto di sella*.

**Teorema della funzione implicita** Ci domandiamo quando un insieme di livello della forma $G(x, y) = c$ possa essere scritto come grafico del tipo $y = \phi(x)$ oppure $x = \phi(y)$ per una opportuna funzione $\phi$.

Analisi dettagliata dei seguenti esempi:

**Esempio 8.5** *La funzione* $f(x, y) = ax + by$.

**Esempio 8.6** *La funzione* $f(x, y) = x^2 - y^2$.

**Esempio 8.7** *La funzione* $f(x, y) = x^2 + y^2$.

## 9 6 marzo 2009

**Teorema 9.1 (Teorema della funzione implicita (Teor. 5.3))** *Data* $G : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *con* $A$ *aperto di* $\mathbb{R}^2$ *e* $G$ *di classe* $C^1$, *supponiamo che in* $(x_0, y_0) \in A$ *avvenga che*

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0. \tag{14}$$

*Allora esistono due intervalli* $I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *e* $J = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ *e una funzione* $\phi : I \to J$ *tali che*

$$\{(x, y) \in A : G(x, y) = G(x_0, y_0)\} \cap (I \times J) = \{(x, y) \in I \times J : y = \phi(x)\}.$$

**Osservazione 9.2** *A partire dall' identità* $G(x.\phi(x)) = c$, *valida per* $x \in I$, *derivando rispetto ad* $x$, *si puo' calcolare* $\phi'$ *in termini delle derivate parziali di* $G$. *Precisamente*

$$\phi'(x) = -\frac{\partial_x G(x, \phi(x))}{\partial_y G(x, \phi(x))}, \tag{15}$$

*per* $x$ *vicino a* $x_0$.

Un risultato analogo vale se $\partial G/\partial x(x_0, y_0) \neq 0$. Allora il grafico sara' del tipo $x = \psi(y)$ per qualche funzione $\psi$.

**Esempio 9.3** *La funzione* $G(x, y) = x^2 + y^2$, *attorno al punto* $(x_0, y_0) = (0, 1)$. *Verificare se* $\partial G/\partial y(0, 1) \neq 0$. *Scrivere esplicitamente* $y = f(x)$.

*La funzione* $G(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - x_2^3$, *attorno al punto* $(0, 1)$. *Verificare che* $\partial G/\partial x_2(0, 1) \neq 0$. *Differenziare l'identita'* $G(x_1, \phi(x_1)) = 0$ *per ottenere* $\phi'(0)$.

**Gradiente e insiemi di livello.**

**Definizione 9.4 (Insieme di livello regolare)** *Data* $G : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *diciamo che l'insieme* $x_0 \in A$ *è un punto regolare per l'insieme di livello* $\{x \in A : G(x) = G(x_0)\}$ *se* $\nabla G(x_0) \neq 0$. *Se ogni punto* $x_0$ *in un insieme di livello* $\{x \in A : G(x) = c\}$ *è regolare diciamo che l'insieme di livello è regolare.*

**Proposizione 9.5 ([SB], Teorema 5.4)** *Se* $x_0 \in \mathbb{R}^2$ *è un punto regolare per* $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *allora* $\nabla G(x_0)$ *è perpendicolare all'insieme di livello di* $G$ *contenente* $x_0$.

Verifica della Proposizione 9.5. Usare l'osservazione 9.2 per scrivere il vettore tangente all'insieme di livello in questione e constatare che e' ortogonale a $\nabla G(x_0)$.

**Esercizio 9.6** *Data $F(x,y) = (y^2+y)e^{x^2}$ e il punto $(x_0,y_0) = (1,1)$, dire a quale isieme di livello appartiene $(x_0,y_0)$. E' possibile scrivere tale insieme localmente come grafico $y = \phi(x)$? Se si' calcolare $\phi'(1)$. E' possibile scrivere l'insieme localmente come grafico $x = \phi(y)$?*

Illustrazione della dimostrazione del teorema della funzione implicita in 2 variabili (libro, pag. 109). [12]

**Teorema della funzione implicita. Caso di dimensione $> 2$.**

Discussione dettagliata del caso tridimensionale.

**Esercizio 9.7** *Dato l'insieme di livello definito in $\mathbb{R}^3$ da $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = x^3e^yz + z^4 = 2\}$, verificare che $(1,0,1) \in \Sigma$. Verificare se è possibile scrivere $\Sigma$ come grafico della forma $z = \phi(x,y)$ e in caso affermativo calcolare $\partial_x\phi(1.0)$ e $\partial_y\phi(1,0)$.*

**Esercizio 9.8** *Data $G(x,y,z) = z^2e^x + ye^y$, verificare se è possibile scrivere l'insieme di livello 0 di $G$ attorno all'origine come grafico $z = \phi(x,y)$, $y = \phi(x,z)$ o $x = \phi(y,z)$.*

## 10 Martedi' 10 marzo

**Teorema 10.1 (della funzione implicita in $\mathbb{R}^n$, [SB], Teorema 5.6, punto (a))** *Data $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, consideriamo un insieme di livello $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = c\}$. Sia $a = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \in \Sigma$ un punto regolare. [13] Assumiamo che sia $\partial_n F(a) \neq 0$. Allora esiste una palla $B_\rho = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \|(x_1, \dots, x_{n-1}) - (a_1, \dots, a_{n-1})\| < \rho\}$, un intervallo $I_\varepsilon = (a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon)$ e una funzione $\phi : B_\rho \to I_\varepsilon$ di classe $C^1$, tali che*

$$\Sigma \cap (B_\rho \times I_\varepsilon) = \{(x,y) \in B_\rho \times I_\varepsilon : y = \phi(x)\}.$$

*In particolare, $F(x_1, \dots, x_{n-1}, \phi(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$ per ogni $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in B_\rho$ e*

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_{n-1}) = -\frac{\partial_j F(x_1, \dots, x_{n-1}, \phi(x_1, \dots, x_{n-1}))}{\partial_n F(x_1, \dots, x_{n-1}, \phi(x_1, \dots, x_{n-1}))},$$

*per ogni $j = 1 \dots, n-1$ e $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in B_\rho$.*

**Esercizio 10.2** *Preso l'insieme definito in $\mathbb{R}^n$ dall'uguaglianza $F(x_1, \dots, x_n) = \|x\|^2 - x_1\|x\|^4 - 1 = 0$ e il punto $a = e_n = (0,0,\dots,1)$, verificare che questo insieme e' localmente attorno ad $a$ un grafico del tipo $x_n = \phi(x_1, \dots, x_{n-1})$ e calcolare $\frac{\partial\phi}{\partial x_j}(x_1, \cdots x_{n-1})$ per ogni $j = 1, \dots, n-1$ e $(x_1, \dots, x_{n-1})$ vicino a zero.*

---

[12] Attenzione all'errore nel libro, p. 109. Sostituire l'affermazione errata

$$G(x, y_0 - \varepsilon) < 0 \quad \text{e} \quad G(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$

con quella corretta: esiste $\delta \leq \varepsilon$ tale che

$$G(x, y_0 - \varepsilon) < 0 \quad \text{e} \quad G(x, y_0 + \varepsilon) > 0 \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

[13] Cioè tale che valga $\nabla F(a) \neq 0$.

**Ottimizzazione vincolata** Consideriamo, date due funzioni $f, h$ di due variabili a valori reali, il problema

$$\begin{cases} \max f(x_1, x_2) \\ h(x_1, x_2) = c \end{cases} \tag{16}$$

**Definizione 10.3 (punto di massimo/minimo vincolato per** (16)**)** *$\tilde{x}$ è di massimo vinzolato per* (16) *se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \geq f(\tilde{x})$ per ogni $x \in B_\delta(\tilde{x})$ tale che $h(x) = c$.*

- Considerazione geometrica ([SB, Figura 8.1, p. 179]): disegnando gli insiemi di livello di $f, h$ si intuisce che, se $\tilde{x}$ è un punto di massimo per (16), allora gli insiemi di livello di $f$ ed $h$ debbono essere tangenti in $\tilde{x}$.

- Confronto tra la nozione di punto di massimo libero vs vincolato. Massimo libero implica massimo vincolato. Per il viceversa, analisi dell'esempio

$$\max x_1^2 - x_2^2, \quad \text{con vincolo} \quad x_1 = 0$$

e

$$\max x_1^2 - x_2^2, \quad \text{con vincolo} \quad x_2 = 0.$$

**Teorema 10.4 (Condizioni necessarie/punti critici vincolati)** *Se $\tilde{x}$ è un punto di minimo vincolato per* (16) *e $\tilde{x}$ è regolare,* [14] *allora esiste $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(\tilde{x}) = \tilde{\mu} \nabla h(\tilde{x}). \tag{17}$$

Se $\tilde{x}$ soddisfa (17) si chiama *punto critico vincolato.* Il numero $\tilde{\mu}$ si chiama *moltiplicatore.*

Dimostrazione. Svolta usando il teorema della funzione implicita per $h$ e l'analisi della funzione di una variabile $x \mapsto f(x, \phi(x))$.

**Esercizio 10.5** *Calcolare i punti critici vincolati per il problema*

$$\begin{cases} \max x_1^2 + x_2 \\ \textit{con vincolo } x_1^2 + x_2^2 = 1. \end{cases}$$

## 11 Mercoledì 11 marzo

Versione $n-$dimensionale del problema. Date $f, h$ funzioni di classe $C^1$ di $n$ variabili a valori scalari, consideriamo

$$\begin{cases} \max f(x) \\ \text{con vincolo } h(x) = c \end{cases} \tag{18}$$

Avremo quindi

**Teorema 11.1 (Condizioni necessarie/punti critici vincolati)** *Se $\tilde{x}$ è un punto di minimo vincolato per* (18) *e $\tilde{x}$ è regolare,* [15] *allora esiste $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$ tale che*

$$\nabla f(\tilde{x}) = \tilde{\mu} \nabla h(\tilde{x}).$$

Se $\tilde{x}$ soddisfa (17) si chiama *punto critico vincolato.*

[14] $\nabla h(\tilde{x}) \neq 0$

[15] $\nabla h(\tilde{x}) \neq 0$

**Formalismo lagrangiano.** In associazione al problema (18) introduciamo $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$L(x, \mu) = f(x) - \mu[h(x) - c]. \tag{19}$$

**Proposizione 11.2** *$\tilde{x}$ è un punto critico vincolato per* (18) *se e solo se esiste $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$ tale che $(\tilde{x}, \tilde{\mu})$ è critico libero per $L$.*

La dimostrazione è del tutto elementare.

**Esercizio 11.3** *Cercare i punti critici vincolati per*

$$\begin{cases} \max x_1 + x_2 \\ \textit{con } x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \max x_1 x_2 \\ \textit{con } x_1 + 2x_3 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \max x_1^2 + x_2 x_3 \\ \textit{con } x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max \|x\|^2 \\ \textit{con } b \cdot x = c \end{cases} \quad \textit{dove } x \in \mathbb{R}^n \textit{ con } b \in \mathbb{R}^n \textit{ è fissato.}$$

$$\begin{cases} \min x_1 + x_2 + x_3^2 \\ \textit{con } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1. \end{cases}$$

**Ottimizzazione con più vincoli di uguaglianza** Caso di tre variabili e due vincoli.

$$\begin{cases} \max f(x, y, z) \\ \text{con } h_1(x, y, z) = c_1 \quad h_2(x, y, z) = c_2 \end{cases}$$

Breve discussione sul caso di due vincoli lineari del tipo

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \quad \text{e} \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_1 \end{cases} \tag{20}$$

Cosa succede a seconda che siano $(a_1, b_1, c_1)$ e $(a_2, b_2, c_2)$ linearmente dipendenti/indipendenti? Qual è la struttura dell'insieme di punti che soddisfano (20)?

**Problema con $n$ variabili e $m < n$ vincoli. [SB, p. 185 e seguenti]** Date $f, h_1, \ldots, h_m : A \to \mathbb{R}$, tutte funzioni di classe $C^1$, con $A$ aperto di $\mathbb{R}^n$, consideriamo

$$\begin{cases} \max f(x) \\ \text{con vincoli} \\ h_1(x) = c_1 \\ \vdots \\ h_m(x) = c_m. \end{cases} \tag{21}$$

**Definizione 11.4 (Vincolo regolare)** *Date $h_1, \ldots, h_m : A \to \mathbb{R}$, funzioni di classe $C^1$ su $A$ aperto di $\mathbb{R}^n$, assumiamo che l'insieme*

$$\Sigma := \{x \in A : h_1(x) = c_1, \ldots, h_m(x) = c_m\},$$

*sia non vuoto. Allora diciamo che $\Sigma$ è regolare se i gradienti $\nabla h_1(x), \ldots, \nabla h_m(x)$ sono linearmente indipendenti in ogni $x \in \Sigma$.*

La *Lagrangiana* associata al problema (21) è la funzione $L : A \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$L(x, \mu_1, \dots, \mu_m) = f(x) - \mu_1[h_1(x) - c_1] - \cdots - \mu_m[h_m(x) - c_m].$$

I candidati puntio di massimo/minimo per il problema (21) si cercheranno tra gli $\tilde{x} \in A$ per i quali esistono $\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_m$ tali che

$$\nabla L(\tilde{x}, \tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_m) = 0 \tag{22}$$

La condizione (22) è equivalente (verifica immediata) al sistema di $n + m$ equazioni nelle $n + m$ incognite $(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_m)$

$$\begin{cases} \nabla f(x) = \sum_{k=1}^{m} \mu_k \nabla h_k(x), \\ h_1(x) = c_1 \\ \vdots \\ h_m(x) = c_m. \end{cases} \tag{23}$$

Quando le equzioni (23) sono tutte soddisfatte in un $(\tilde{x}, \tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_m) \in A \times \mathbb{R}^m$, si dice che $\tilde{x}$ è un punto critico vincolato con moltiplicatori $\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_m$.

**Esercizio 11.5** *Trovare i punti di critico vincolati per il problema*

$$\begin{cases} \min(x^2 + y^2 + z^2) \\ x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

## 12 Martedì 17 marzo

**Esercizio 12.1** *Trovare i punti di critico vincolati per il problema*

$$\begin{cases} \min(xy + z^2) \\ x + y = 1 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

**Convessità**

**Definizione 12.2 (Segmanto in $\mathbb{R}^n$)** *Definiamo dati $x, y \in \mathbb{R}^n$ il segmento*

$$[x, y] = \{x + t(y - x) : 0 \le t \le 1\}.$$

**Definizione 12.3 (Insieme convesso)** *$A \subset \mathbb{R}^n$ è convesso se per ogni $x, y \in A$ vale $[x, y] \subset A$.*

Esempi tramite figure.

**Esercizio 12.4** *Verificare usando la disuguaglianza triangolare che $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ è convesso.*

**Definizione 12.5 (Funzione concava)** *Dato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, diciamo che $f$ è concava in $I$ se vale*

$$f(tx + (1 - t)y) \ge tf(x) + (1 - t)f(y), \qquad \forall x, y \in I, \quad \forall t \in [0, 1]. \tag{24}$$

Interpretazione geometrica della concavità . Il grafico di $f$ sta sopra il segmento $[(x, f(x)), (y, f(y))]$ per ogni $x, y \in I$.

**Esempi.** 1) Verificare che $f(x) = ax + b$ è sia concava che convessa.
2) verificare usando la definizione che $f(x) = x^2$ è convessa.

## 13 18 marzo 2009

**Teorema 13.1 (Caratterizzazioni funzioni concave $C^1$)** *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione cdi classe $C^1$ sull'intervallo aperto $I$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:*
*1) f è concava in $I$.*
*2) Pero ogni $x, x_0 \in I$ vale*

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \tag{25}$$

*3) $f'$ è decrescente in $I$.*

*Dimostrazione.* Proviamo innanzitiutto che $(1) \Rightarrow (2)$. Per la concavità vale $f(x_0 + t(x - x_0)) \geq f(x_0) + t(f(x) - f(x_0))$. Portando $f(x_0)$ a sinistra e dividendo per $t$,

$$\frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t(x - x_0)}(x - x_0) \geq f(x) - f(x_0).$$

Da qui si ottiene $(2)$ andando al limite per $t \to 0+$.

Ora proviamo che $(2) \Rightarrow (3)$. Siano $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$. Usando (25) si ottiene

$$f(x_1) \leq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2) \quad \text{e} \quad f(x_2) \leq \{f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)\}$$

Combinando le due disugiaglianze

$$f(x_1) \leq \{f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1)\} + f'(x_2)(x_1 - x_2), \quad \Rightarrow 0 \leq (f'(x_2) - f'(x_1))(x_1 - x_2).$$

Quindi $f'(x_2) \leq f'(x_1)$, perché $x_1 - x_2 < 0$.

Infine dimostriamo che $(3) \Rightarrow (1)$. Prendiamo $x, y \in I$, con $x < y$ e consideriamo il punto $x + t(y - x)$. Per la Formula di Torricelli,

$$f(x+t(y-x)) - f(x) = \int_x^{x+t(y-x)} f' \geq f'(x+t(y-x))[x+t(y-x)-x] = f'(x+t(y-x))t(y-x).$$

Abbiamo usato il fatto che $f'$ è decrescente in $[x, x + t(y - x)]$. Quindi

$$f(x + t(y - x)) \geq f(x) + f'(x + t(y - x))t(y - x). \tag{26}$$

Analogamente, lavorando nell'intervallo $[x + t(y - x), y]$ abbiamo

$$f(y) - f(x + t(y - x)) \leq f'(x + t(y - x))[y - (x + t(y - x))] = f'(x + t(y - x))(1 - t)(y - x),$$

da cui traiamo

$$f(x + t(y - x)) \geq f(y) - f'(x + t(y - x))(1 - t)(y - x). \tag{27}$$

Moltiplicando (26) per $1 - t$ e (27) per $t$ e sommando le due disuguaglianze ottenute si ottiene

$$f(x + t(y - x)) \geq (1 - t)f(x) + tf(y),$$

come desiderato.

**Caratterizzazione delle funzioni concave $C^2$.**

**Teorema 13.2** *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è di classe $C^2$ sull'intervallo aperto $I \subset \mathbb{R}$, allora $f$ è concava se e solo se $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in I$.*

*Dimostrazione.* Segue immediatamente dall'equivalenza (1) $\Leftrightarrow$ (3) del teorema precedente e dalla caratterizzazione delle funzioni monotone in una variabile.

## 14 20 marzo

**Funzioni concave in più variabili**

**Definizione 14.1 (Funzione concava)** *Data $f : U \to \mathbb{R}$, con $U \subset \mathbb{R}^n$ convesso, si dice che $f$ è concava se per ogni $x, y \in U$ e per ogni $t \in [0,1]$ vale*

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

**Proposizione 14.2 (Caratterizzazione unidimensionale, [SB], Teorema 11.1)** *$f$ è concava su $U \subset \mathbb{R}^n$ convesso, se e solo se per ogni $x, y \in U$ la funzione $g_{xy} : [0,1] \to \mathbb{R}$,*

$$g_{xy}(t) := f(x + t(y-x)),$$

*è concava.*

**Teorema 14.3 (Caratterizzazione delle funzioni concave $C^1$)** *Data $f : U \to \mathbb{R}$ di classe $C^1$ sull'aperto convesso $U$, allora $f$ è concava se e solo se per ogni $x, x_0 \in U$ vale*

$$f(x) \leq f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0). \tag{28}$$

Geometricamente (28) significa che il grafico di $f$ sta sotto quello della sua approssimazione lineare di punto iniziale $x_0$.

**Teorema 14.4 (Funzioni concave $C^2$)** *Se $f : U \to \mathbb{R}$ è di classe $C^2$ sull'aperto convesso $U$, allora $f$ è concava se e solo se la forma quadratica hessiana soddisfa per ogni $x \in U$*

$$h^T D^2 f(x) h \geq 0, \qquad \forall\, h \in \mathbb{R}^n. \tag{29}$$

Cenno di dimostrazione. Calcolare le derivate seconde della funzione $g_{xy}$ e vedere che in esse appare la forma quadratica hessiana $D^2 f$. Usare poi la caratterizzazione unidimensionale.

**Esercizio 14.5** *Studiare, analizzando la forma hessiana, la convessità /concavità della funzione:*

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a \cdot x + b, \quad \text{con } a \in \mathbb{R}^n \text{ e } b \in \mathbb{R} \text{ assegnati.}$$

*Provare che la funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \exp\Big( - \frac{\|x\|^2}{2} \Big)$$

*è concava sulla palla unitataria $B_1(0)$.*

*Studiare la concavità /convessità della funzione $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$.*

*Verificare che la funzione $f : (0, +\infty) \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 16 x^{1/4} y^{1/4}$ è concava.*

**Esercizio 14.6** *Determinare i punti critici vincolati per i problemi*

$$\begin{cases} \max(x + y + z^2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max(x^2 + y + z^2) \\ xe^y = 1. \end{cases}$$

**Esercizio 14.7** *Individuare i punti critici della funzione* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (x^2 + 2y^2) \exp(-(x^2 + y^2)).$$

**Esercizio 14.8** *Individuare e classificare i punti critici della funzione*

$$f(x, y) = \exp(x^2 + x + y^2).$$

## 15 Lista argomenti prova orale

- Spazio Euclideo, prodotto scalare, norma e loro proprietà . Disuguaglianze di Cauchy-Schwarz e triangolare.
- Differenziabilità, Teorema fondamentale sulla differenziabilità.
- Derivata lungo una curva. Definizione e suo calcolo. Derivata direzionale. Definizione e formula per il calcolo.
- Derivate seconde, Teorema di Schwarz, Formula di Taylor del secondo ordine.
- Condizioni necessarie per punto di massimo/minimo libero.
- Segno di una forma quadratica. Definizione e criteri discussi in classe, nel caso bidimensionale e in dimensione $n$.
- Condizioni sufficienti per punto di massimo/minimo libero in termini della matrice Hessiana.
- Teorema della funzione implicita per funzioni a valori scalari. Caso bidimensionale e $n-$dimansionale. Gradiente di una funzione e insiemi di livello.
- Condizioni necessarie per punti di massimo/minimo vincolato. Dimensione $n = 2$ e dimensione qualsiasi. Punti critici vincolati. Linguaggio lagrangiano.
- Problemi di massimo minimo con più vincoli di uguaglianza. Condizioni di regolarità (vincolo regolare) e linguaggio lagrangiano pertinente.
- Segmenti in $\mathbb{R}^n$, insiemi convessi. Funzioni concave/convesse di una sola variabile. Caratterizzazioni delle funzioni concave/convesse $C^1$ e $C^2$ in una variabile. Funzioni concave/convesse in $n$ variabili. Caratterizzazione delle funzioni concave/convesse in più variabili di classe $C^1$ e $C^2$.

## 16 Esercizi modello

1. Individuare e classificare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3.$$

2. Data la funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$$f(x,y,z) = xy - 2x^2 + e^{-(y^2+z^2)},$$
individuarne i punti critici. Il punto $(0,0,0)$ è critico? In caso affermativo classificarlo.

3. È data la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$F(x,y) = x^2(y+1) + y^2e^x.$$
A quale insieme di livello di $F$ appartiene il punto $(1,0)$? È possibile scrivere attorno a $(1,0)$ tale insieme di livello come grafico del tipo $x = \psi(y)$? In caso affermativo, quanto vale $\psi'(0)$?

4. È data la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$F(x,y) = x^4e^{x+y} + xe^{y^2}.$$
Consideriamo il punto $(0,0)$. È possibile scrivere l'insieme di livello $\{(x,y) : F(x,y) = F(0,0)\}$ come grafico $x = \phi(y)$ attorno a $(0,0)$? In caso affermativo, quanto vale $\phi'(0)$? Stessa domanda per grafico del tipo $y = \phi(x)$.

5. Determinare i punti critici vincolati per il problema in $\mathbb{R}^3$
$$\begin{cases} \max(x + y^2 + zx) \\ x^2 + y^2 + z = 2. \end{cases}$$

6. Trovare i punti critici di $f(x,y,z) = x^2 - 2x + y^2e^{x+z^2}$. Quanti sono?

7. Data $f(x,y) = \frac{1}{4}(x^2+y^2-1)^2$, calcolare per ogni $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, la forma quadratica Hessiana
$$(\xi,\eta) \mapsto (\xi,\eta)D^2f(x_0,y_0)\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix}.$$
La si calcoli in particolare nel punto $(x_0,y_0) = (0,0)$. Si può dire che la funzione $f$ è convessa in $\mathbb{R}^2$? Perché?

8. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x) = x_1e^{x_1} + x_2e^{x_2^2}$, e un punto fissato $\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$, calcolare la derivata direzionale $\dfrac{\partial f}{\partial v}(\tilde{x})$ in una qualsiasi direzione $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$. Si dica inoltre per quale $v$ è massima $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$.