Analisi Matematica B
Ingegneria biomedica – Cesena 2016/17

Aggiornato al 22 aprile 2017

Informazioni pratiche:

- Materiale di riferimento: dispense del Prof. Cicognani)
- Queste pagine contengono gli argomenti svolti da Daniele Morbidelli e sono reperibili alla url `http://www.dm.unibo.it/~morbidel/didattica.html`. Verranno aggiornate durante lo svolgimento del corso
- I teoremi/proposizioni con l'asterisco ($*$) sono stati dimostrati.

1. Argomenti svolti (Daniele Morbidelli). Lista provvisoria

1.1. Lunedí 27 febbraio 2017

(1)

- Introduzione alle funzioni di piú variabili: dominio, codominio, grafico, insiemi di livello.
- Il prodotto scalare euclideo in $\mathbb{R}^n$ e le sue proprietà. Vettori ortogonali
- Norma euclidea e sue proprietà.

Esercizi

1. Calcolare $\langle(1,2,3),(0,-1,5)\rangle$
2. Indicato con $e_1,\dots,e_n$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$, calcolare il prodotto scalare $\langle e_j, e_k\rangle$ a seconda che sia $j=k$ o $j\neq k$.
3. Calcolare, in $\mathbb{R}^n$, $\|e_1+2e_3\|$.
4. Individuare tutti i vettori $(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$ che siano ortogonali a $(1,-1,3,4)$.
5. Individuare tutti i vettori $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ simultaneamente ortogonali a $u=(1,0,3)$ e a $v=(0,1,1)$.
6. Aiutandosi con uno strmento di plot online (ad esempio `http://www.math.uri.edu/~bkaskosz/flashmo/graph3d/`) visulaizzare il grafico delle due funzioni viste in classe e delle funzioni $f(x,y)=1-2x$ e $f(x,y)=2-x-2y$. Facendo varie prove concoefficienti numerici si verifichi empiricamente che ogni funzione del tipo $f(x,y)=a+by+c$ ha come grafico un piano nello spazio.

1.2. Mercoledí 1 marzo 2017

Distanza tra punti in $\mathbb{R}^n$. Proiezione di un vettore su un sottospazio unidimensionale. Intorni sferici $B(x,r)$. Punti di accumulazione, punti interni. Definizione di insieme aperto. (3)

1.3. Venerdí 3 marzo 2017

(5)

Insiemi aperti e chiusi (con alcuni esempi). Definizione di limite con alcuni esempi. Funzioni continue. Enunciato del Teorema di Weierstrass.

Definizione di derivata parziale per funzioni di due, 3 e n variabili. Esempi di calcolo. Esempio di funzione con derivate parziali ma non contimua in un punto.

Discussione della possibile forma del polinimio di Taylor del primo ordine per una funzione di due variabili (da completare).

Esercizi

Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni.

- Calcolare le derivate parziali rispetto a tutte le variabili delle seguenti funzioni e scrivere di ciascuna il graziente.

$$f(x,y) = xy, \quad f(x_1,x_2) = x_1(x_2 + e^{x_1}), \quad f(x_1,x_2) = x_1^2 x_2$$
$$f(x_1,x_2) = \sqrt{1+x_2}, \quad f(x_1,x_2) = \log(1 + x_1 + x_1x_2), \quad f(x_1,x_2) = (e^{x_1}+1)^2,$$
$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2x_3, \quad f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2)e^{-x_3}, \quad f(x_1,x_2) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2,$$
$$f(x_1,x_2) = \|(x_1,x_2)\|, \quad f(x_1,x_2) = \frac{x_1+x_2}{x_1^2+1},$$
$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|.$$
$$f(x,y,z) = \arctan(1 + x^2yz) \quad f(x,y) = \frac{e^{xy}}{1+e^{-xy}}$$

- Verificare, osservando (come fatto in classe) il comportamneto di $\lim_{t\to 0} f(tu,tv)$, se il limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 + \sin(xy)}{x^2 + 2y^2}$$
può esistere.

1.4. Lunedí 6 marzo

Definizione di funzione differenziabile. Continuità delle funzioni differenziabili. Formula di Taylor del primo ordine. Equazione del piano tangente al grafico di una funzione di due variabili. Esercizi. (8)

Esercizi

- Scrivere il polinomio di Taylor del primo ordine per la funzione
$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{in } (\overline{x},\overline{y}) = (-1,3).$$
Scrivere anche il differenziale e l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(-1,3,f(-1,3))$.
- Data la funzione $g(x,y) = x^3 - xy + y^2$, individuare tutti i possibili $(\overline{x},\overline{y})$ per i quali il piano tangente al grafico di g in $(\overline{x},\overline{y},f(\overline{x},\overline{y}))$ è della forma $z =$ costante. Scrivere poi le equazioni dei piani tangenti individuati.

1.5. Mercoledí 8, ore 9

Esercitazione in classe con il tutor. (10)

1.6. Venerdí 10 marzo, ore 9

Formula del gradiente per il calcolo delle derivsate direzionali (∗). Direzione di massima crescita per una funzione di due o piú variabili. Cammini (curve) in $\mathbb{R}^n$. Velocità di una curva $r \mapsto r(t) = (r_1(t),\dots,r_n(t))$. Formula per la derivata di funzione composta. Discussione del caso modello: derivata di una funzione scalare $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lungo una curva $r :]a,b[\to \mathbb{R}^n$. Discussione della proprietà di ortogonalità tra la linea tangente a un insieme di livello $\{(x,y) : F(x,y) = 0\}$ e il gradiente della funzione F. (12)

Esercizi

Assumiamo che tutte le funzioni seguenti siano differenziabili in ogni punto. Data una funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, scrivere in termini delle derivate di f,

(1) la derivata $\frac{\partial g}{\partial t}$ in un punto $t \in \mathbb{R}$ qualsiasi della funzione $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(t^2, e^{-t}, 1/t)$.

(2) le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ in un qualsiasi (x, y) della funzione $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x, y) = f(xy^2, \log(x + y^2), x)$$

(3) Scrivere infine le matrici Jacobiane di g e h in punti t e (x, y) qualsiasi.

Si provi a rispondere ai tre punti precedenti considerando il caso in cui la funzione f assume valori vettoriali $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ (indicando ad esempio con f_1 e $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ le sue componenti).

1.7. Mercoledí 15 marzo

Esercitazione in classe con il tutor. (15)

1.8. Venerdí 17 marzo

Derivate seconde, Teorema di Schwarz. Matrice hessiana. Forme quadratiche positive, negative, indefinite e semidefinite. Formula di Taylor di ordine 2 con resto di Lagrange (∗). Formula con resto secondo di Peano. Punti di massimo e di minimo. Condizioni necessarie del primo (∗) e secondo ordine. (17)

1.9. Lunedí 20 marzo

Condizioni sufficienti del secondo ordine per punti di minimo (∗), massimo e di sella liberi. (20)

Varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$ definite come insiemi di livello.

Esercizi

Trovare e classificare i punti critici delle funzioni

$$f(x, y) = \log(x - y^2) - x \qquad f(x, y) = 2xye^x + y^2$$

Verificare se gli insiemi

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2e^y - y^2 + y = 0\} \quad \text{e} \qquad N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - x^2y + 2xy - 4y = 0\}$$

soddisfano o meno la definizione di varietà.

Individuare infine tutti i valori di $b \in \mathbb{R}$ per i quali l'insieme

$$M_b = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2e^y - y^2 + y = b\}$$

non soddisfa la definizione di varietà.

1.10. Venerdí 24 marzo

Varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$ definite come insiemi di livello di funzioni scalari. Varietà di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$. Spazio tangente e spazio normale. Problemi di ottimizzazione vincolata. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange. (22)

Definizione di varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^3$ come luogo di zeri simultanei di due funzioni scalari.

Esercizi

- Verificare per quali valori di $b \in \mathbb{R}$ l'insieme
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy + yz + x - 2zx = b\}$$
è una superficie regolare.
- Individuare i punti critici vincolati per il problema
$$\max / \min(y - x^2) \text{ con vincolo } x^2 + y^2 = 1.$$
Confrontando i valori di $f(x, y) = y - x^2$ in tali punti, stabilire quanto valgono $\min f$ e $\max f$ sul cerchio unitario.
- Usando la formula trovata in classe, dire qual è la minima distanza possibile dall'origine di un punto (x, y) che si trovi sulla retta di equazione $2x + y - 1 = 0$.
- Dire quanto vale
$$\min\{x : y^2 - x^3 = 0\}.$$
Si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange? Spiegare...
- Dato un grafico del tipo $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = h(x, z)\}$ con $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funzione regolare, si descrivano in un punto generico $(\overline{x}, h(\overline{x}, \overline{z}), \overline{z})$ lo spazio tangente e normale al grafico.

1.11. Lunedí 27 marzo

Varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$ come intersezione di due superfici regolari. Spazio tangente/normale a una varietà $M = \{x \in \mathbb{R}^3 : g_1(x) = b_1, \quad g_2(x) = b_2\}$.

Introduzione all'integrale in due variabili. Domini normali. Formula di riduzione di un integrale su un dominio normale.

Esercizi

- Date due funzioni di una variabile $h_1, h_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, entrambe di classe C^k definiamo
$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = h_1(x_3) \quad \text{e} \quad x_2 = h_2(x_3)\}$$
Verificare che M è una varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$. Dato un suo punto generico $(h_1(\overline{x}_3), h_1(\overline{x}_3), \overline{x}_3) \in M$ descrivwere lo spazio normale ad M in tale punto.

  Si consideri infine la curva su M seguente: $r(t) = ((h_1(\overline{x}_3 + t), h_2(\overline{x}_3 + t), \overline{x}_3 + t))$, per $t \in \mathbb{R}$. Verificare che $r'(0)$ è perpendicolare allo spazio normale individuato nel punto precedente.

- Si consideri il problema di estremo vincolato
$$\min / \max\left\{\frac{x^2}{2} + y \quad \text{con} \quad y - e^{-x^2} = 0\right\}$$
Individuare i punti critici vincolati del problema.

  Risolvere poi lo stesso problema "eliminando il vincolo", cioè trovando i punti critici liberi della funzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = \frac{x^2}{2} - e^{-x^2}$.

- Calcolare usando la formula di riduzione mostrata in classe l'integrele
$$\int_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\, 0 \le y \le x^2 \le 1\}} xe^y \, dxdy.$$

Mercoledí 29 marzo

Tutor

1.12. Venerdí 31 marzo

Formula per il cambio di variabile per integrali doppi. Le coordinate polari piane.

Integrali tripli. Formula di riduzione "per strati" $\int\int\int f(x,y,z)dxdydz = \int dz\big(\int f(x,y,z)dxdy\big)$. Solidi di rotazione (= insiemi del tipo $\{(x,y,z) : z \in [a,b]$ e $|(x,y)| \leq h(z)\}$ con h assegnata). Baricentro (geometrico) di un insieme $D \subset \mathbb{R}^3$.

Esercizi

- Calcolare il baricentro $\mathrm{Bar}(D) = (\frac{1}{\mathrm{mis}(D)}\int_D xdxdy, \frac{1}{\mathrm{mis}(D)}\int_D ydxdy)$ dei seguenti insiemi piani
$$D_1 = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq \frac{b}{a}(a-x)\Big\}$$
$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq |(x,y)| \leq 3 \quad \text{con } x \geq 0 \text{ e } y \geq 0\}$$
- Calcolare
$$\int_{\{(x,y,z)\,:\,z\in[2,3],\ |(x,y)|\leq 1\}} (xz+y^2)dxdydz$$
Calcolare poi la misura del solido di rotazione
$$D_3 = \{(x,y,z) : \quad 0 < z < 1, \quad |(x,y)| \leq z^2\}$$
e
$$\int_{D_3} x^2 zdxdydz.$$

1.13. Lunedí 3 aprile

Archi continui, riparametrizzazioni, curve, curve orientate. Lunchezza di una curva. Integrali curvilinei di funzioni scalari lungo una curva $\int_\gamma ds$.

Esercizi

- Calcolare
$$\int_\gamma \sqrt{y}ds$$
lungo la curva γ parametrizzata da $r : [1,b] \to \mathbb{R}^2$,, $r(t) = (t,t^2)$. Calcolare lo stesso integrale con le altre due parametrizzazioni
$$\rho : [1,\sqrt{b}] \to \mathbb{R}^2, \quad \rho(\tau) = (\sqrt{\tau},\tau) \qquad \text{e}$$
$$R : [0,b-1] \to \mathbb{R}^2, \quad ,R(\sigma) = (b-\sigma,(b-\sigma)^2).$$
e constatare che si ottiene lo stesso risultato.
- Calcolare la lunghezza del tratto di elica $r : [0,b] \to \mathbb{R}^3$
$$r(t) = (\cos t, \sin t, t)$$
- Calcolare la lunghezza dell'arco di spirale seguente: $r : [0,b] \to \mathbb{R}^2$,
$$r(t) = (e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t)).$$

1.14. Venerdí 7 aprile

Nozione di campo vettoriale $f : D \to \mathbb{R}^n$ e forma differenziale associata $\omega_f = \sum_j f_j(x)dx_j$. Integrale di una forma differenziale/campo vettoriale su un arco regolare orientato. Nozione di campo (forma differenziale) esatto(a). Campi conservativi.

Esercizi

- Calcolare l'integrale
$$\int_\gamma xdy - ydx$$
sui due cammini γ_1 e γ_2, parametrizzati rispettivamente da $r_1(t) = (\cos t, \sin t)$, con $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, e $r_2(t) = (0, t)$ con $0 \leq t \leq 1$. Fatto questo calcolo e tenendo conto dei punti iniziali e finali dei due cammini orientati, cosa possiamo dire a proposito dell'esattezza del campo corrispondente a $\omega = xdy - ydx$?
- Data la forma esatta $\omega = \lambda dx + \mu dy$ con λ, μ costanti assegnate, si cerchi con qualche esperimento di individuarne un potenziale. Dire poi quanto vale l'integrale $\int_\gamma \omega$, dove γ è un cammino con punto iniziale (a_1, b_1) e punto finale (a_2, b_2).
- Stessa domanda per la forma $\omega = xdx + 3ydy$ e il punto iniziale $(0, 0)$ e finale (a, b).
- Se $h :\to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1, trovare un potenziale della forma differenziale $\omega = yh'(x)dx + h(x)dy$ e dire quanto vale $\int_{\gamma_{p,q}} \omega$, dove γ è una qualsiasi curva regolare a tratti di punto iniziale $p = (a, b)$ e $q = (c, d)$.

1.15. Lunedí 9 aprile

Aperti connessi per archi. Caratterizzazione di tutti i potenziali di una forma esatta su un aperto connesso. Forme chiuse/campi irrotazionali. Chiusura delle forme esatte. Esempio di forma chiusa ma non esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Domini semplicemente connessi (definizione informale). Teorema sull'esattezza delle forme chiuse su aperti semplicemente connessi.

Esercizi

- (Significato del termine di rotazione) Data la forma differenziale $\omega = udx + vdy$, consideriamo attorno a un punto $(\overline{x}, \overline{y})$ l'usuale svilupppo di Taylor per u, $u(x + h, y + k) = \overline{u} + \overline{u}_x h + \overline{u}_y k + O(h^2 + k^2)$ e quello analogo per v.

  Supponendo che il resto sia trascurabile (r molto piccolo, oppure addirittura assumendo le funzioni u e v lineari) Calcolare l'integrale su un cerchio orientato parametrizzato da
$$r(t) = (\overline{x} + r\cos t, \overline{y} + r\sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
e vedere quali dei sei numeri $\overline{u}, \overline{u}_x, \overline{u}_y, \overline{v}, \overline{v}_x, \overline{v}_y$ appaiono nel risultato e sotto quale forma.

- Dato il campo $f(x, y) = \left(\frac{2xy}{(1+x^2)^2}, -\frac{1}{1+x^2}\right)$ e la forma differenziale associata
$$\omega = \frac{2xy}{(1 + x^2)^2}dx - \frac{1}{1 + x^2}dy,$$
verificare che è esatta e calcolarne una primitiva (cioè un potenziale del campo f).

- Dato un parametro $b \in \mathbb{R}$ e la forma differenziale
$$\omega = (y + z)dx + (x + z)dy + (x + by)dz,$$
calcolare l'integrale di ω sul cammino parametrizzato da $r(t) = (t, t^2, t^2)$ per $0 \leq t \leq 1$.

Stabilire poi per quali $b \in \mathbb{R}$ la forma è esatta e trovarne un potenziale (ad esempio integrando sul segmento rettilineo che collega l'origine con (x, y, z), oppure integrando sulla somma dei tre segmenti: $(0, 0, 0) \to (x, 0, 0)$, $(x, 0, 0) \to (x, y, 0)$ e infine $(x, y, 0) \to (x, y, z)$).

Esercizi di riepilogo

1. Calcolare le derivate parziali della funzione
$$f(x, y) = \exp(x\sqrt{x+y})$$
e individuare il vettore unitario $v_{\max}$ direzione di massima crescita della funzione nel punto $(2, -1)$.
2. Data la funzione $f(x, y) = x^3 + 6xy + 3y^2 - 9x$, individuare i punti critici e classificare quelli che hanno hessiano non degenere.
3. Data la funzione $f(x, y) = x^2 \log y - y^2 + \frac{x^2}{2}$, individuarne il dominio. naturale, i punti critici e classificarne la natura studiando la matrice hessiana.
4. Trovare i punti critici vincolati per il problema
$$\max\{2x + y \quad \text{con } 4x^2 + y^2 = 8\}$$
5. Data la funzione $f(x, y) = e^{x^2} - 2y^2 + 4y + xe^{y-1} - x$, e i punti $P_1 = (1, 0)$, $P_2 = (-1, 0)$, $P_3 = (0, 1)$ e $P_4 = (0, -1)$, dire quali tra i punti assegnati sono critici e classificarli.
6. Trovare e classificare i punti critici di
$$f(x, y) = e^{2x}(x + y^2 + 2y)$$
7. Dato l'insieme $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le 3 \quad \text{e} \quad 2|(x, y)| \le z\}$, calcolare
$$\int_D x^2 dxdydz$$
8. Dato $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 2 \quad \text{e} \quad 0 < y < 1 - (x-1)^2\}$, calcolare
$$\int_D xydxdy$$
9. Calcolare il baricentro dell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \quad \text{e} \quad x^2 < y < x\}$.
10. Data la forma differenziale $\omega = xydx - 2ydy$, stabilire se tale forma è esatta. Calcolare poi $\int_\gamma \omega$, dove γ è parametrizzata da $r(t) = (t, e^{2t})$ per $t \in [0, 2]$.
11. Data la forma differenziale $\omega = \log y \, dx + b\frac{x}{y}dy$, dire per quale $b \in \mathbb{R}$ la forma è esatta e calcolarne un potenziale.
12. Data la forma differenziale
$$\omega = e^{yz}dx + (1 + xze^{yz})dy + bxye^{yz}dz,$$
vedere per quali $b \in \mathbb{R}$ è esatta.

1.16. Elenco sintetico degli argomenti svolti

- Prodotto scalare, norma, intorni sferici. Insiemi aperti/chiusi.
- Definizione di limite di funzione. Funzioni continue.
- Derivate parziali. Esempio di funzione con derivate parziali ma discontinua.
- Definizione di differenziabilità (soprattutto per funzioni scalari). Formula di Taylor del primo ordine. Differenziale. Piano tangente al grafico di una funzione scalare. Legame tra differenziabilità e continuità.
- Derivate direzionali. Formula del gradiente per il calcolo delle derivate direzionali. Archi continui e differenziabili. Velocità di un arco differenziabile.
- Derivate di funzioni composte (in particolare di una funzione scalare lungo un arco differenziabile).
- Derivate seconde, teorema di Schwarz, matrice Hessiana di una funzione scalare. Formula di Taylor di ordine 2.
- Punti di massimo/minimo. Condizioni necessarie del primo ordine per punti di massimo/minimo. Forme quadratiche positive/negative/indefinite. Condizioni sufficenti per punti di massimo/minimo/sella per funzioni con matrice Hessiana non degenere.
- Definizione di varietà di dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$ e di dimensione 2 e 1 in $\mathbb{R}^3$. Spazio tangente/normale.
- Definizione di punto di massimo/minimo vincolato per un problema con vincolo. COndizione necessaria per massimi/minimi vincolati (nozione di punto critico vincolato).
- Definizione di dominio normale e formula di riduzione per il calcolo degli integrali doppi.
- Lunghezza di una curva. Integrale curvilineo di una funzione scalare lungo una curva. Campi vettoriali e forme differenziali associate. Integrale di una forma differenziale lungo una curva orientata (=lavoro del campo vettoriale associato).
- Forme differenziali esatte. La famiglia dei potenziali di una forma su un insieme connesso. Campi conservativi. Forme differenziali chiuse (=campi irrotazionali). Relazione tra forme esatte e chiuse.

Per l'esame occorre conoscere e saper esprimere correttamente le definizioni e gli esempi significativi discussi in classe.

Su richiesta di alcuni studenti, ecco una lista di dimostrazioni svolte in classe

- Formula del gradiente per il calcolo delle derivate direzionali
- Formula di Taylor di ordine 2 con resto di Lagrange
- Condizioni necessarie primo ordine per punti di minimo libero
- Formula per l'integrale di una forma differenziale esatta su un cammino orientato in termini del potenziale
- Chiusura delle forme esatte