

Analisi matematica. Materiale didattico

Laurea triennale Chimica e tecnologie per l'ambiente e per i materiali. Rimini

7 ottobre 2014

Avvertenza per gli studenti: il libro di testo di riferimento è M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, *Analisi matematica 1*. Zanichelli. Questo file contiene del materiale didattico che verrà in parte seguito durante il modulo. Alcune parti di programma non sono contenute in queste pagine.

Indice

1	Linguaggio, funzioni elementari	2
1.1	Il linguaggio degli insiemi	2
1.2	Numeri reali, valore assoluto, intorno	3
1.3	Valore assoluto, intervalli, intorno	4
1.4	Potenze	5
1.5	Funzioni elementari	6
1.6	Funzioni iniettive suriettive e biettive (biunivoche). Funzione inversa	9
1.7	Esercizi per casa	13
2	Limiti di successioni	14
2.1	Definizioni e primi esempi	14
2.2	Limiti di successioni e operazioni algebriche	16
2.3	Algebra dei numeri reali estesi	18
3	Limiti di funzioni	18
3.1	Punti di accumulazione e limiti di funzioni	18
3.2	Funzioni continue	20
3.3	Limiti da destra e da sinistra	20
3.4	Limiti notevoli	22
4	Derivate	22
4.1	Tecniche di derivazione	24
5	Massimi e minimi di funzioni	25
5.1	Teoremi di valor medio	26
5.2	Derivate e monotonia	27
5.3	Teorema di de l'Hôpital	28
5.4	Esercizi di riepilogo	29
5.5	Formula di Taylor	30
6	Integrali	32
6.1	Costruzione	32
6.2	Proprietà elementari dell'integrale	34
6.3	Primitive e funzioni integrali	35
6.4	Teorema fondamentale del calcolo	36
6.5	Tabella di alcune primitive elementari	37
7	Tecniche di calcolo degli integrali	37
7.1	Integrali di derivate di funzioni composte	38
7.2	Integrazione per parti	38
7.3	Cambi di variabile	39
7.4	Esercizi sul Teorema fondamentale del calcolo.	40
7.5	Integrali generalizzati	40

1. Linguaggio, funzioni elementari

1.1. Il linguaggio degli insiemi

Assumiamo come primitiva la nozione di insieme. Indichiamo gli insiemi con lettere maiuscole e i loro elementi con lettere minuscole. Introduciamo ora in maniera discorsiva un po' di terminologia. (i)

Dato un insieme A , per dire che a è un elemento di A scriviamo

$$a \in A \quad (\text{leggere: } a \text{ appartiene ad } A).$$

Si possono indicare gli insiemi anche elencandone gli elementi tra parentesi graffe. Se ad esempio $A = \{1, 2, 3\}$, allora

$$1 \in A,$$

mentre $5 \notin A$. (\notin si legge: "non appartiene"). L'insieme che non contiene nessun elemento si chiama *insieme vuoto* e si indica con \emptyset .

Sottoinsiemi e relazioni di inclusione. Dati due insiemi A e B , se vale per ogni a l'implicazione

$$a \in A \Rightarrow a \in B,$$

allora si dice che A è *sottoinsieme di* B e si scrive

$$A \subseteq B \quad (\text{leggere: } A \text{ è contenuto in } B)$$

In altre parole ogni elemento di A è anche elemento di B . Si può scrivere anche $B \supseteq A$ (leggere: " B contiene A "). Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, allora A e B sono uguali e si scrive $A = B$.

Abbiamo introdotto il simbolo \Rightarrow , che si legge "implica". Il simbolo \Leftrightarrow si legge "se e solo se".

Osserviamo che, dati A e B , non è detto che ci sia necessariamente una relazione di inclusione tra i due insiemi. Si veda il seguente esempio.

Esempio 1.1. Dati $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{2, 3, 4\}$ verificare se ci sono relazioni di inclusione tra i tre insiemi e quali sono.

Operazioni tra insiemi. Dati due insiemi A e B :

- L'insieme unione di A e B si indica con $A \cup B$ ed è costituito da tutti gli elementi che sono in A oppure in B .
- L'intersezione di A e B si scrive $A \cap B$ e indica gli elementi che sono in entrambi A e B .
- La differenza tra A e B si scrive $A \setminus B$ ed è l'insieme fatto da tutti gli elementi che sono in A ma non in B .

Esercizio. Dati $A = \{1, 5\}$ e $B = \{1, 5, 6\}$, $C = \{5, 6\}$ trovare unione, intersezione e differenza tra tutte le possibili coppie di insiemi.

Quantificatori. Introduciamo brevemente i seguenti simboli:

- \forall , che significa "per ogni";
- \exists , che significa "esiste".

Un altro modo per indicare un insieme è mettendo tra parentesi graffe le condizioni che lo definiscono. Ad esempio

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

indica l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ "tali che" $x > 1$. I due punti : e la barra verticale \mid sono simboli sinonimi e si leggono "tali che" oppure "tale che". Possiamo scrivere ad esempio:

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}.$$

1.2. Numeri reali, valore assoluto, intorni

Indichiamo con $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ gli insiemi dei numeri naturali, interi relativi, e razionali:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \dots\} \\ \mathbb{Z} &= \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \\ \mathbb{Q} &= \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}; \end{aligned}$$

i numeri naturali vengono identificati con gli interi relativi non negativi, e i numeri interi relativi vengono identificati con le frazioni a denominatore 1, così si ha

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

Concentriamo la nostra attenzione sull'insieme dei numeri razionali \mathbb{Q} . Ogni frazione può essere riguardata come una divisione fra interi, questa divisione si può effettuare applicando "all'infinito" l'algoritmo della divisione, e si ottiene un numero intero decimale. Ad esempio si ha $\frac{5}{6} = 0,8333\dots$; si è ottenuto un numero decimale periodico. Non è un caso: ogni frazione è rappresentata da un numero decimale periodico; viceversa, ogni numero decimale periodico rappresenta una frazione.

Un numero reale è un qualsiasi numero decimale, periodico o non periodico; l'insieme dei numeri reali viene indicato con \mathbb{R} .

L'insieme dei numeri razionali è strettamente contenuto nell'insieme dei numeri reali in quanto ci sono dei numeri decimali non periodici:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

I numeri reali non razionali vengono detti irrazionali; alcuni esempi di numeri irrazionali sono:

$$\sqrt{2} = 1.41\dots, \quad \pi = 3.14\dots, \quad e = 2.718\dots$$

Verifichiamo nella seguente proposizione che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Proposizione 1.2. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Questo significa che esistono $n, m \in \mathbb{N}$ tali che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. In altre parole, $2 = \frac{m^2}{n^2}$. Possiamo assumere che i due numeri n e m non siano entrambi pari. Altrimenti basterebbe semplificare le potenze di 2 a numeratore e denominatore. Risulta quindi $m^2 = 2n^2$ e pertanto m^2 è un numero pari. Ma allora anche m è pari (il quadrato di un numero dispari è sempre dispari). Quindi si scrive $m = 2p$ per qualche $p \in \mathbb{N}$. In definitiva abbiamo

$$2n^2 = m^2 = (2p)^2 = 4p^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = 2p^2.$$

Ma allora n^2 è pari e quindi anche n è pari. In definitiva abbiamo provato che entrambi i numeri n e m sono pari. Siamo quindi giunti a una contraddizione. \square

Diamo un'idea del fatto che $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. Costruiamo un numero decimale nel modo seguente: consideriamo la disequazione

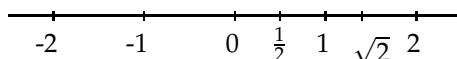
$$x^2 \leq 2;$$

cerchiamo il massimo fra le soluzioni intere, ed otteniamo 1; cerchiamo il massimo fra le soluzioni con un decimale, ed otteniamo 1.4; cerchiamo il massimo fra le soluzioni con due decimali, ed otteniamo 1.41; ... veniamo così a definire un numero con infinite cifre decimali.

Si prova che il quadrato di questo numero è 2. Così'

$$\sqrt{2} = 1,41\dots \in \mathbb{R}.$$

La retta reale. Scelti su una retta un primo ed un diverso secondo punto, l'identificazione del numero 0 col primo punto e del numero 1 col secondo punto si estende in modo naturale ad una identificazione prima dei numeri naturali, poi dei numeri interi relativi, poi dei numeri razionali, e infine dei numeri reali con i punti della retta: ogni numero reale è identificato con un punto della retta, ed ogni punto della retta si ottiene da uno ed un solo numero reale.



1.3. Valore assoluto, intervalli, intorno

Il valore assoluto di un numero reale a e' il numero reale $|a|$ definito da

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a \leq 0; \end{cases} .$$

Osserviamo le proprietà

$$|a| \geq 0 \quad \text{e} \quad |ab| = |a||b|,$$

valide per ogni $a, b \in \mathbb{R}$. È facile riconoscere che vale l'uguaglianza

$$\sqrt{a^2} = |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Infine, si può usare il valore assoluto per misurare la distanza tra due punti sulla retta reale. Precisamente vale

$$|a - b| = \text{distanza tra } a \text{ e } b$$

per ogni $a, b \in \mathbb{R}$.

Esercizio 1.3. Verificare che, dati $c \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, la disequazione $|x - c| < r$ vale se e solo se $c - r < x < c + r$.

Definizione 1.4 (intorno di centro $c \in \mathbb{R}$ e raggio $r > 0$). L'insieme

$$I(c, r) := \{x \in \mathbb{R} : |x - c| < r\}$$

si chiama intorno del punto c di raggio r .

L'insieme $I(c, r)$ è costituito dai punti $x \in \mathbb{R}$ la cui distanza dal centro c ammonta a meno di r . Se prendiamo r "piccolo", l'insieme $I(c, r)$ identifica i punti sulla retta "vicini" a c .

Esercizio 1.5. Verificare la disuguaglianza triangolare: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ risulta

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \tag{1.1}$$

[Suggerimento: elevare al quadrato entrambi i membri]

1.4. Potenze

Se a è un numero reale $a \neq 0$ allora esiste un unico numero $a^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ che soddisfa $aa^{-1} = 1$. Per ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$ e per ogni intero relativo $n \in \mathbb{Z}$, la potenza di base a ed esponente n è definita da

$$a^n = \begin{cases} aa \cdots a & (n \text{ volte}) & \text{per } n > 0; \\ 1 & & \text{per } n = 0, a \neq 0; \\ a^{-1}a^{-1} \cdots a^{-1} & (n \text{ volte}) & \text{per } n < 0, a \neq 0; \end{cases}$$

le potenze con esponente negativo sono definite solo per $a \neq 0$. La potenza 0^0 non è definita.

Le potenze ad esponente intero relativo hanno le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} a^m a^n &= a^{m+n}, \\ (a^m)^n &= a^{mn}, \\ (ab)^m &= a^m b^m, \end{aligned}$$

per ogni $a, b \neq 0$ e $m, n \in \mathbb{Z}$.

Le potenze ad esponente reciproco di un numero naturale si definiscono tramite le radici:

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{a}, & (a \geq 0) \\ a^{\frac{1}{3}} &= \sqrt[3]{a}, \\ a^{\frac{1}{4}} &= \sqrt[4]{a}, & (a \geq 0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Per ogni numero reale positivo a e per ogni numero razionale $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, la potenza di base a ed esponente $\frac{m}{n}$ è definita da

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m.$$

Ad esempio si ha $2^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{2^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

Le proprietà delle potenze ad esponente intero relativo continuano a valere per le potenze ad esponente razionale.

Per ogni numero reale positivo $a > 0$ e per ogni numero reale r , si può definire la potenza a^r di base a ed esponente r . La costruzione avviene per approssimazione. Ad esempio, la potenza 2^π si può ottenere considerando la successione $3, 3, 1, 3, 14, \dots$ di decimali che approssimano π , ed usando la corrispondente successione di potenze ad esponente razionale $2^3, 2^{3,1}, 2^{3,14}, \dots$ per definire per approssimazione 2^π .

Si dimostra che le proprietà delle potenze continuano a valere per le potenze ad esponente reale.

Notazione per gli intervalli Usiamo le seguenti notazioni

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\ [a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\]a, b[&= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \end{aligned}$$

e per gli intervalli illimitati

$$\begin{aligned} [a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\]a, +\infty[&= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \\]-\infty, b[&= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\]-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \end{aligned}$$

Nella notazione appena introdotta, l'intorno di raggio r del punto $c \in \mathbb{R}$ si scrive

$$I(x, r) =]c - r, c + r[.$$

1.5. Funzioni elementari

Definizione 1.6 (Prodotto cartesiano). Se A e B sono due insiemi, il prodotto cartesiano tra A e B si indica con $A \times B$ ed è definito come

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Introduciamo ora l'idea intuitiva di funzione. Siano dati A e B insiemi. Si chiama *funzione da A a B* una legge f che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B . L'insieme A è detto *dominio* della funzione. Prendiamo un elemento $a \in A$; l'elemento corrispondente ad a tramite la funzione f si denota con $f(a)$, si legge "f di a". Alternativamente, $f(a)$ si può chiamare *immagine di a attraverso f* .

Nell'introdurre una funzione f da A a B si usa la notazione sintetica

$$f : A \longrightarrow B,$$

L'insieme di tutti i valori assunti da f al variare di $a \in A$ si chiama *immagine di f* e si indica con $f(A)$. Quindi

$$f(A) := \{f(a) : a \in A\}.$$

Definizione 1.7 (Grafico di una funzione). Sia $f : A \rightarrow B$. Il grafico di una funzione è il seguente sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

$$\text{Graf}(f) = \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

Esempio 1.8 (Funzione identità). La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ che associa x stesso ad ogni $x \in \mathbb{R}$ si chiama *funzione identità*. Vedi Figura 1

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x.$$

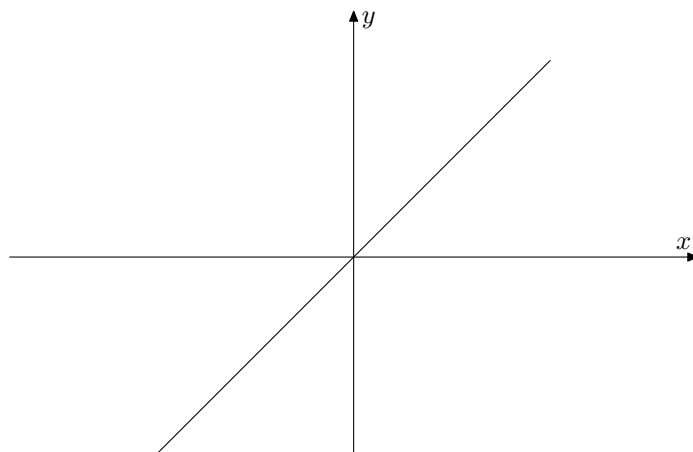


Figura 1: Grafico della funzione identità.

Esempio 1.9 (Funzione costante). Dato un numero $k \in \mathbb{R}$, poniamo

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = k.$$

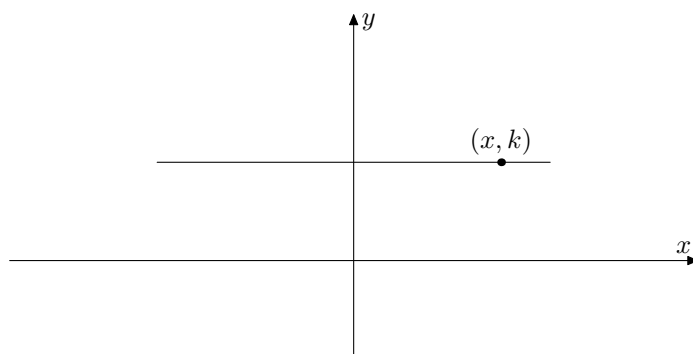


Figura 2: Grafico di una funzione costante $f(x) = k$.

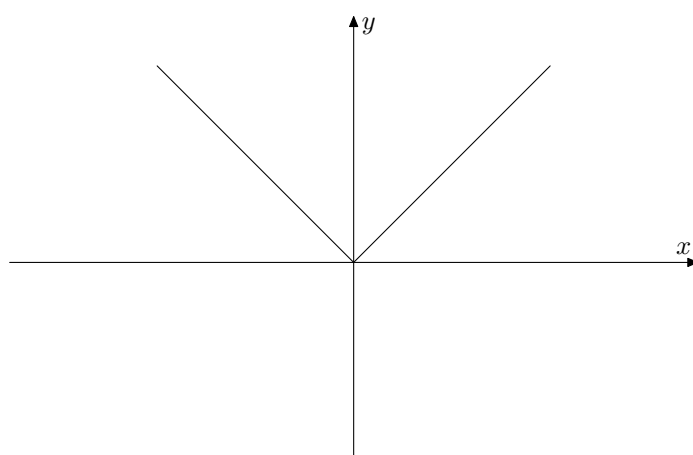


Figura 3: La funzione valore assoluto .

Esempio 1.10 (Funzione valore assoluto). È la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (ii)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Esercizio 1.11. *Discusso in classe. Tracciare, noto il grafico della funzione valore assoluto, quello delle funzioni*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &= |x| + 1, \\ h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & h(x) &= -|x| \\ k : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & k(x) &= |x - 2|. \end{aligned}$$

Esempio 1.12 (Funzioni affini). Sono funzioni del tipo

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = mx + q$$

dove m e q rappresentano delle costanti fissate. Il grafico di questa funzione è una retta. m e q hanno un significato particolare: m è detto coefficiente angolare o pendenza della retta; il punto $(0, q)$ è il punto in cui la retta taglia l'asse delle ordinate.

Esercizio. Data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si definisca $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + 1$. Che legame c'è tra i grafici di f e g ? Si definisca poi $h(x) = f(x + 1)$. Che legame c'è tra i grafici di f ed h ?

Esercizio. Data la funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, come sono legati il grafico di f e quello di $g : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -f(x)$?

Esempio 1.13. *Funzioni potenza a esponente naturale* Sono le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, dove $n \in \mathbb{N}$ è un assegnato numero naturale.

Le funzioni potenza con esponente pari hanno grafico simmetrico rispetto all'asse y e sono funzioni pari. Le funzioni potenza con esponente dispari hanno grafico simmetrico rispetto all'origine e sono funzioni *dispari*.¹

Esempio 1.14 (Funzione radice quadrata). È la funzione $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$. Vedere Figura 4.

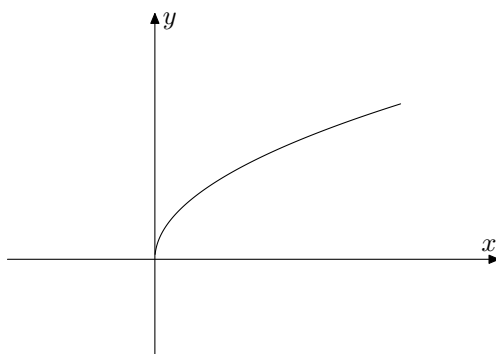


Figura 4: Funzione radice quadrata.

Esempio 1.15. *Grafici delle funzioni potenza negative* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^n}$, con $n \in \mathbb{N}$, distinguendo il caso n pari dal caso n dispari.

Esempio 1.16 (La funzione esponenziale). È la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, dove $e = 2.718\dots$ è il numero di Nepero. Il grafico è in Figura 5.

Osserviamo che $e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R}$. La funzione esponenziale ha le seguenti due proprietà salienti

$$\begin{aligned} e^{x_1+x_2} &= e^{x_1}e^{x_2}; \\ (e^{x_1})^{x_2} &= e^{x_1x_2}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Spesso si scrive anche $\exp(x)$ in luogo di e^x .

Si possono anche considerare funzioni esponenziali di base $b > 0$. Se $b > 1$ esse hanno un grafico qualitativamente simile a quello dell'esponenziale in base e . Se $b < 1$, allora il grafico di $f(x) = b^x$ si ottiene per riflessione rispetto all'asse y del grafico di $g(x) = (1/b)^x$. Le proprietà (1.2) sussistono anche per funzioni esponenziali di base qualsiasi.

Definizione 1.17 (Funzione monotóna). Una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

- *monotona crescente strettamente* su un insieme $C \subset A$ se

$$\forall x_1, x_2 \in C, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2);$$

- *monotona crescente (debolmente)* su un insieme $C \subset A$ se

$$\forall x_1, x_2 \in C, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2);$$

¹Per definizione, una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *pari* se vale $f(x) = f(-x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. f si dice invece *dispari* se $f(x) = -f(-x) \forall x \in \mathbb{R}$.

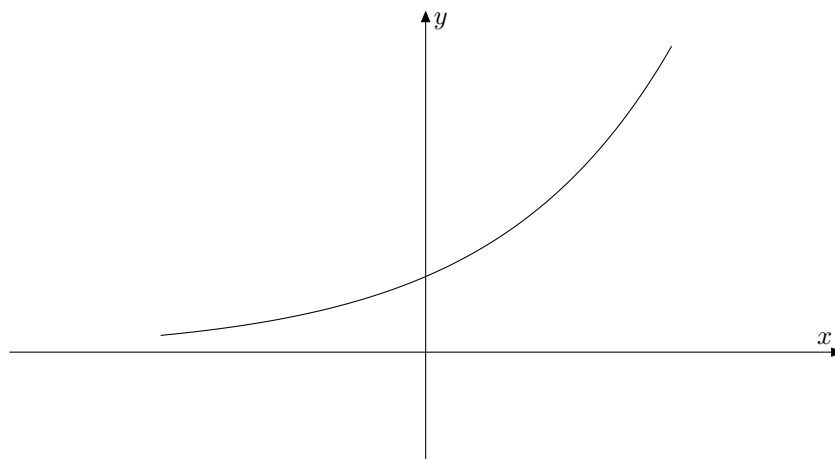


Figura 5: La funzione esponenziale.

- *monotona decrescente strettamente su un insieme $C \subset A$ se*

$$\forall x_1, x_2 \in C, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

- *monotona decrescente debolmente su un insieme $C \subset A$ se*

$$\forall x_1, x_2 \in C, \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Osserviamo che le funzioni costanti sono ad un tempo crescenti debolmente e decrescenti debolmente.

Esercizio 1.18. *Esercizi per casa. Da svolgere usando la definizione appena data.*

- Verificare che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ è crescente strettamente su $[0, +\infty[$, decrescente strettamente su $]-\infty, 0]$. Spiegare perché la funzione x^2 non è né crescente né decrescente su \mathbb{R} .
- Verificare che la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x+1}$ è crescente su $[0, +\infty[$.
- Verificare che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ è decrescente strettamente su $[0, +\infty[$ e crescente strettamente su $]-\infty, 0]$

Esercizio 1.19. *Data $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1/x$, verificare che f è decrescente su $]0, +\infty[$ e su $]-\infty, 0[$. Possiamo dire che è decrescente su tutto il suo dominio? (iii)*

Tra le funzioni crescenti importanti annoveriamo la funzione esponenziale di base e . $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è crescente strettamente. È facile verificare che \exp è crescente su $C = \mathbb{Z}$. La verifica per $C = \mathbb{R}$ richiede qualche ragionamento in più.

1.6. Funzioni iniettive suriettive e biiettive (biunivoche). Funzione inversa

Definizione 1.20 (funzione iniettiva, suriettiva e biunivoca). *Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione.*

- Si dice che f è iniettiva se per ogni $a, a' \in A$ con $a \neq a'$ vale $f(a) \neq f(a')$. Equivalentemente, se per due elementi $a, a' \in A$ vale $f(a) = f(a')$, allora deve essere $a = a'$.
- Si dice che f è suriettiva, se per ogni $b \in B$ esiste almeno un $a \in A$ tale che $f(a) = b$.
- Si dice che f è biiettiva o biunivoca se f è iniettiva e suriettiva.

Esercizio 1.21 (svolto in classe). *Date le funzioni*

$$\begin{aligned} f &: \{1, 2\} \rightarrow \{3, 4, 5\}, & f(1) &= 3, & f(2) &= 4 \\ g &: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5\}, & g(1) &= g(2) = 4, & g(3) &= 5 \\ h &: \{1, 2\} \rightarrow \{3, 4\}, & h(1) &= 3, & h(2) &= 4, \end{aligned}$$

dire per ciascuna di esse se è iniettiva suriettiva o biiettiva.

Esercizio 1.22 (svolto in classe). *Date le funzioni*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[, & f(x) &= x^2, \\ f &: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, & g(x) &= x^2, \\ h &: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, & h(x) &= x^2, \end{aligned}$$

discutere iniettività e suriettività di f, g, h .

Esercizio 1.23 (per casa). *Verificare che se due funzioni f e $g : A \rightarrow B$ sono crescenti strettamente su $C \subset A$, allora*

- (i) $f + g$ è crescente strettamente su C ;
- (ii) $-f$ è decrescente strettamente su C .

È vero che la funzione prodotto $h : A \rightarrow B, h(x) = f(x)g(x)$ è crescente su C ?

Osservazione 1.24. *Si verifica immediatamente che una funzione strettamente crescente o decrescente è iniettiva.*

Funzione inversa. Ora descriviamo la costruzione della funzione inversa. Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione biunivoca. Fissiamo un elemento $b \in B$. Poiché f è suriettiva, esiste un elemento $a \in A$ che soddisfa $f(a) = b$. Tale elemento è unico per l'iniettività della funzione f . La legge che ad ogni $b \in B$ fa corrispondere tale a si chiama *funzione inversa* e si indica con f^{-1} .

Definizione 1.25 (Funzione inversa). *Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione biunivoca. Allora l'unica funzione $f^{-1} : B \rightarrow A$ che soddisfa*

$$f(f^{-1}(b)) = b \quad \forall b \in B \tag{1.3}$$

si chiama funzione inversa di f .

Osservazione 1.26. *Osserviamo che se $f : A \rightarrow B$ è una funzione biunivoca e se indichiamo con $f^{-1} : B \rightarrow A$ l'inversa di f , allora vale anche*

$$f^{-1}(f(a)) = a \quad \forall a \in A. \tag{1.4}$$

Infatti, se anche per un solo $a \in A$ risultasse $f^{-1}(f(a)) \neq a$, poiché f è iniettiva, avremmo che $f(f^{-1}(f(a))) \neq f(a)$. Ma applicando (1.3) con $b = f(a)$ otterremmo $f(a) \neq f(a)$, che è assurdo.

Esempio 1.27. *Troviamo l'inversa della funzione $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[, f(x) = x^2$. Cerchiamo una funzione $f^{-1} : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ che soddisfi per ogni $b \geq 0$*

$$f(f^{-1}(b)) = b \quad \Rightarrow \quad (f^{-1}(b))^2 = b.$$

Passando alle radici, si vede che $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Notiamo infine che la funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2$ non ammette inversa (perché?).

L'esempio precedente e la figura ad esso corrispondente suggeriscono che i grafici di f e f^{-1} si ottengano l'uno dall'altro operando una riflessione rispetto all'asse formato dalla bisettrice del primo e terzo quadrante. Questo avviene in generale.

Osservazione 1.28 (Legame tra il grafico di f e quello di f^{-1}). Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione biunivoca e sia $f^{-1} : B \rightarrow A$ la sua inversa. Confrontiamo i grafici delle due funzioni.

$$\text{Graf}(f) = \{(a, f(a)) \in A \times B : a \in A\} \quad \text{Graf}(f^{-1}) = \{(b, f^{-1}(b)) \in B \times A : b \in B\}$$

Per confrontare i due grafici, osserviamo che per ogni $b \in B$ c'è un unico $a \in A$ tale che $f(a) = b$. Quindi possiamo riscrivere

$$\text{Graf}(f^{-1}) = \{(b, f^{-1}(b)) : b \in B\} = \{(f(a), f^{-1}(f(a))) : a \in A\} = \{(f(a), a) : a \in A\}$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato (1.4). Da quest'ultima scrittura comprendiamo che per ogni punto $(a, f(a)) \in \text{Graf}(f)$ c'è un punto corrispondente $(f(a), a) \in \text{Graf}(f^{-1})$. Tali punti sono simmetrici rispetto alla retta $y = x$.

La funzione logaritmo. Si dimostra che dato $b > 0, b \neq 1$ e preso un qualsiasi $a > 0$, l'equazione $b^x = a$ ammette un'unica soluzione x . Tale soluzione si chiama logaritmo in base b di a e si indica con $\log_b a$.

In altre parole, la funzione $\exp_b : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[\quad \exp_b(x) = b^x$ è iniettiva e suriettiva e la sua inversa si chiama logaritmo: $\log_b :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Se utilizziamo la base $b = e$, cioè $\exp(x) = e^x$, le proprietà (1.3) e (1.4) divengono:

$$e^{\log(x)} = x \quad \forall x > 0 \tag{1.5}$$

$$\log(e^x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{1.6}$$

Osserviamo che $\log x > 0$ se e solo se $x > 1$ e $\log x < 0$ se e solo se $0 < x < 1$. Inoltre, usando le

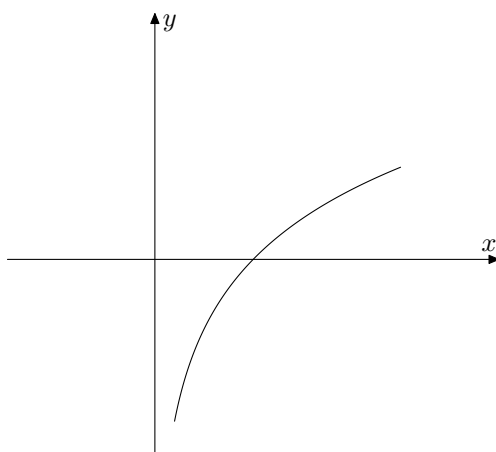


Figura 6: La funzione logaritmo.

proprietà dell'esponenziale descritte in (1.2), si possono provare le proprietà corrispondenti del logaritmo.

$$\begin{aligned} \log(x_1 x_2) &= \log(x_1) + \log(x_2), \quad \forall x_1, x_2 > 0 \\ \log x_1^\alpha &= \alpha \log x_1, \quad \forall x_1 > 0, \alpha \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

L'inversa di una funzione monotona è monotona. (iv)

Proposizione 1.29. Sia $f : A \rightarrow B$ invertibile e monotona crescente strettamente su A . Allora $f^{-1} : B \rightarrow A$ è crescente strettamente su B .

La dimostrazione è immediata, ma la omettiamo per mancanza di tempo. Osserviamo però che come conseguenza di questa proposizione, si può affermare che il logaritmo $\log = \exp^{-1}$ è una funzione strettamente crescente su $0 < x < \infty$.

Disequazioni con esponenziale e logaritmo. Usando le proprietà di esponenziale e logaritmo si deduce che

$$e^a < b \Leftrightarrow a < \log b, \quad \forall a \in \mathbb{R}, b > 0.$$

QUindi possiamo “applicare il logaritmo” o l’esponenziale a una disequazione per risolverla. Lo vediamo nei seguenti esercizi.

Esercizio 1.30 (in parte svolti in classe). *Utilizzando l’ultima formula risolvere le disequazioni seguenti*

$$\log(x) \leq -1 \quad \log(1 + |x|) < 5 \quad 2^{x+1} < 3^x \quad 2^{x^2} < 3^x$$

$$e^x < e, \quad e^{x^2} < 2, \quad e^{x+5} > 7$$

$$\log(1 + x^2) > 5, \quad 2^x < 3, \quad 2^x > 3^{x^2}$$

Funzioni circolari. I grafici di seno e coseno sono nelle figure 7 e 8. Osserviamo le proprietà:

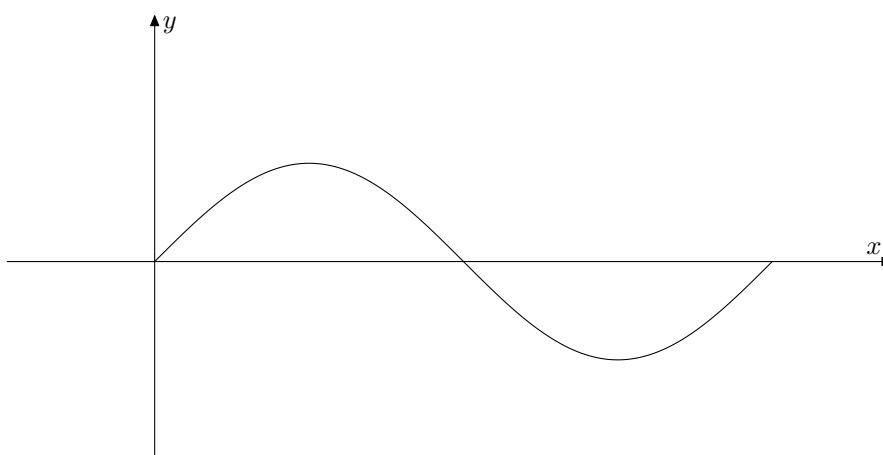


Figura 7: Grafico della funzione seno, su $[0, 2\pi]$.

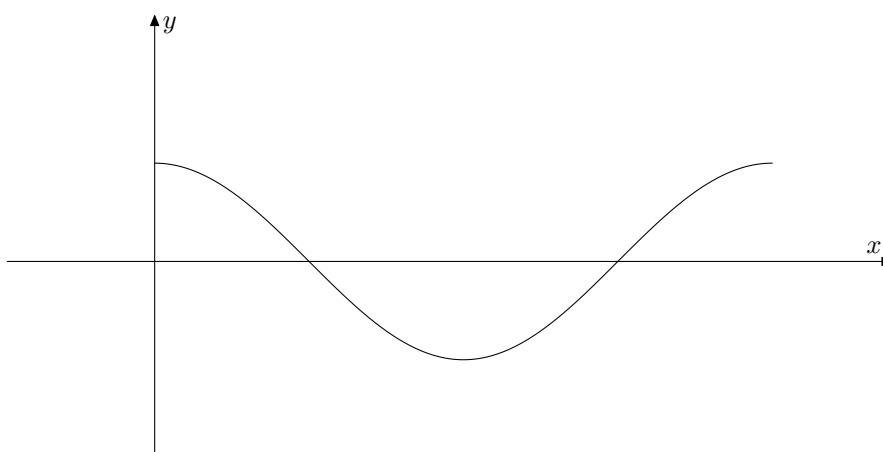


Figura 8: Grafico della funzione coseno, su $[0, 2\pi]$.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}.$$

Le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π . Precisamente vale

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x) \quad \text{e} \quad \cos(x + 2k\pi) = \cos(x) \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{Z}.$$

Inoltre, la funzione seno è dispari, mentre la funzione coseno è pari:

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \text{e} \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La funzione tangente è definita come segue: $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Nel dominio abbiamo tolto i punti x nei quali si annulla il denominatore $\cos(x)$. Osservando il cerchio unitario, visto che il l'angolo di $x + \pi$ radianti corrisponde al punto opposto a quello a cui corrisponde l'angolo x , possiamo affermare che $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ e $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi abbiamo $\tan(x + \pi) = \tan(x)$ per ogni x . La funzione tangente è periodica di periodo π .

$$\tan(x + k\pi) = \tan(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}.$$

Si verifica che essa è anche crescente su $]-\pi/2, \pi/2[$ e su ogni intervallo che si ottiene da esso traslando di un multiplo di π .

Funzioni composte.

Definizione 1.31 (Funzione composta). *Date due funzioni $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$, se $B \subset C$, possiamo definirne la funzione composta $g \circ f$ (che si legge "g composto f" o "g dopo f") come segue:*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Esercizio 1.32. *Date le funzioni $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(x)$, scrivere le funzioni $g \circ f$ e $f \circ g$.*

Siano poi $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\ell :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = x^3$ e $\ell(x) = \log(x)$. Che succede se tentiamo di scrivere la funzione $\ell \circ h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

Esercizio 1.33 (svolto in classe). *Date le funzioni $u(x) = \sin(x^2)$, $v(x) = \log(1 + x^2)$ e $w(x) = \sqrt{1 + \sin(2x)}$, scrivere le funzioni indicate come funzioni composte*

1.7. Esercizi per casa

1. Data $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(n) = \sum_{k=0}^n e^{-k^2}$, verificare, usando la definizione, che f è crescente su \mathbb{N} .
2. Sono date $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ funzioni strettamente crescenti. Verificare che $g \circ f$ è strettamente crescente.
3. Sono date le funzioni

$$u_1(x) = 2^{1+x} \quad u_2(x) = \tan(\log(x)) \quad u_3(x) = \cos(\log^2(x^2)),$$

dove abbiamo usato la notazione $\log^2(z) = (\log(z))^2$. Scrivere le funzioni indicate come composizioni di funzioni elementari.

4. Verificare con la definizione che la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x$ è crescente sull'intervallo $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

5. È data $g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{x}{x+1}.$$

Verificare con la definizione che g è iniettiva. Esiste qualche $x \in \mathbb{R}$ per cui $g(x) = 1$? Possiamo dire che g è suriettiva?

Consideriamo ora $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$. Verificare che f è suriettiva.

Rileggere e capire lo svolgimento dell'Esercizio 1.27. Indicando con f^{-1} l'inversa di f e partendo dall'identità $f(f^{-1}(b)) = b$ che definisce tale inversa, si sostituisca in tale identità la forma esplicita di f e si calcoli la funzione f^{-1} .

2. Limiti di successioni

(v)

2.1. Definizioni e primi esempi

Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una famiglia di numeri $a_n \in \mathbb{R}$ indicizzata da un parametro $n \in \mathbb{N}$. A volte scriveremo (a_n) invece di $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Esempio: la successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ esplicitamente definita da $a_n = n^2$. Elenchiamo alcuni sui termini:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2^2 = 4, \quad a_3 = 9, \dots,$$

Di fatto una successione non è nient'altro che una funzione definita sui naturali a valori in \mathbb{R} .

Definizione 2.1 (successione convergente). Sia $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di numeri reali. La successione si dice convergente se esiste $L \in \mathbb{R}$ con la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq n_\varepsilon.$$

In tal caso si scrive $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ e si dice che " (a_n) tende a L per n che tende all'infinito". Si scrive anche $a_n \rightarrow L$ oppure $\lim a_n = L$.

Definizione 2.2 (successione divergente). Una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si dice divergente a $+\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $n_M > 0$ tale che

$$a_n > M \quad \text{per ogni } n \geq n_M.$$

In tal caso si scrive $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.

Con ovvie modifiche si definisce una successione divergente a $-\infty$. Può infine avvenire che una successione non sia né convergente, né divergente.

Esercizio 2.3. Verificare usando la definizione che $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, per $n \rightarrow +\infty$.

Esempio 2.4. Verifichiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. Fissiamo un numero $\varepsilon > 0$. Cerchiamo di trovare $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_\varepsilon.$$

Riscriviamo $\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ nella forma equivalente $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, che vale se e solo se $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$, cioè

$$n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Ora, se $\varepsilon \geq 1$, tale disuguaglianza è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ (il membro di destra è ≤ 0). Se invece $\varepsilon < 1$, basterà scegliere come n_ε un qualsiasi numero naturale più grande di $1/\varepsilon - 1$.

Esempio 2.5. Verifichiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$. Sia $M > 0$. Cerchiamo $n_M \in \mathbb{N}$ tale che $e^n > M$ per ogni $n \geq n_M$. Possiamo riscrivere, passando ai logaritmi $e^n > M$ se e solo se $n > \log(M)$. A questo punto è sufficiente scegliere come n_M un naturale maggiore di $\log M$ e la definizione di limite è verificata.

Esercizio 2.6. Verificare i limiti $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - n^2 = -\infty$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$.

Esempio 2.7 (limiti di alcune funzioni elementari). Teniamo presente i seguenti limiti:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log(n) = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Il caso $\alpha = 0$ corrisponde alla successione costante $a_n = 1$, che tende a 1.

Esempio 2.8 (successione che non ha limite, o oscillante). La successione $a_n = (-1)^n$ non ha limite. Osserviamo che i valori di a_n sono alternativamente $-1, +1, -1, +1, \dots$

Come esercizio proviamo che non è vero che $\lim(-1)^n = 1$.² A tale scopo, è sufficiente vedere che la definizione di limite è violata con la scelta di $\varepsilon = 1$. Dobbiamo dunque far vedere che per ogni possibile scelta di $n_\varepsilon = n_1 \in \mathbb{N}$, si può trovare un naturale $n \geq n_1$ tale che

$$|(-1)^n - 1| > 1. \tag{2.1}$$

A questo punto basta osservare che per ogni n dispari risulta $(-1)^n = -1$. Pertanto (2.1) vale per ogni scelta di $n \geq n_1$, dispari. Questo prova che l'affermazione $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n = 1$ è falsa.

Proposizione 2.9 (unicità del limite). Se $a_n \rightarrow L$ e $a_n \rightarrow M$, allora $L = M$.

Dimostrazione. Assumiamo per assurdo che $a_n \rightarrow L$ e $a_n \rightarrow M$, supponendo per semplicità che $L < M$ e che $M \in \mathbb{R}$. Applicando la definizione di limite con $\varepsilon = \frac{M-L}{4}$, troviamo che esiste $n' \in \mathbb{N}$ tale che

$$L - \frac{M-L}{4} < a_n < L + \frac{M-L}{4} \quad \forall n \geq n'. \tag{*}$$

Inoltre esiste n'' tale che

$$M - \frac{M-L}{4} < a_n < M + \frac{M-L}{4} \quad \forall n \geq n''. \tag{**}$$

Unendo le disuguaglianze (*) e (**) troviamo che per ogni n più grande di entrambi n' e n'' vale

$$M - \frac{M-L}{4} < a_n < L + \frac{M-L}{4} \Rightarrow M - L \leq \frac{M-L}{2}$$

che è in contraddizione con il fatto che stiamo assumendo $M - L > 0$ strettamente. □

Teorema 2.10 (permanenza del segno). Se $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e se $a_n \rightarrow L$, allora $L \geq 0$.

Il teorema dice in sostanza che "le disuguaglianze si conservano al limite".

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che sia $a_n \rightarrow -\lambda$, con $\lambda > 0$ strettamente. Scegliamo ad esempio $\varepsilon = \lambda/2$ nella definizione di limite. Ciò assicura che esiste $n' \in \mathbb{N}$ tale che

$$-\lambda - \frac{\lambda}{2} \leq a_n \leq -\lambda + \frac{\lambda}{2}, \quad \forall n \geq n'.$$

La seconda disuguaglianza diventa dunque $a_n \leq -\frac{\lambda}{2}$, per ogni $n \geq n'$. Poiché $-\frac{\lambda}{2}$ è un numero strettamente negativo, abbiamo trovato un assurdo, visto che per ipotesi $a_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

²Con un ragionamento simile si può dimostrare che l'affermazione $\lim(-1)^n = L$ è falsa per ogni $L \in \mathbb{R}$.

Una variante del teorema appena dimostrato, afferma quanto segue. Se (x_n) e (y_n) sono delle successioni per le quali risulta $x_n \geq y_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e se $x_n \rightarrow L$ e $y_n \rightarrow M$ per $n \rightarrow +\infty$, allora $L \geq M$. [Applicare il teorema della permanenza del segno alla successione $a_n = x_n - y_n$]

Menzioniamo per completezza in queste note anche il "teorema dei due carabinieri" che si dimostra sempre in modo elementare usando la definizione di limite.

Teorema 2.11 (Teorema dei due carabinieri). *Siano date tre successioni (a_n) , (b_n) e (c_n) tali che*

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{per ogni } n \in \mathbb{N}.$$

Assumiamo che $a_n \rightarrow L$ e $c_n \rightarrow L$. Allora anche la successione centrale $b_n \rightarrow L$, per $n \rightarrow +\infty$.

Ad esempio, per il teorema dei due carabinieri, possiamo affermare che vale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n} = 0,$$

perché

$$\frac{1}{n} \leq \frac{2 + (-1)^n}{n} \leq \frac{3}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e le due successioni "esterne", $a_n = \frac{1}{n}$ e $c_n = \frac{3}{n}$, tendono entrambe allo stesso limite $L = 0$.

2.2. Limiti di successioni e operazioni algebriche

Teorema 2.12. *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni. Se $\lim_n a_n = a \in \mathbb{R}$ e $\lim_n b_n = b \in \mathbb{R}$, allora*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = a + b,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n b_n) = ab;$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \quad \text{a patto che sia } b_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N} \text{ e } b \neq 0.$$

Non riportiamo la dimostrazione di questo teorema, che, come quelle precedenti, è un utile esercizio sulla definizione di limite.

Il comportamento del limite di successioni convergenti e divergenti rispetto all'operazione di somma è dato dal seguente teorema (vi)

Teorema 2.13. *Sia: (a_n) una successione, convergente ad un numero L , o divergente a $+\infty$ o $-\infty$; (b_n) una successione, convergente ad un numero M , o divergente a $+\infty$ o $-\infty$. Allora il comportamento della successione somma $(a_n + b_n)$ è dato dalla seguente tabella*

$\lim a_n$	$\lim b_n$	$\lim (a_n + b_n)$
L	M	$L + M$
L	$+\infty$	$+\infty$
L	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	forma indeterminata

Ad esempio,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-2} + n^2 = 0 + \infty = +\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} - n^2 = 1 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n + e^n = +\infty + \infty = +\infty.$$

La forma indeterminata $\infty - \infty$ può produrre qualsiasi risultato, come provano i seguenti tre esempi.

$$\lim n - n^2 = -\infty, \quad (\text{verificato nella lezione precedente}).$$

D'altra parte $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - n = +\infty$. Per finire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - \left(\frac{n^3 + n + 1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 - \left(n^2 + 1 + \frac{1}{n} \right) = -1.$$

Il comportamento del limite di successioni convergenti e divergenti rispetto all'operazione di prodotto è dato dal seguente

Teorema 2.14. Se $(a_n) \rightarrow L \neq 0$ e $b_n \rightarrow \infty$ oppure $b_n \rightarrow -\infty$. Il comportamento della successione $(a_n b_n)$ è dato dalla seguente tabella:

$\lim a_n$	$\lim b_n$	$\lim (a_n b_n)$
L	∞	∞
∞	∞	∞

dove il segno di $\lim (a_n b_n)$ è il prodotto dei segni di $\lim a_n$ e $\lim b_n$.

Limiti del tipo $0 \cdot \infty$ danno luogo a forme indeterminate. Ad esempio, due casi di forma indeterminate $0 \cdot \infty$ sono

$$\lim \frac{1}{n} (1 + n^2) = \lim \frac{1}{n} + n = +\infty$$

mentre

$$\lim \frac{1}{n} (1 + \sqrt{n}) = \lim \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$$

Definizione 2.15 (Limite da destra). Siano (a_n) una successione, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Diciamo che $\{a_n\}$ tende a λ^+ per n che tende a $+\infty$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\lambda \leq a_n < \lambda + \varepsilon$, per ogni $n \geq n_\varepsilon$. Diciamo che (a_n) tende a λ^- per n che tende a $+\infty$ se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\lambda - \varepsilon < a_n \leq \lambda$, per ogni $n \geq n_\varepsilon$.

Ad esempio,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0^+ \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - n^2}{1 - n^3} = 0^-.$$

La successione $\frac{(-1)^n}{n}$ tende a zero, ma non lo fa né da destra né da sinistra.

Teorema 2.16. Sia $\lim a_n = L \neq 0$ e sia (b_n) una successione a termini non nulli $b_n \neq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e che soddisfi $b_n \rightarrow 0^+$, per $n \rightarrow +\infty$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{se } L > 0, \\ -\infty & \text{se } L < 0. \end{cases}$$

Se $b_n \rightarrow 0^-$, i segni vanno cambiati.

Per finire, se $a_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$ e se $b_n \rightarrow +\infty$ oppure $-\infty$, allora

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

I quozienti del tipo

$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

danno luogo a forme indeterminate.

Esercizio 2.17 (svolto in classe). Calcolare al variare di $b \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{bn^2 + 1 + \sqrt{n}}{1 + n}$$

Esercizio 2.18. Calcolare i limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(1 + n^{3/2}) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(n - n^3 + 1)$$

ricordando le proprietà: “ $e^{+\infty} = +\infty$ ” ed “ $e^{-\infty} = 0+$ ”.

Analogamente, calcolare

$$\lim \log(1 + n^{-1/2} + n^{1/2}),$$

ricordando che “ $\log(+\infty) = +\infty$ ”.

2.3. Algebra dei numeri reali estesi

Consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; su questo insieme definiamo le seguenti operazioni parziali,

$$\begin{aligned} a + \infty &= +\infty + a = +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ a - \infty &= -\infty + a = +\infty \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ +\infty + \infty &= +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty \\ +\infty - \infty &= \text{forma indeterminata} \end{aligned}$$

Si conviene di porre $-(-\infty) = +\infty$ e $-(+\infty) = -\infty$.

Per ciò che riguarda il prodotto, abbiamo, se $a \neq 0$

$$a \cdot (+\infty) = \pm\infty \quad \text{e} \quad a \cdot (-\infty) = \mp\infty$$

a seconda che sia $a > 0$ o $a < 0$. Il prodotto $0 \cdot (\pm\infty)$ è una forma indeterminata.

Passando alla divisione, abbiamo, se $a > 0$ è un numero reale positivo,

$$\frac{a}{+\infty} = 0+, \quad \frac{a}{-\infty} = 0-, \quad \frac{a}{0+} = +\infty \quad \text{e} \quad \frac{a}{0-} = -\infty.$$

Tutti i segni nell'ultima formula vanno cambiati se $a < 0$. Da ultimo, i due quozienti

$$\frac{0}{0} \quad \text{e} \quad \frac{\infty}{\infty}$$

danno luogo a forme indeterminate.

3. Limiti di funzioni

3.1. Punti di accumulazione e limiti di funzioni

Definizione 3.1 (Punto di accumulazione di un insieme). Sia $A \subset \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. SI (vii) dice che c è un punto di accumulazione per A se esiste (x_n) successione in $A \setminus \{c\}$ con $x_n \rightarrow c$.

Osserviamo esplicitamente che dire “ x_n successione in $A \setminus \{c\}$ ” significa affermare che $x_n \neq c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 3.2 (Esempi di punti di accumulazione).

- I punti di accumulazione dell'insieme $]0, 3[$ sono tutti i punti dell'intervallo chiuso $[0, 3]$. Ad esempio, per verificare che 0 è di accumulazione, basta osservare che la successione $(x_n) = (1/n)$ assume sempre valori in $]0, 3[$ e converge a 0. Un punto interno all'intervallo (ad esempio il punto 1) è di accumulazione perché $1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + 1/n$ e risulta $1 + 1/n \in]0, 3[$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Con ragionamenti analoghi si dimostra che i punti di accumulazione sono tutti i punti di $[0, 3]$.
- L'insieme $\{1, 2, 3\}$ non ha punti di accumulazione. Ad esempio il punto 1 non è di accumulazione perché una qualsiasi successione in

$$\{1, 2, 3\} \setminus \{1\} = \{2, 3\}$$

non può convergere ad 1. Per i punti 2 e 3 si ragiona allo stesso modo.

- \mathbb{N} ha il solo punto di accumulazione $+\infty$. Infatti nessun punto $p \in \mathbb{N}$ è di accumulazione (stesso ragionamento dell'esempio precedente). D'altra parte $+\infty$ è di accumulazione perché $+\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} n$.

Definizione 3.3. Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e sia $c \in \mathbb{R}^*$ un punto di accumulazione di A . Sia $L \in \mathbb{R}^*$ un numero reale esteso. Si dice che il limite di $f(x)$ per x che tende a c è L se per ogni successione (x_n) in $A \setminus \{c\}$ vale $\lim f(x_n) = L$. In tal caso si scrive

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L.$$

In altri termini, $f(x)$ tende a L per x che tende a c se

$$\forall (x_n) \subseteq A \setminus \{c\}, \quad \lim x_n = c \quad \Rightarrow \quad \lim f(x_n) = L.$$

Esempio 3.4. Verifichiamo che $\lim_{x \rightarrow c} x^2 = c^2$ per ogni fissato $c \in \mathbb{R}$. A tale scopo, consideriamo una successione (x_n) in $\mathbb{R} \setminus \{c\}$ che converga a c . Dobbiamo verificare che $f(x_n) \rightarrow f(c)$, cioè

$$x_n^2 \rightarrow c^2 \quad \Leftrightarrow \quad x_n^2 - c^2 \rightarrow 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x_n - c)(x_n + c) \rightarrow 0.$$

Ma quest'ultimo limite è verificato perché $x_n - c \rightarrow 0$ e $x_n + c \rightarrow 2c$, per $c \rightarrow +\infty$.

Esempio 3.5. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 1, \\ 2 & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

Calcoliamo $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Consideriamo (x_n) successione che tende a 1, ma con $x_n \neq 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora sarà $f(x_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi possiamo affermare che $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

Osserviamo esplicitamente che in questo esempio risulta

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1).$$

Esempio 3.6 (funzione gradino). Poniamo $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{per } x < 0, \\ 1 & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

Ci domandiamo quanto vale $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Proviamo ad approssimare 0 con la successione $x_n = \frac{1}{n}$ (osserviamo che $1/n \neq 0$ per ogni n) e otteniamo $f(x_n) = f(1/n) = 1$.

Proviamo ora ad approssimare 0 con la successione $y_n = -\frac{1}{n}$, che assume valori negativi per ogni n . Allora risulta $f(-1/n) = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. La conclusione è che il limite $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ non esiste (cioè non c'è nessun numero $L \in \mathbb{R}^*$ per il quale risulti vera l'affermazione $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$).

Esempio 3.7. Vale $\lim_{n \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$.

Alcuni limiti di funzioni elementari:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0, \\ 0 & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

e se $\log :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ è il logaritmo naturale, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log(x) = -\infty.$$

Osserviamo esplicitamente che per verificare quest'ultimo limite, la successione $x_n \rightarrow 0$ deve assumere valori nel dominio $]0, +\infty[$.

I teoremi sui limiti (unicità, permanenza del segno, comportamento rispetto a somme prodotti quozienti) si trasportano naturalmente dal contesto delle successioni a quello delle funzioni.

3.2. Funzioni continue

Il calcolo dei limiti può essere effettuato, come vedremo, con facilità per le funzioni continue.

Definizione 3.8 (Funzione continua). *Data $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $c \in A$ e punto di accumulazione di A , diciamo che f è continua in c se*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

Se diciamo che una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua su $A \subset \mathbb{R}$, senza ulteriori specificazioni, intendiamo che essa è continua in tutti i punti $c \in A$ di accumulazione per A .

Le funzioni degli esempi 3.5 e 3.6 sono delle funzioni non continue nei punti 1 e 0 rispettivamente.

Enunciamo in modo informale il principio secondo cui tutte le funzioni "elementari" sono continue nei loro domini naturali. Inoltre tutte le funzioni che si ottengono come somme, prodotti, quozienti (a denominatore non nullo) e composizioni di funzioni elementari sono continue nei domini in cui sono definite.

Ad esempio, possiamo affermare "a vista" che

$$\lim_{x \rightarrow 5} e^x(1+x^2) = 26e^5, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \exp(1+\sqrt{x}) = e^2 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\log(1+x^2)}{1+\sin(\pi x)} = \log(10)$$

Menzioniamo anche la seguente formulazione equivalente della definizione di limite, che, così come la scriviamo, vale per c ed L reali.

Proposizione 3.9 (Definizione ε - δ di limite). *Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, se $c \in \mathbb{R}$ è di accumulazione per A e se $L \in \mathbb{R}$, allora $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in A \setminus \{c\}$ che soddisfa $|x - c| < \delta$.*

3.3. Limiti da destra e da sinistra

Osservando la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

notiamo che calcolando $f(x)$ per x vicino a zero, ma positivo, otteniamo un risultato molto grande. Calcolando invece $f(x)$ per valori di x vicini a zero, ma negativi, otteniamo un risultato negativo e molto grande in valore assoluto.

Scriviamo allora che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \text{mentre} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$$

I limiti sopra scritti si chiamano *limite destro, o da destra* e *limite sinistro, o da sinistra*. Un fenomeno analogo avviene nel caso della funzione gradino dell'Esempio 3.6. In quel caso risulta

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

La definizione di limite destro e sinistro può essere formalizzata utilizzando la nozione di punto di accumulazione destro/sinistro e modificando opportunamente la definizione di limite. In questa sede non presenteremo tutto il linguaggio e ci accontenteremo di una discussione un po' informale.

Esempio 3.10. Consideriamo la funzione $\sin(x)$. Il grafico suggerisce (e si potrebbe dimostrare) che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0.$$

Ma più precisamente possiamo affermare che vale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) = 0^+ \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \sin(x) = 0^-.$$

Osserviamo anche che $\sin(x) \neq 0$ per $x \neq 0$ e vicino a 0. In conseguenza di tutte le osservazioni fatte, possiamo affermare che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sin(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty.$$

(viii)

Esempio 3.11.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^3} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\log x}{x-2} &= \frac{\log 2}{0^-} = -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2(1-x^2)} = \frac{1}{1 \cdot 0^+} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x} &= \frac{1}{0^+} = +\infty, \text{ perché } 1 - \cos x \rightarrow 0^+, \text{ per } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Esercizio 3.12. Calcolare quando possibile (altrimenti fare i dovuti commenti) i limiti:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^3} & \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\log(x^{-1})}{x-2} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x \\ &\lim_{x \rightarrow 0^\pm} e^{1/x} & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} & \lim_{x \rightarrow 0} \log(\sin^2(x)) \\ &\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\frac{1}{2} + x)}{1 - \cos x} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x & \lim_{x \rightarrow 0^-} \log(x) & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{bx^2 + x^3} \quad \text{per ogni } b \in \mathbb{R} \\ &\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x - 1} & \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{e^x - e^{-1}} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2}}{\sin(x)} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x) \\ &\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{e^{x^2} - 1} & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log(2+x)}{(x-1)\sin(x-1)} & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} \\ &\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + \sin(x) & \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 2e^{-x} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x^2 + \sin(x)) \end{aligned}$$

Esempio 3.13. Basandosi sui limiti della funzione $e^{1/x}$ calcolati nell'esercizio precedente, tracciare un grafico approssimativo di tale funzione.

3.4. Limiti notevoli

Nella classe delle forme indeterminate $0/0$, descriviamo il comportamento di alcuni modelli standard, chiamati "limiti notevoli".

Teorema 3.14. *Vale*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad e \quad (3.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (3.2)$$

La dimostrazione di questo teorema richiede la conoscenza di un po' di trigonometria e di qualche proprietà del numero di Nepero e . Non la presentiamo in questa sede.

Dal teorema precedente, si ricava che, se $f(x) \rightarrow 0$, per $x \rightarrow c$ e $f(x) \neq 0$, per x vicino a c , allora

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\sin(f(x))}{f(x)} = 1 \quad e \quad \lim_{x \rightarrow c} \frac{\exp(f(x)) - 1}{f(x)} = 1.$$

Ad esempio,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1.$$

Ancora:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \log 2} - 1}{x \log 2} \log 2 = \log 2.$$

Un altro limite notevole è il seguente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1. \quad (3.3)$$

Usando (3.3), si può dedurre che, se $f(x) \rightarrow c$ per $x \rightarrow c$ e se $f(x) \neq 0$ per gli $x \in \{\text{dominio di } f\} \setminus \{c\}$, allora

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{\log(1+f(x))}{f(x)} = 1. \quad (3.4)$$

Esercizio 3.15. *Calcolare quando possibile i seguenti limiti:*

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(x-3)}{x-3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(1/x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^2+x^3} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x \cos x} \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\log(x+3)}{(x+2)^2 \cos(x+2)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log(2-x)}{(x-1) \sin(x-1)} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1} \quad \text{per ogni } a, b \in]0, +\infty[\setminus \{1\} \\ & \lim_{x \rightarrow 0} (1+bx)^{1/x} \quad \text{per ogni } b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. Derivate

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, sia $x_0 \in A =]a, b[$ (intervallo aperto, limitato o illimitato). Sia infine $h \in \mathbb{R}$ tale che $x_0 + h \in A$. I due punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ appartengono al grafico di f . La retta che li contiene ha equazione

$$y = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} (x - x_0) + f(x_0).$$

Il numero $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ si chiama *rapporto incrementale* (di punto iniziale x_0 e incremento h). Esso è il coefficiente angolare della retta sopra scritta.

A partire dal rapporto incrementale si definisce la derivata lasciando tendere h a zero. Lavoreremo con funzioni definite su intervalli aperti, definendo la derivata in punti interni a tali intervalli.

Definizione 4.1. Sia data $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$. f si dice derivabile in x_0 se esiste finito il limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Tale limite si chiama derivata di f in x_0 e si indica con $f'(x_0)$, $Df(x_0)$, $\frac{d}{dx}f(x_0)$. In sintesi

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Esempio 4.2. Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = k$, k costante, si ha per $x_0 \in \mathbb{R}$

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k-k}{h} = 0.$$

Esempio 4.3. Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx + q$, m, q costanti, si ha per $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h)+q-(mx+h)}{h} = m.$$

Terminologia: se una funzione $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in ogni $x \in]a, b[$, allora la nuova funzione $x \mapsto f'(x)$ si chiama *derivata* di f .

Esempio 4.4. Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2hx + h^2}{h} = 2x.$$

Esempio 4.5. Calcoliamo $\frac{d}{dx}\sqrt{x}$, per $x > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\sqrt{x} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{x[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]} = \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Esempio 4.6. Calcoliamo $\frac{d}{dx}e^x$.

$$\frac{d}{dx}e^x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} e^x = e^x,$$

grazie al limite notevole (3.2) (p. 22) della funzione esponenziale.

Definizione 4.7 (retta tangente). Data f derivabile in x_0 , la retta di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

si chiama *retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$* .

Notiamo che, tra tutte le rette passanti per $(x_0, f(x_0))$, che sono quelle di equazione

$$y = f(x_0) + m(x - x_0),$$

al variare di $m \in \mathbb{R}$, la retta tangente è esattamente quella il cui coefficiente angolare è la derivata nel punto x_0 .

Teorema 4.8. Se $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile in $x_0 \in]a, b[$, allora f è continua in x_0 .

Dimostrazione. Basta osservare che, per x vicino a x_0 , $x \neq x_0$, risulta

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

per $x \rightarrow x_0$. □

4.1. Tecniche di derivazione

Osservazione 4.9. Se f e $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sono derivabili in x , allora la loro somma è derivabile e vale

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Inoltre $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.10 (Derivate prodotto e quoziente). Se f e $g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sono derivabili in $x \in]a, b[$, allora il loro prodotto è derivabile in x e vale

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g(x)f'(x)$$

Inoltre, se $g(x) \neq 0$, allora

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f'(x)g(x) - g(x)f'(x)}{g(x)^2}$$

Dimostrazione. La prima delle due formule si prova partendo dalla definizione di derivata.

$$\begin{aligned} (fg)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ [f(x+h) - f(x)]g(x+h) + f(x)[g(x+h) - g(x)] \} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x). \end{aligned}$$

Abbiamo usato qui il fatto che, poiché g è derivabile in x , allora g è continua in x .

La seconda affermazione si prova analogamente. □

Ad esempio,

$$D(x \sin(x)) = Dx \sin x + xD \sin(x) = \sin x + x \cos(x)$$

oppure

$$D \tan(x) = D \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{D \sin x \cos(x) - \sin x D \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \begin{cases} \frac{1}{\cos^2(x)} \\ 1 + \tan^2(x). \end{cases} \quad \text{o anche}$$

Esercizio 4.11. calcolare con il teorema precedente le derivate delle funzioni

$$f(x) = \frac{x^2}{\sin x}, \quad f(x) = x \cos x, \quad f(x) = \sqrt{x}e^x, \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{\log x}, \quad f(x) = \tan(x).$$

Teorema 4.12 (Derivata di funzioni composte). Sia $f : A \rightarrow B$ e $g : C \rightarrow D$ con $B \subset C$ e A, B, C, D intervalli aperti. Se f è derivabile in qualche $x \in A$ e g è derivabile in $f(x)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x e vale

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Omettiamo la dimostrazione di questo teorema.

Esercizio 4.13. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$\frac{d}{dx} \cos(2x), \quad \frac{d}{dx} e^{x^2}, \quad \frac{d}{dx} \log(1 + 3x^2),$$

$$f(x) = a^{x \cos x}, \quad (a > 0), \quad f(x) = \sin(1 + 2 \cos x),$$

$$f(x) = (x + e^{2x} + x \sin x)^2, \quad f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + 2x^{3/2}}, \quad f(x) = \exp(\sin(x^2)),$$

$$f(x) = x^2 e^{-2x} \sin x.$$

Esercizio 4.14. Calcolare le seguenti derivate:

$$f(x) = x^2 \sin x + 2 \cos x \quad f(x) = x^2 (\sin x + 2 \cos x) \quad f(x) = (2x^3 - x)(2x^3 + x)$$

$$f(x) = (-x^2 + x - 1) e^x \quad f(x) = 4x \sqrt{x} - 5x \sqrt[3]{x} \quad f(x) = x \log x - x$$

$$f(x) = \frac{2x - 1}{2x^3} \quad f(x) = \frac{1}{3 \log x} \quad f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{4}$$

$$f(x) = \frac{x + a^x}{x - a^x}, \quad a > 0 \quad f(x) = \frac{x \log x}{\sqrt{x}} \quad f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$f(x) = 4 \sin(2x) - 3 \cos(3x + 1) \quad f(x) = \log(x^2 - 5x + 4) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$$

$$f(x) = e^{x^2 - 5x + 4} \quad f(x) = \sin^3 x + \sin(x^3) \quad f(x) = \tan(1 + x + 3x^2)$$

$$f(x) = x^4 (2x^2 - 5)^3 \quad f(x) = (\log x)^2 + 3 \log x + 2 \quad f(x) = x 2^{-x^2}$$

$$f(x) = \log \log x \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 + 3}{2x - 1}}$$

$$f(x) = \sqrt{\log(x^2 + 1)} \quad f(x) = \left(\frac{a}{a - x}\right)^2, \quad a > 0 \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0$$

$$f(x) = x^{r-1} e^{-x}, \quad r > 0 \quad f(x) = x^{a-1} (1 - x)^{b-1}, \quad a, b > 0 \quad f(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)},$$

5. Massimi e minimi di funzioni

Definizione 5.1. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ed $x_0 \in A$. Il punto x_0 si dice

- di massimo (oppure di minimo) locale se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{oppure } f(x) \geq f(x_0)) \quad \forall x \in A, |x - x_0| < \delta.$$

- di massimo (oppure di minimo) assoluto se

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{oppure } f(x) \geq f(x_0)) \quad \forall x \in A.$$

Il valore $f(x_0)$ assunto da f in un punto di massimo o di minimo si chiama massimo o minimo.

I massimi e minimi di funzioni derivabili possono essere studiati con l'aiuto dei seguenti teoremi.

5.1. Teoremi di valor medio

Teorema 5.2 (di Fermat). *Sia $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in]a, b[$ un punto di massimo o di minimo locale o assoluto per f . Se f è derivabile in x_0 , allora $f'(x_0) = 0$.*

Dimostrazione. Basta considerare il rapporto incrementale di punto iniziale x_0

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = R(x).$$

Supponiamo x_0 punto di massimo. Per x vicino a x_0 , con $x > x_0$, risulta $R(x) \leq 0$, perchè $f(x) - f(x_0) \leq 0$ (punto di massimo) e $x - x_0 > 0$. Quindi, poiché le disuguaglianze si conservano al limite (Teorema della permanenza del segno),

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} R(x) \leq 0.$$

Viceversa, se x è vicino a x_0 , ma $x < x_0$, vale $R(x) \geq 0$, perchè $f(x) - f(x_0) \leq 0$ (punto di massimo) e $x - x_0 > 0$. Quindi si deduce $f'(x_0) \geq 0$.

Mettendo assieme i due casi si conclude $f'(x_0) = 0$. □

Esempio 5.3. *La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, ha un punto di minimo assoluto in $x = 0$.*

La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ ha in $x_0 = 0$ un punto di massimo assoluto.

Teorema 5.4 (di Rolle). *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in $[a, b]$, derivabile in $]a, b[$ e soddisfa $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ in cui vale*

$$f'(c) = 0.$$

Dimostrazione. Se f è costante, allora si può scegliere un qualsiasi $c \in]a, b[$ e il teorema è provato.

Se f non è costante, allora esiste un punto $c \in]a, b[$ che è di massimo o di minimo.³ In tale punto, per il Teorema di Fermat, varrà $f'(c) = 0$. □

Una generalizzazione del Teorema di Rolle è il seguente

Teorema 5.5 (di Lagrange). *Se f è continua in $[a, b]$ e derivabile in $]a, b[$, allora esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ che soddisfa*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Il significato geometrico di questo teorema è il seguente: esiste almeno un $c \in]a, b[$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(c, f(c))$ è parallela alla retta passante per i punti $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Dimostrazione. Consideriamo l'equazione della retta passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$,

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La funzione $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) - \left\{ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right\},$$

³Qui è coinvolto un teorema importante sulle funzioni continue: se f è continua su $[a, b]$, allora, f ammette massimo e minimo su $[a, b]$. Questo significa precisamente che esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle (infatti si verifica subito che $g(a) = g(b) = 0$). Quindi, il Teorema di Rolle asserisce che esiste almeno un $c \in]a, b[$ che soddisfa $g'(c) = 0$. Dunque, poiché

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

$x \in]a, b[$, sarà $g'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

Un corollario del precedente Teorema è la seguente caratterizzazione delle funzioni costanti.

Corollario 5.6 (caratterizzazione delle funzioni costanti). *f è costante su $]a, b[$ se e solo se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in]a, b[$.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia costante su $]a, b[$. Allora $f'(x) = 0$, per definizione di derivata.

Viceversa, supponiamo che f soddisfi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in]a, b[$. Fissiamo un qualsiasi punto $x_0 \in]a, b[$. Applicando il Teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_0, x]$, otteniamo, per un opportuno $c \in]x_0, x[$ ⁴

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0). \tag{5.1}$$

Ma per ipotesi la derivata è nulla dappertutto. Quindi $f(x) = f(x_0)$. □

5.2. Derivate e monotonia

Un'altra applicazione del Teorema di Lagrange è la seguente:

Teorema 5.7 (Caratterizzazione delle funzioni monotone debolmente). *Una funzione f derivabile in $]a, b[$ è monotona crescente debolmente su $]a, b[$ se e solo se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in]a, b[$*

Dimostrazione. Se f è crescente in $]a, b[$, allora consideriamo $x < x + h$, dove $x, x + h$ sono punti in $]a, b[$. Allora per definizione di funzione monotona vale $f(x + h) > f(x)$. Prendendo il quoziente,

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

Viceversa, se $f'(x) \geq 0$, applicando il Teorema di Lagrange (formula (5.1)) nell'intervallo $[x_0, x]$, con $a < x_0 < x < b$ otteniamo, per un opportuno $c \in]x_0, x[$

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0) \geq 0,$$

perché per ipotesi $f'(c) \geq 0$. Quindi $f(x) \geq f(x_0)$. Questo ragionamento vale per ogni coppia $x_0 < x$ di punti nell'intervallo $]a, b[$. Quindi f è debolmente crescente. □

Osservazione 5.8. *Ragionando allo stesso modo (con il Teorema di Lagrange), si può riconoscere che una parte del teorema sopra vale per le funzioni strettamente crescenti. Più precisamente, se f soddisfa $f'(x) > 0$ ⁵ per ogni $x \in]a, b[$, allora f è strettamente crescente su $]a, b[$.*

Esercizio 5.9. *Dire, calcolando la derivata e studiandone il segno, in quali intervalli sono crescenti le funzioni*

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = xe^x, \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad f(x) = e^{-x^2}, \quad f(x) = x^3 - x.$$

⁴O in $]x, x_0[$, se $x < x_0$.

⁵disuguaglianza stretta.

Esercizio 5.10. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni, dire in quali intervalli ciascuna di esse è crescente o decrescente e individuarne i punti di massimo o di minimo locale.

$$f(x) = \sqrt{1+x^4}, \quad f(x) = e^x - x, \quad f(x) = x^3 - x, \quad f(x) = x^2 e^x$$

$$f(x) = e^{2x} + e^{-x}, \quad f(x) = x \log x, \quad (\text{per } x > 0,)$$

$$f(x) = x e^{-x^2}, \quad f(x) = \frac{1+2x}{2+3x}, \quad f(x) = (x-3)\sqrt{x}.$$

5.3. Teorema di de l'Hôpital

Un'ultima applicazione del Teorema di Lagrange è la regola di de l'Hôpital. Diamo qui un enunciato in un caso particolare.

Teorema 5.11 (di de l'Hôpital per limiti di tipo $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$). Siano f e g due funzioni derivabili su $]a, b[$. Sia $c \in]a, b[$ tale che $f(c) = g(c) = 0$. Assumiamo che sia $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[, x \neq c$. Allora, se il limite

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

esiste e vale L , sarà anche

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Esempi. Verificare usando Hôpital, che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = 2.$$

Dimostrazione del Teorema 5.11. Consideriamo un punto $x > c, x \in]a, b[$. Consideriamo la funzione

$$h(t) = f(x)g(t) - f(t)g(x), \quad t \in]a, b[.$$

LA funzione h soddisfa le ipotesi del Teorema di Rolle nell'intervallo $[c, x]$. Infatti, $h(c) = f(x)g(c) - f(c)g(x) = 0$, perché f e g sono nulle in c , mentre $h(x) = f(x)g(x) - f(x)g(x) = 0$. Quindi Il Teorema di Rolle asserisce che esiste un punto $s \in]c, x[$ in cui $h'(s) = 0$. Allora

$$f(x)g'(s) - f'(s)g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(s)}{g'(s)}$$

6

Lasciando tendere $x \rightarrow c$, sarà anche $s \rightarrow c$, perché s è compreso tra c ed x . Quindi, poiché sappiamo che $\frac{f'(s)}{g'(s)} \rightarrow L$, per $s \rightarrow c$, avremo

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = L,$$

come si voleva. □

⁶Osserviamo che il Teorema di Lagrange applicato alla funzione g nell'intervallo $[c, x]$, afferma che, per un opportuno $c_1 \in]c, x[$, vale $g(x) = g(x) - g(c) = g'(c_1)(x - c) \neq 0$, se $x \in]a, b[$ è diverso da c . QUindi nel passaggio precedente è corretto dividere per $g(x)$.

Delle versioni simili del Teor. di de L'Hopital valgono per limiti di tipo

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)},$$

dove $f(x)$ e $g(x)$ tendono all'infinito e anche con $c = +\infty$ e $-\infty$. Ad esempio, il limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$ è una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Applicando Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty.$$

5.4. Esercizi di riepilogo

Esercizio 5.12. Applicando un numero sufficiente di volte il Teorema di de l'Hôpital, dire quanto vale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^{1000}}.$$

Esercizio 5.13. Calcolare i seguenti limiti.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2 + e^{2x}}.$$

Esercizio 5.14. Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{x^2} - 1)}{x \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{1 + x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^2)}{e^x - 1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ax^2}, \quad \text{per ogni possibile } a \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 2 \cos x) e^{1/x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - x^2}.$$

Esercizio 5.15. Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} e^{1/x}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x^2-4x} - e^{-4}}{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1/x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(e^x - e + 1)}{\sin(x - 1)}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1 + e^x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1 - 3x^4}{e^x - e}.$$

Esercizio 5.16. Dire in quali intervalli sono crescenti (o decrescenti) le funzioni

$$f(x) = x + \sin x, \quad f(x) = e^{1/x}, \quad x \neq 0;$$

$$f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x - \log(1 + x);$$

Esercizio 5.17. Determinare il massimo e il minimo valore assunti dalle funzioni $f : [-1, 3]$, $f(x) = x^3$ e $g : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x^2}$.

Esercizio 5.18. È data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x).$$

Stabilire in quali intervalli la funzione è positiva, negativa, crescente, decrescente e determinare i suoi eventuali punti di massimo o di minimo. Tracciare un grafico qualitativo della funzione data che sia compatibile con le informazioni acquisite.

Esercizio 5.19. Data la funzione $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x(2-x)}$, dire quali sono i suoi punti di massimo o di minimo. Tracciare un grafico qualitativo di f .

Esercizio 5.20. Per le tre funzioni $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = e^x + e^{-x}, \quad f_2(x) = e^{-x^2}, \quad f_3(x) = e^{-x^3},$$

calcolare $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, dire in quali intervalli esse sono crescenti o decrescenti e tracciarne un grafico qualitativo.

5.5. Formula di Taylor

Partiamo dal caso di una funzione f di una variabile derivabile in $\bar{x} \in \mathbb{R}$. La definizione di derivata ci dice che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} = f'(\bar{x}).$$

Equivalentemente

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h} - f'(\bar{x}) \right) = 0, \quad \text{o anche}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})h}{h} \right) = 0.$$

Quindi dire che una funzione è derivabile in \bar{x} equivale a dire che la quantità

$$g(h) \equiv f(\bar{x} + h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})h \tag{5.2}$$

tende a zero *piu' rapidamente* di h per $h \rightarrow 0$. Per descrivere questo fenomeno introduciamo la seguente scrittura:

Definizione 5.21. Sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di una variabile con $g(0) = 0$ e sia $k \geq 0$. Si dice che $g(h)$ è un o piccolo di h^k per $h \rightarrow 0$ se

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h^k} = 0.$$

Si scrive $g(x) = o(x^k)$.

Ad esempio, $g(h) = h^2 = o(h)$. In fatti

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0.$$

Analogamente si verifica che $g(x) = x^\alpha = o(x)$ ogni volta che $\alpha > 1$.

Ancora un esempio: $g(h) = h(1 - \cos h) = o(h^2)$. Infatti

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(1 - \cos h)}{h^2} = (\text{Hopital}) = \lim_{h \rightarrow 0} \sin h = 0.$$

Esercizio 5.22. Verificare che

(1) se $g(h) = o(h^2)$, per $h \rightarrow 0$, allora $g(h) = o(h)$, per $h \rightarrow 0$.

(2) la funzione $g(h) = \sin^2 h$ soddisfa $g(h) = o(h)$, ma non soddisfa $g(h) = o(h^2)$.

Con la notazione appena introdotta possiamo scrivere in sintesi che se f è derivabile in \bar{x} , allora la funzione g in (5.2) è un o piccolo di h per $h \rightarrow 0$. Cioè che

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h). \quad (5.3)$$

La (5.3) si chiama *Formula di Taylor del primo ordine* di f di punto iniziale \bar{x} . Un altro modo di scrivere la (5.3) è ponendo $\bar{x} + h = x$. Allora si ottiene

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + o(x - \bar{x}), \quad (5.4)$$

per $x \rightarrow \bar{x}$. Il seguente polinomio di grado uno nella variabile x :

$$T_{1,\bar{x}}(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}),$$

si chiama *Polinomio di Taylor di grado uno* della funzione f e di punto iniziale \bar{x} .

Per ottenere una approssimazione migliore di quella data da (5.3) di una funzione f vicino a un punto x , è necessario fare una approssimazione del secondo ordine. In essa apparirà anche la derivata seconda di f , che è la derivata della derivata prima e si indica con f'' :

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x).$$

Teorema 5.23 (Formula di Taylor del secondo ordine). *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile due volte. Assumiamo che $f'' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sia una funzione continua. Allora vale, per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R}$,*

$$f(\bar{x} + h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + f''(\bar{x})\frac{h^2}{2} + o(h^2). \quad (5.5)$$

La formula (5.5) si chiama *Formula di Taylor del secondo ordine* di f con punto iniziale \bar{x} . Il polinomio di grado due

$$T_{2,\bar{x}}(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + f''(\bar{x})\frac{(x - \bar{x})^2}{2}$$

si chiama *Polinomio di Taylor di grado 2* di f di punto iniziale \bar{x} .

Esempio 5.24. *Scriviamo la formula di Taylor di $f(x) = e^x$ di punto iniziale $x = 0$. Basta calcolare $f(0) = e^0 = 1$. Poi $f'(x) = e^x$. Quindi $f'(0) = e^0 = 1$. Infine $f''(x) = e^x$ e quindi $f''(0) = e^0 = 1$*

In definitiva

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2).$$

Dimostrazione della Formula di Taylor del secondo ordine. La prova del teorema usa ancora la regola di de l'Hopital. Infatti, verificare (5.5) significa vedere che

$$\frac{f(x+h) - [f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2}]}{h^2} \rightarrow 0,$$

per $h \rightarrow 0$. Usando Hopital otteniamo

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - [f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2}]}{h^2} &\stackrel{H}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)h - f''(x)h}{2h} \\ &\stackrel{H}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{2} = 0, \end{aligned}$$

come si voleva. □

Una applicazione della formula di Taylor del secondo ordine è la seguente.

Teorema 5.25. *Se f ha derivate seconde continue in $]a, b[$ e se $x \in]a, b[$ è tale che $f'(x) = 0$ e $f''(x) > 0$, allora sarà f ha un minimo in x .*

Osserviamo prima di dare una dimostrazione che il viceversa è falso. Se f ha un minimo in x , allora non è detto che la sua derivata seconda sia positiva. Questo si vede considerando l'esempio costituito dalla funzione $f(x) = x^4$ nel punto $x_0 = 0$.

Dimostrazione. Basta scrivere la formula di Taylor di punto iniziale x . Si ottiene:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2} + R(h) = f(x) + f''(x)\frac{h^2}{2} + R(h), \quad (5.6)$$

dove $R(h) = o(h^2)$. Per definizione di o piccolo dato un qualsiasi $\varepsilon > 0$ possiamo trovare $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$\left| \frac{R(h)}{h^2} \right| \leq \varepsilon, \quad \text{se } 0 < |h| < \delta_\varepsilon. \quad (5.7)$$

La situazione suggerisce di scegliere $\varepsilon = f''(x)/4$. Dunque (5.7) diventa

$$-\frac{f''(x)}{4}h^2 < R(h) < \frac{f''(x)}{4}h^2, \quad \text{se } 0 < |h| < \delta_\varepsilon.$$

Se inseriamo questa informazione in (5.6), abbiamo, per $0 < |h| < \delta_\varepsilon$,

$$f(x+h) - f(x) = f''(x)\frac{h^2}{2} + R(h) > f''(x)\frac{h^2}{2} - f''(x)\frac{h^2}{4} > f''(x)\frac{h^2}{4} > 0.$$

Quindi x è un punto di minimo locale. □

Esercizio 5.26. *Determinare i punti di massimo o di minimo di $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + e^{-x}$. Soluzione: $x = 0$ è punto di minimo (assoluto).*

6. Integrali

6.1. Costruzione

Consideriamo una funzione f continua su $[0, 1]$. L'integrale di f si definisce tramite un processo di limite di due successioni. La successione delle somme inferiori s_n e quella delle somme superiori S_n .

Le successioni sono costruite come segue. Usiamo qui la notazione

$$\min_{[\alpha, \beta]} f = \min\{f(x) : x \in [\alpha, \beta]\},$$

per ogni intervallo $[\alpha, \beta] \subset [0, 1]$. Osserviamo che, poiché f è continua, minimo e massimo sono realizzati in un punto. Cioè esistono $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ per i quali vale $f(x_1) = \min_{[\alpha, \beta]} f$ e $f(x_2) = \max_{[\alpha, \beta]} f$. Poniamo

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 \cdot \min_{[0,1]} f \\ s_1 &= \frac{1}{2} \cdot \min_{[0, \frac{1}{2}]} f + \frac{1}{2} \cdot \min_{[\frac{1}{2}, 1]} f, \\ s_2 &= \frac{1}{4} \cdot \min_{[0, \frac{1}{4}]} f + \frac{1}{4} \cdot \min_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]} f + \frac{1}{4} \cdot \min_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]} f + \frac{1}{4} \cdot \min_{[\frac{3}{4}, 1]} f, \end{aligned}$$

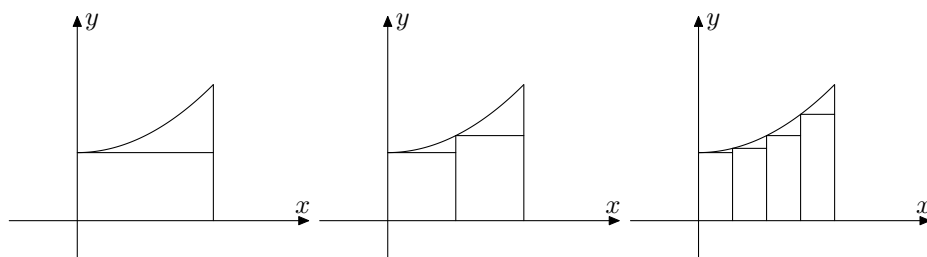


Figura 9: I primi tre passi dell'approssimazione tramite somme inferiori.

Al passo n -esimo avremo

$$s_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \min_{x \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} f.$$

In modo analogo definiamo la successione delle somme superiori, sostituendo però il minimo con il massimo.

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \max_{x \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} f.$$

Si vede immediatamente che $S_n \geq s_n$ (il massimo di una funzione su un insieme è sempre maggiore o uguale al minimo). Inoltre se f è costante, $f(x) = k$, allora sarà $s_n = S_n = k$, per ogni n . Evidenziamo ora altre proprietà delle due successioni:

- (a) $s_n \leq s_{n+1}$, per ogni $n = 1, 2, \dots$ (s_n monotona crescente).
- (b) $S_n \geq S_{n+1}$, per ogni $n = 1, 2, \dots$ (S_n monotona decrescente).
- (c) $s_n \leq S_m$, per ogni $n, m = 1, 2, \dots$

Diamo l'idea della verifica di (a). Consideriamo il caso $n = 1$. Si tratta di osservare che

$$\min_{x \in [0, \frac{1}{2}]} f \geq \min_{x \in [0, 1]} f, \quad \text{e} \quad \min_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} f \geq \min_{x \in [0, 1]} f \tag{6.1}$$

(il minimo decresce, se ingrandiamo l'insieme su cui lo calcoliamo). Allora risulta

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot \min_{x \in [0, \frac{1}{2}]} f + \frac{1}{2} \cdot \min_{x \in [\frac{1}{2}, 1]} f \geq \frac{1}{2} \cdot \min_{x \in [0, 1]} f + \frac{1}{2} \cdot \min_{x \in [0, 1]} f = 1 \cdot \min_{x \in [0, 1]} f = s_1.$$

Capito ciò, è facile riconoscere che $s_2 \leq s_3$ e via dicendo.

La proprietà (b) si può riconoscere analogamente alle (a), osservando che la disuguaglianza (6.1) si rovescia, se sostituiamo il minimo con il massimo.

Una volta vista la monotonia di (s_n) e di (S_n) , possiamo verificare (c). Supponiamo ad esempio che $n \geq m$. Osserviamo ancora che $S_n \geq s_n$. Infatti,

$$S_n - s_n = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \max_{x \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} f - \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \min_{x \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} f = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} \left\{ \max_{x \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} f - \min_{x \in [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} f \right\}.$$

Poiché ciascuno dei termini nelle graffe è ≥ 0 , la loro somma sarà ≥ 0 . Quindi $S_n \geq s_n$. D'altra parte, visto che $(S_n)_n$ è decrescente (proprietà (b)), sarà $S_m \geq S_n$. Quindi

$$S_m - s_n \geq S_n - s_n \geq 0,$$

che è la proprietà (c).

Le proprietà (a), (b) e (c) ora discusse, permettono di concludere che, se indichiamo con $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ ed $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, allora risulta

$$s \leq S.$$

Quindi, l'approssimazione "da sotto" ha un limite \leq dell'approssimazione "da sopra". In effetti, si può provare che i due limiti coincidono per tutte le funzioni continue.

Teorema 6.1. *Se f è continua su $[0, 1]$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. Il valore comune dei due limiti si chiama integrale di f e si indica con*

$$\int_0^1 f(x) dx, \quad \text{o, piu' brevemente, con} \quad \int_0^1 f.$$

La costruzione delle somme superiori e inferiori fatta qui, può essere generalizzata a un intervallo arbitrario $[a, b]$ per una funzione f continua su $[a, b]$, conducendo alla definizione di $\int_a^b f$.

La dimostrazione del Teorema 6.1 non è facile e non verrà presentata qui.

6.2. Proprietà elementari dell'integrale

L'integrale ha le seguenti proprietà, che possono essere verificate a partire dalla definizione:

Proprietà di linearità. Se f e g sono funzioni continue, $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b \lambda f(x) dx &= \lambda \int_a^b f(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad \text{(Proprietà di linearità)}$$

Proprietà di additività. Se conveniamo poi di porre, quando $b < a$,

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

vale, per f continua in \mathbb{R} e $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \quad \text{(Proprietà di additività)}.$$

Proprietà di monotonia.

$$f(x) \geq 0 \text{ su } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f \geq 0. \quad (6.2)$$

Osserviamo che per una funzione positiva e continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il numero $\int_a^b f$ definisce l'area della parte di piano compresa tra il grafico di f e l'asse x , delimitata dalle rette $x = a$ e $x = b$. La formula (6.2) dice anche che

$$f(x) \leq g(x) \text{ su } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$

La definizione come limite della successione delle somme inferiori o superiori non è utile a calcolare concretamente un integrale (a meno che non lo si voglia calcolare numericamente).

6.3. Primitive e funzioni integrali

Ai fini del calcolo di qualche integrale semplice, introduciamo la nozione di primitiva

Definizione 6.2 (Primitiva di una funzione). Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua su un intervallo aperto $A =]a, b[$. Una funzione F derivabile in A si chiama primitiva di f in A se vale

$$F'(x) = f(x), \quad \text{per ogni } x \in A.$$

Esempio 6.3. Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3$, la funzione $F(x) = 3x + 2$ è una primitiva di f in \mathbb{R} . Infatti vale $F'(x) = 3$.

Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$, la funzione $F(x) = \frac{x^2}{2}$ è una primitiva di f in \mathbb{R} . Infatti $\frac{d}{dx}x^2/2 = x$. Osserviamo che avremmo potuto scegliere $F(x) = \frac{x^2}{2} + k$, con k costante arbitraria ottenendo sempre una primitiva di f .

Teorema 6.4 (Proprietà delle primitive). Data una funzione f :

- (A) Se F è una primitiva di f in un intervallo aperto A , allora la funzione $x \mapsto F(x) + k$ è una primitiva di f in A per ogni $k \in \mathbb{R}$.
- (B) Se F e G sono due primitive di f in un intervallo aperto A , allora esiste una costante $k \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) - G(x) = k$, per ogni $x \in A$.

Dimostrazione del Teorema 6.4. Parte (A). È una immediata conseguenza del fatto che la derivata di una funzione costante è nulla.

Parte (B). Supponiamo che F e G siano entrambe primitive di f su A . Pertanto

$$\frac{d}{dx}(F(x) - G(x)) = f(x) - f(x) = 0,$$

per ogni $x \in A$. Quindi la funzione $x \mapsto F(x) - G(x)$ ha derivata identicamente nulla nell'intervallo A . Pertanto è costante, grazie al Corollario 5.6. \square

Funzioni integrali. Se f è una funzione continua su un intervallo A , allora, fissato un punto $c \in A$, per ogni $x \in A$ è definito l'integrale $\int_c^x f(t)dt$. Indichiamo la funzione $x \mapsto \int_c^x f(t)dt$ con I_c .

$$I_c(x) = \int_c^x f(t)dt, \quad x \in A.$$

Chiameremo I_c funzione integrale di f con estremo inferiore c .

Osservazione 6.5 (Funzioni integrali e funzioni di ripartizione). Osserviamo che la nozione di funzione integrale è strettamente legata a quella di funzione di ripartizione in Probabilità. Ad esempio, se X è una variabile aleatoria sull'intervallo $[0, 1]$ con densità continua $f_X : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, allora la funzione di ripartizione

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt$$

di X coincide esattamente con la funzione I_0 .

Osservazione 6.6. Se scegliamo due punti base c, c' diversi, allora le funzioni integrali I_c e $I_{c'}$ differiscono per una costante. Infatti, per la additività dell'integrale,

$$I_c(x) - I_{c'}(x) = \int_c^x f - \int_{c'}^x f = \int_c^{c'} f = \text{costante}.$$

6.4. Teorema fondamentale del calcolo

Teorema 6.7 (Teorema fondamentale del calcolo integrale). *Se f è continua su un intervallo aperto A e $c \in A$ è fissato, allora*

$$I'_c(x) = \frac{d}{dx} \int_c^x f(t)dt = f(x), \quad \forall x \in A.$$

Esempio 6.8. *Calcoliamo usando Il Teorema fondamentale del calcolo la derivata*

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(t^2)dt.$$

Usiamo la funzione $f(t) = \sin(t^2)$. Quindi

$$\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(t^2)dt = \sin(x^2).$$

Per calcolare quella derivata non è necessario calcolare l'integrale (anche ammesso che si sappia farlo, questo sarebbe uno spreco di energie). Analogamente

$$\frac{d}{dx} \int_0^x e^{-t^2} = e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dimostrazione del Teorema fondamentale del calcolo. Fissiamo $x \in A$. Dobbiamo provare che

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t)dt = f(x) \quad \text{cioè} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x).$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché f è continua in x , per definizione di funzione continua, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che

$$f(x) - \varepsilon < f(t) < f(x) + \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \text{ con } |t - x| < \varepsilon. \quad (6.3)$$

Ora scegliamo $h < \delta_\varepsilon$, per comodità positivo (il caso $h < 0$ è analogo). Allora, facendo l'integrale $\int_x^{x+h} f(t)dt$, saranno coinvolti in esso solo valori di $t \in [x, x+h]$. Quindi $|t - x| < \delta_\varepsilon$, in tutto l'intervallo di integrazione. Quindi, per la proprietà di monotonia dell'integrale, (6.3) fornisce

$$\int_x^{x+h} [f(x) - \varepsilon]dt < \int_x^{x+h} f(t)dt = \int_x^{x+h} [f(x) + \varepsilon]dt,$$

che, visto che i due integrali agli estremi sono integrali di funzioni costanti, diventa

$$h[f(x) - \varepsilon] < \int_x^{x+h} f(t)dt < h[f(x) + \varepsilon].$$

Poiché stiamo considerando il caso $h > 0$, dividendo per h avremo

$$f(x) - \varepsilon < \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt < f(x) + \varepsilon.$$

Le due disuguaglianze scritte in questa riga valgono non appena $0 \leq h < \delta_\varepsilon$. Quindi abbiamo di fatto verificato che la definizione di limite è soddisfatta per il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt = f(x).$$

Con una minima modifica si vede che anche per $h \rightarrow 0-$ il limite è lo stesso. Quindi il teorema è provato. \square

Corollario 6.9 (Teorema di Torricelli). *Sia f continua su A e sia F una sua primitiva. Allora, in ogni intervallo $[a, b] \subset A$, vale*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{6.4}$$

Si usano di solito le notazioni equivalenti

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_{x=b}^{x=a} = F(x) \Big|_{x=b}^{x=a}.$$

Dimostrazione. Fissiamo una qualsiasi funzione integrale I_c . Per il Teorema fondamentale del calcolo I_c è una primitiva di f . Quindi, per le proprietà delle primitive, le due primitive I_c e F differiscono per una costante k : $I_c(x) = F(x) + k, x \in A$. Ma allora

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \int_a^c f + \int_c^b f = - \int_c^a f + \int_c^b f = -I_c(a) + I_c(b) \\ &= -[F(a) + k] + F(b) + k = F(b) - F(a), \end{aligned}$$

come si voleva. □

Esempio 6.10. Calcoliamo $\int_1^2 x dx$. Poiché $F(x) = x^2/2$ è una primitiva della funzione integranda, avremo

$$\int_1^2 x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 = 2 - \frac{1}{2}.$$

6.5. Tabella di alcune primitive elementari

$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in \mathbb{R}, n = 1, 2, \dots$
e^x	$e^x, \quad x \in \mathbb{R},$
$\cos x$	$\sin x, \quad x \in \mathbb{R},$
$\sin x$	$-\cos x, \quad x \in \mathbb{R},$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1, x > 0,$
$\frac{1}{x}$	$\log x , \quad x \neq 0.$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x), \quad x \in \mathbb{R}.$

Esercizio 6.11. Calcolare con la tabella appena scritta

$$\int_1^2 \left[\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x} \right] dx, \quad \int_1^3 (2x^3 + x^{3/2}) dx, \quad \int_{-1}^{-1/2} \frac{dx}{x}, \quad \int_0^\pi \sin x dx, \quad \int_{-\pi}^\pi \cos x dx.$$

7. Tecniche di calcolo degli integrali

Descriviamo ora alcune tecniche per il calcolo esplicito di integrali.

7.1. Integrali di derivate di funzioni composte

Date due funzioni f, g tali che si possa scrivere $f \circ g$, vale la formula

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Allora il Teorema di Torricelli assicura che

$$\int_a^b f'(g(x))g'(x)dx = \int_a^b \frac{d}{dx}f(g(x))dx = [f(g(x))]_a^b. \quad (7.1)$$

Da (7.1) si possono ottenere numerose primitive in modo quasi immediato.

Come applicazione della formula (7.1) si svolga il seguente esercizio.

Esercizio 7.1. Sia g una funzione derivabile su \mathbb{R} . Dire quanto vale la derivata della funzione composta $h(x) = e^{g(x)}$. Usando questo calcolo (assieme al Teorema di Torricelli) dire quanto vale l'integrale $\int_a^b e^{g(x)}g'(x)dx$.

Calcolare, usando le considerazioni appena fatte e scegliendo di volta in volta una $g(x)$ opportuna, gli integrali

$$\int_1^2 2xe^{x^2}dx, \quad \int_0^5 e^{-x}dx, \quad \int_3^5 x^2e^{-x^3}dx, \quad \int_0^{\pi} e^{\sin x} \cos x dx, \quad \int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin x dx.$$

Esercizio 7.2. Nello stesso spirito dell'esercizio precedente, scrivere la derivata della funzione composta $h(x) = \log(g(x))$, dove $g(x)$ è una funzione positiva. Usare questo risultato per calcolare gli integrali

$$\int_1^2 \frac{x^2}{1+x^3}dx, \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos x}dx.$$

Esercizio 7.3. Ancora ragionando come sopra, ma usando l'espressione della derivata della funzione composta $h(x) = \sin(g(x))$, calcolare

$$\int_0^{\pi^{1/3}} x^2 \cos(x^3)dx, \quad \int_{-\sqrt{\pi}}^0 x \cos x^2 dx.$$

Sostituendo la funzione seno con la funzione coseno, calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2x)dx, \quad \int_0^{\pi^2/4} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$$

Esercizio 7.4. Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos(x)dx.$$

7.2. Integrazione per parti

Teorema 7.5 (Formula di integrazione per parti). Se f è continua su $[a, b]$ e g è derivabile in ogni punto di $[a, b]$, allora, indicando con F una primitiva di f in $[a, b]$, si ha

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = [F(x)g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx. \quad (7.2)$$

Dimostrazione. Basta calcolare la derivata

$$\frac{d}{dx}F(x)g(x) = F'(x)g(x) + f(x)g'(x) = f(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Integrando su $[a, b]$

$$\int_a^b \frac{d}{dx}(F(x)g(x))dx = \int_a^b (f(x)g(x) + f(x)g'(x))dx.$$

Quindi per la Formula di Torricelli,

$$[F(x)g(x)]_a^b = \int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx,$$

che dà immediatamente (7.2).

Esempio 7.6. Calcoliamo $\int_0^1 xe^x dx$. Scegliendo $f(x) = e^x$, $g(x) = x$, abbiamo

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [xe^x - e^x]_0^1 = 1.$$

Analogamente, per integrare la funzione logaritmo,

$$\int_a^b \log x dx = \int_a^b 1 \cdot \log x dx = [x \log x]_a^b - \int_a^b 1 dx = [x \log x - x]_a^b$$

Un ultimo esempio di integrazione per parti

$$\int_a^b x \sin x dx = [x \cdot (-\cos x)]_a^b - \int_a^b (-\cos x) dx = [-x \cos x + \sin x]_a^b.$$

7.3. Cambi di variabile

Teorema 7.7 (Cambio di variabile negli integrali). Se f è continua su $[a, b]$ e se $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ è una funzione derivabile, allora vale la formula

$$\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(h(t))h'(t)dt \tag{7.3}$$

Prima di dare la dimostrazione, applichiamo la formula al calcolo del seguente integrale:

$$\int_0^4 \sin \sqrt{x} dx.$$

Poniamo $\sqrt{x} = t$. Quindi avremo $x = t^2 = h(t)$. Scegliendo $\alpha = 0$ e $\beta = 2$, avremo $h(0) = 0$ e $h(2) = 4$. Inoltre $h'(t) = 2t$. Quindi

$$\int_0^4 \sin \sqrt{x} dx = \int_0^2 (\sin t) 2t dt.$$

Questo ultimo integrale è stato calcolato nell'esempio precedente, integrando per parti.

Dimostrazione della formula del cambio di variabile. Basta considerare le due funzioni F e G definite su $[\alpha, \beta]$ come segue

$$F(z) = \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx \quad \text{e} \quad G(z) = \int_{\alpha}^z f(h(t))h'(t)dt.$$

Dire che vale la formula (7.3) e' esattamente equivalente a dire che vale $F(\beta) = G(\beta)$. Per riconoscere cio', verifichiamo:

- (1) che F e G hanno la stessa derivata su $] \alpha, \beta [$.
- (2) Che F e G coincidono in un punto almeno.

Per provare che $F' = G'$, basta applicare il Teorema Fondamentale del Calcolo:

$$G'(z) = f(h(z))h'(z).$$

La derivata di F si ottiene derivando la funzione composta

$$z \mapsto h(z) \mapsto \int_{h(\alpha)}^{h(z)} f(x)dx$$

e vale, di nuovo per il Teorema fondamentale del calcolo,

$$F'(z) = f(h(z))h'(z).$$

Quindi le due funzioni hanno la stessa derivata in ogni punto. Pertanto differiscono per una costante k . D'altra parte, tanto G quanto F valgono zero, per $z = \alpha$. Ciò significa che la costante k è zero. Quindi $G = F$ su tutto $[\alpha, \beta]$. In particolare sarà $G(\beta) = F(\beta)$, che è esattamente (7.3). \square

7.4. Esercizi sul Teorema fondamentale del calcolo.

Esercizio 7.8. Dire, usando il Teorema fondamentale del calcolo, quanto valgono le derivate delle funzioni

$$f(x) = \int_0^x \cos(t^2)dt, \quad \int_x^0 \sin te^t dt.$$

Esercizio 7.9. Consideriamo, data una funzione f continua, la sua funzione integrale di estremo inferiore $c = 0$ e la indichiamo con I . $I(x) = \int_0^x f(t)dt$. Il Teorema fondamentale del calcolo afferma che $I'(x) = f(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Se g e' una funzione qualsiasi derivabile, dire quanto vale la derivata della funzione composta $x \mapsto I(g(x))$.

Usare la risposta alla domanda appena posta per calcolare le derivate

$$\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} f(t)dt, \quad \frac{d}{dx} \int_0^{x^2+x} e^{-t^2} dt, \quad \int_x^{2x} t^2 e^t dt.$$

(per calcolare l'ultima derivata, si provi a scrivere l'integrale come somma di due integrali usando la additività $\int_a^b f = \int_a^0 f + \int_0^b f$, per ogni $a, b \in \mathbb{R}$).

7.5. Integrali generalizzati

In questa parte ci occupiamo di definire in modo corretto l' integrale di una funzione continua su un intervallo illimitato. Consideriamo una funzione continua su $[a, +\infty[$ e non negativa.

Definizione 7.10. Sia $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua che assume valori non negativi, $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, +\infty[$. Si dice che f è integrabile in senso generalizzato su $[a, +\infty[$ se il limite

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x)dx$$

esiste finito. In tal caso poniamo

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x)dx$$

Se invece il limite è $+\infty$, allora diciamo che la funzione non e' integrabile in senso generalizzato.

Una terminologia equivalente è: l'integrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ è convergente, se il limite è finito, oppure divergente se il limite è $+\infty$.

Esempio 7.11. La funzione $f(x) = 1$ non è integrabile in senso generalizzato su $[0, +\infty[$. Infatti,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R 1 dx = \lim_{R \rightarrow +\infty} R = +\infty.$$

La funzione $f(x) = e^{-x}$ è invece integrabile in senso generalizzato su $[0, +\infty)$. Infatti, preso $R > 0$,

$$\int_0^R e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^R = 1 - e^{-R} \rightarrow 1, \quad \text{per } R \rightarrow +\infty. \quad (7.4)$$

Quindi $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$. L'integrale è convergente.

Vale la pena di osservare che se f è non negativa su $[a, +\infty[$, allora la funzione

$$R \mapsto \int_a^R f(x) dx.$$

è crescente su $[a, +\infty[$. Quindi si può essere certi ⁷ che il suo limite per $R \rightarrow \infty$ esiste (finito o $+\infty$).

Esempio 7.12. Consideriamo la funzione $f(x) = x^\alpha$, per $\alpha \in \mathbb{R}$. Esaminiamo per quali α l'integrale $\int_1^{+\infty} e^{-x}$ è convergente.

Per discutere l'esempio, dividiamo due casi: $\alpha = -1$ ed $\alpha \neq -1$. Nel primo caso

$$\int_1^R \frac{dx}{x} = [\log x]_1^R = \log R \rightarrow +\infty, \quad \text{per } R \rightarrow +\infty.$$

Quindi l'integrale è divergente.

Nel secondo caso

$$\int_1^R x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right]_1^R = \frac{R^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+1}.$$

Ora, se $\alpha + 1 < 0$, $\lim_{R \rightarrow +\infty} R^{\alpha+1} = 0$, mentre se $\alpha + 1 > 0$, $\lim_{R \rightarrow +\infty} R^{\alpha+1} = +\infty$. Quindi l'integrale è convergente soltanto se $\alpha + 1 < 0$. In tal caso vale

$$\int_1^{+\infty} x^\alpha dx = -\frac{1}{\alpha+1}.$$

Per $\alpha \geq -1$ l'integrale è divergente.

Diamo ora la definizione per integrali del tipo $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.

Definizione 7.13. Se $f :]-\infty, b]$ è continua e non negativa, poniamo

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{R \rightarrow -\infty} \int_R^b f(x) dx.$$

Diciamo che l'integrale è convergente se il limite è finito e che l'integrale è divergente se il limite è $+\infty$.

Infine: se $f :]-\infty, +\infty[$ è continua e non negativa, diciamo che f è integrabile in senso generalizzato su $]-\infty, +\infty[$ se è integrabile in senso generalizzato in entrambi gli intervalli $]-\infty, 0]$ e $[0, +\infty[$. In tal caso poniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

⁷Una dimostrazione rigorosa di questo fatto esula però dagli scopi di questo corso

Esempio 7.14. Calcolare l'integrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$.

Integriamo per parti:

$$\int_0^R xe^{-x} dx = [-xe^{-x}]_0^R - \int_0^R e^{-x} dx = -Re^{-R} + 0 + \int_0^R e^{-x} dx \rightarrow 1,$$

per $R \rightarrow +\infty$. Infatti, $\lim_{R \rightarrow +\infty} Re^{-R} = 0$ e, come visto sopra, $\int_0^R e^{-x} dx \rightarrow 1$, per $R \rightarrow +\infty$.

Esercizio 7.15. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$