Matematica con esercitazioni, Modulo 2.
Analisi matematica. Diario delle lezioni.

Laurea triennale Chimica e tecnologie per l'ambiente e per i materiali. Rimini

Avvertenza per gli studenti: il libro di testo di referimento è M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica 1. Zanichelli.

Diario delle lezioni

Lezione 1 – (6/10/14)

Ripasso di equazioni di secondo grado, disequazioni numeriche e disequazioni di secondo grado. (1)
Richiami sul linguaggio sdegli insiemi, unione intersezione differenza, ecc.

Lezione 2 – (7/10/14)

Numeri naturali, interi, razionali e reali. Valore assoluto e disequazioni con il valore assoluto. (3)
Prodotto cartesiano. Funzioni, grafico di una funzione. Esempi di funzioni: le funzioni affini. La funzione valore assoluto. Grafici delle funzioni

Lezione 3 – (13/10/14)

Panoramica delle potenza ad esponente naturale (pari o dispari), a esponente intero negativo (6)
e a esponente reale. La funzione esponenziale. Definizione di funzione monotona ed esempi. Funzioni iniettive, suriettive e biunivoche. COstruzione della funzione inversa di $f : A \to B$ biunivoca. La funzione logaritmo e le sue proprietà.

Esercizi per casa

(1.1) È data la funzione $f :]1, +\infty[\to]0, 1[$,

$$f(x) = \frac{1}{1 + (x-1)^2}$$

Verificare che la funzione è iniettiva, suriettiva e individuare la funzione inversa.

(1.2) È data la funzione biunivoca $f :]1, +\infty[\to]-1, +\infty[$,

$$f(x) = x^2 - 2x.$$

Individuare la funzione f^{-1}.

Lezione 4 – (20/10/14)

Monotonia dell' inversa di una fuznione monotona. Ad esempio il logaritmo. Studio di alcune (9)
disequazioni esponenziali. Angoli nel cerchio goniometrico e costruzione delle funzioni seno e coseno.

Lezione 5 – (21/10/14)

La funzione tangente. Successioni numeriche convergenti e divergenti. Esempi di verifiche di limiti di successioni. I limiti delle successioni $n^\alpha, e^n, e^{-n}, \log(n)\dots$ (12)

Esercizi

1. Data $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-k^2}$, verificare, usando la definizione, che f è crescente su $\mathbb{N}$.
2. Sono date $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funzioni strettemante crescenti. Verificare che $g \circ f$ èstrettamente crescente.
3. Sono date le funzioni

$$u_1(x) = 2^{1+x} \quad u_2(x) = \tan(\log(x)) \quad u_3(x) = \cos(\log^2(x^2)),$$

dove abbiamo usato la notazione $\log^2(z) = (\log(z))^2$. Scrivere le funzioni indicate come composizioni di funzioni elementari.

Lezione 6 – (27/10/14)

Limiti di successioni e loro proprietà algebriche. Teormea di unicità del limite, del confronto e dei due carabinieri. Punti di accumulazione di un insieme e limiti di funzioni. (15)

Lezione 7 – (28/10/14)

Funzioni continue. Limiti da destra e da sinistra per funzioni singolari. Limiti notevoli e generalizzazioni (18)

Esercizi per casa

Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{x+x^2}}{\sin x} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2-x)}{x} \quad \lim_{x\to 2-} \frac{\log x}{\sin(2-x)}$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2\log(x)}{x-1} \quad \lim_{x\to 0-} \frac{e^x}{x\sin x}$$

Lezione 8 – (03/11/14)

Pendenza di un segmento, di una retta, rapporto incrementale e derivata. Derivate di somme, prodotti e quozienti. (21)

Lezione 9 – (04/11/14)

Derivate di funzioni composte. Esercizi. Definizione di punto di massimo/minimo locale e globale. Teorema di Fermat, Teorema di Weierstrass, Teorema di Rolle. (24)

Esercizi per casa

Calcolare tutte le derivate a pag. 25 delle dispense in rete.

Lezione 10 – (10/11/14)

Teorema di Lagrange. Caratterizzazione delle funzioni costanti e monotone derivabili. Esercisi sulla mootonia e grafiuci approssimati di alcune funzioni. Le funzioni $\sinh, \cosh, \arctan$ con rispettivi grafici, proprietà e derivate. Regola di de l'Hôpital. (27)

Lezione 11 – (11/11/14)

Esercizi sul calcolo dei limiti e sui grafici di funzioni. Derivate seconde e teorema sulla condizione sufficiente per massimi e minimi in termini di derivate seconde. (30)

Esercizi per casa

Nelle dispense in rete. Esercizio 5.10. Tutti gli esercizi del paragrafo 5.4 a pag. 29.

Lezione 12 – (17/11/14)

Introduzioooe alle somme di RIemann all'integrale. Proprietà di linearità, additività e monotonia. Primitive e loro proprietà. Caratterizzazione di tutte le primitive di una funzione. Funzioni integrali. (33)

Lezione 13 – (18/11/14)

(Secondo) Teorema fondamentale del calcolo (sulla derivata della funzione integrale). Primo teorema fondamentale del calcolo (Formula di Torricelli). Tabella di primitive elementari e suo uso. Calcolo di integrali il cui integrando è derivata di una funzione composta. (36)

Esercizi per casa

Calcolare gli integrali seguenti riconoscendo l'integrando come derivata di funzione composta.

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \quad \int_1^2 \frac{e^x}{1+e^x}dx \quad \int_2^3 \frac{\log^2 x}{x}dx$$

$$\int_a^b \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dxq \quad \int_2^4 e^{x^3+3x}(x^2+1)dx$$

Lezione 14 – (25/11/14)

Integrazione per parti e esercizi. Formula del cambio di variabile e esercizi. Integrali di funzioni del tipo (38)

$$\int \frac{N(x)}{D(x)}dx$$

con N polinomio e D polinomio di grado ≤ 2.

Esercizi per casa

$$\int_{-1}^0 \frac{x^2}{x^2+x-2}dx \quad \int_0^1 \frac{x^2+2}{(x+1)^2}dx \quad \int_0^1 \frac{x+1}{2x^2+1}dx \quad \int \frac{1}{4x^2+4x+5}dx$$

$$\int \frac{x-1}{4x^2+4x+5}dx \quad \int \frac{2x^2+x}{1+x^2}dx \quad \int_1^2 \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx \quad \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$$

$$\int_1^3 x^{1/3}(1+x)dx \quad \int_2^3 x(\log x)^2dx \quad \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$$

Lezione 15 – (02/12/14)

Numeri complessi. Operazioni, compleesso coniugato, modulo. Rappresentrazione trigonometrica. Prodotto di numeri complessi in forma trigonometrica. Formule di de Moivre. Equazioni algebriche di secondo grado a coefficienti reali. (41)

Esercizi

- Calcolare
$$\frac{2+i}{1-i}, \quad \mathrm{Im}((z+i)(z-2i)).$$
- Dato $z = r(\cos(\theta) + i\sin\theta))$ con $r > 0$, scrivere z^{-1} in forma trigonometrica.
- Calcolare usando la rappresentazione trigonometrica
$$(1+i)^3, \quad (-\sqrt{3}+i)^5, \quad (1-i\sqrt{3})^4$$
- Dati $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin\theta_1))$ e $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin\theta_2))$ scrivere in forma trigonometrica il quoziente $\frac{z_1}{z_2}$.
- Verificare la formula per il modulo quadro di una somma di numeri complessi
$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\,\overline{w})$$
- Risolvere le equazioni
$$z^2 + z + 3 = 0, \quad z^2 - z + 1 = 0$$

Lezione 16 – (03/12/14)

Equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili e lineari, omogenee e non omogenee. (44)

Esercizi

Risolvere i problemi di Cauchy
$$\begin{aligned}
&y' = y^2 t \quad y(0) = 0\\
&y' = y^2 t \quad y(1) = 1\\
&y' = (y+1)^2 t \quad y(0) = 1\\
&y' = 2ty + t^3 \quad y(0) = 2\\
&y' = y(2-y) \quad y(0) = 1\\
&yy' = t + ty^2 \quad y(0) = 1\\
&y' + y = e^t \quad y(0) = 1\\
&y' = te^y \quad y(1) = 1
\end{aligned}$$

Lezione 17 – (09/12/14)

Equazioni differenziali del secondo ordine lineari omogenee a coefficienti costanti $ay'' + by' + cy = 0$. (47)

Esercizi

- Rislovere i problemi di Cauchy
$$\begin{gathered}
y'' + 4y = 0 \quad \text{con } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.\\
9y'' - 6y' + y = 0 \quad \text{con } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.\\
y'' + 6y' + 25y = 0 \quad \text{con } y(-1) = 0 \text{ e } y'(-1) = 1.\\
y'' - 2y' - 3y = 0, \quad \text{con } y(1) = y_0 \text{ e } y'(1) = v_0.\\
y'' = y - y', \quad \text{con } y(0) = -1 \text{ e } y'(0) = 1.
\end{gathered}$$

- Esiste una funzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfi $y''(t) = 2y'(t) - y(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per la quale valgano le condizioni $y(0) = y''(0) = 0$ e $y'(0) = 1$?
- Verificare, ricordando le proprietà elementari di seno e coseno, che dati A, B reali, esiste $\theta \in\ R$ tale che
$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\ \sin(x+\theta) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$
Trovare C e θ tali che
$$\sqrt{3}\cos(2t) + \sin(2t) = C\sin(2t+\theta)$$
per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Lezione 18 – (16/12/14)

Breve discussione sulle funzioni continue in piú variabili e sugli insiemi aperti. Vedere Bramanti, Pagani Salsa, Cap. 9. Definizione di derivata parziale $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{y})$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y})$ per una funzione di due variabili x, y in un punto $(\bar{x}, \bar{y})$. V. Bramanti Pagani Salsa, Cap. 11. Esercizi sul calcolo di derivate parziali. Gradiente di una funzione. Definizione di derivate parziali per funzioni di tre o piú variabili. Esempio: l'esistenza delle derivate parziali non implica la continuità. Nozione di funzione differenziabile, in una e in due variabili. Approssimazione del primo ordine e piano tangente al grafico di una funzione di due variabili (53)

Esercizi per casa. Correzione con Tutor il 9 gennaio

Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = xy^2 + \log(xy), \quad f(x,y) = xe^{-x}, \quad f(x,y) = \sin(x^2+y^2),$$
$$f(x,y) = x^2 + xe^{xy}, \quad f(x,y) = \arctan(x^2+y), \quad f(x,y) = e^{x/y},$$
$$f(x,y,z) = \sqrt{1+xyz}, \quad f(x,y,z) = \log\Big(\frac{x}{1+y^2+z^2}\Big)$$
$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = |x|^2 + \langle b, x\rangle \quad \text{con } b \in \mathbb{R}^n.$$

Dire qual'è il punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^3$ del grafico della funzione $f(x,y) = x^2 + xy^3$ con $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, -1)$. Scrivere poi l'equazione del piano talgente al grafico di f in tale punto.

Stessa domanda per $f(x,y) = e^{xy}$ nel punto $(\bar{x}, \bar{y}) = (-1, 0)$.

Lezione 19 – (12/01/15)

Richiami sulla differenziabilità . Funzioni di classe C^1 e differenziabilità . Derivata direzionale $\dfrac{\partial f}{\partial v}(\bar{x}, \bar{y})$ in una direzione $v = (\cos\theta, \sin\theta)$. Formula del gradiente. Direzione di massima crescita di una funzione scalare. (56)

Lezione 20 – (13/01/15)

Curve di $\mathbb{R}^n$ e loro velocità /vettore tangente. Derivata di una funzione scalare $f(x,y)$ lungo una curva $r(t) = (x(t), y(t))$. Ortogonalità tra gradiente e curve di livello di una funzione. (59)

Esercizi

1. Individuare la direzione di massima crescita $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ per $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ in $(1,2)$. Calcolare poi il corrispondente valore massimo di $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,2)$.

2. Stessa domanda per $f(x,y) = e^{-(x^2+y^4)}$ in $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, -1)$.

3. Calcolare la velocità e l'accelerazione delle curve
$$r(t) = (t^2, t^3 + \log t)$$
$$r(t) = (te^{-t}, t+1, t^3)$$

4. Data la curva
$$r(t) = (2t^3 - 3t^2, t^4 + 4e^{1-t}),$$
dire se esistono valoti di $t \in \mathbb{R}$ (e se sí, quali) per cui $r'(t) = 0$.

5. Generalizzando la formula del gradiente al caso di dimensione piú alta, calcolare la derivata $\dfrac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})$ con :
$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 e^{x_2 x_3^2}, \quad \bar{x} = (1,2,1) \quad v = (-\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{3}{\sqrt{11}})$$

6. Sia $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva derivabile due volte che si muove con velocità scalare 1: $|r'(t)| = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Derivando l'identità $|r'(t)|^2 = 1$ verificare che $r''(t) \perp r'(t)$.

7. E' data una funzione f delle variabili (x, y). Calcolare le derivate
$$\frac{\partial}{\partial u} f(u^2 v, ve^{uv}), \qquad \frac{\partial}{\partial v} f(u^2 v, ve^{uv})$$

Esercizi supplementari

- Calcolare seguenti limiti:
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x \sin x)}{3x^2 - x^4} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x^2}}{x+1} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - \sqrt{1-x}}{\sin x} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$
$$\lim_{x\to+\infty} \exp\Big(\frac{\log(x) - x}{x}\Big) \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3 + x^2}} \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2 - x^3}$$
$$\lim_{x\to 0+} \frac{xe^x - \sin x}{e^{x^3} - 1}, \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{x \sin(x + x^{3/2})}{(1-x^2)(\sin x - \sin(x^2))} \qquad \lim_{x\to+\infty} x^4 e^{x^2 - x^3}$$

- Calcolare
$$\int_1^2 \frac{1+\log(x)}{x} dx \qquad \int_2^3 (1+x)e^{-2x} dx$$
$$\int_1^2 \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \qquad \text{e} \qquad \int_2^3 x(1+\log(x)) dx \qquad \int x \arctan x \, dx \qquad \int_0^1 \sqrt{x} \log(1+\sqrt{x}) dx$$

- Tracciare un grafico qualitativo delle funzioni
$$f(x) = \frac{x+1}{x+2}, \quad f(x) = e^{1/(x-1)}$$

- Si consideri la funzione $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + x^{-1/2}$. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(1, f(1))$. Indicare in quali intervalli f è crescente/decrescente e tracciarne poi il grafico.
- Dire in quali intervalli è crescente o decrescente la funzione
$$F(x) = \int_0^x (te^{t^2} - e^{t^2})dt.$$
- Se $z = x + iy \in \mathbb{C}$ è un numero complesso, calcolare in termini di x e y i seguenti numeri:
$$\mathrm{Re}(z(1+2i)), \qquad \mathrm{Im}(z\bar{z} + z^2) \qquad |z + i\bar{z}|^2$$

Lezione 21 – (19/01/15)

Derivate seconde e matrice Hessiana per funzioni di due variabili. Teorema di Schwarz. Teorema di Fermat su punti di minimo e punti critici. Matrici definite positive, negative indefinite e semidefinite. Condizioni del secondo ordine per determinare punti di minimo/massimo e sella. (62)

Esercizi

Individuare e classificare i punti critici per le funzioni

$$f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)}, \qquad f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2 + 2, \qquad f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$$

Lezione 22 – (20/01/15)

Domini semplici e teorema di riduzione. Trasformazioni regolari di coordinate e formula per il cambio di variabile per integrali in due variabili. Le coordinate polari piane. (65)

Esercizi

Esercizi dal libro di testo Bramani, Pagani, Salsa (saranno corretti con la tutor).

- Cap. 13, paragrafo 1.1: esercizi 2, 3, 6, 7, 14, 17.
- Cap. 13, paragrafo 1.2, esercizio 20, 21.
- Cap. 11, paragrafo 4.3: esercizi 29, 34, 35.

Seguono sotto gli esercizi sopra indicati (per gli studenti che hanno la nuova edizione del libro):

$$\int_T (x + \sin y)dxdy \quad \text{con } T = \{(x,y) : 0 < x < 1;\ 0 < y < 1 - x\}$$
$$\int_{x^2+y^2<2} xy^3 dxdy \qquad \int_{[0,1]\times[0,\pi]} x \sin y\, dxdy$$
$$\int_{\{(x,y):\ 0<x<1;\ 0<y<x\}} x \sin y\, dxdy$$

- Calcolare l'area dell'insieme
$$D = \{(x,y) : 0 < y < 1,\ y^2 - 1 \le x \le \sqrt{1-y^2}\}$$
- Calcolare
$$\int_{|x|+|y|<1} x^2y^2 dxdy.$$

- Sia D il quarto di corona circolare di centro l'origine raggi 1 e 2 e angolo variabile tra $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3}{4}\pi$. Calcolare
$$\int_D x^3 y dxdy.$$
- Calcolare
$$\int_D \frac{x^3 y}{x^2+y^2} dxdy,$$
dove D è l'intersezione del settore circolare $\{\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{3}\}$. con la corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2.
- Studiare i punti di massimo e minimo delle funzioni
$$f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)}, \quad f(x,y) = \log(1+x^2+y^2) - 3xy, \quad f(x,y) = e^{-2(x^2+y^2)} + x^2 + y^2$$

Lista argomenti/domande di teoria

Nota: il simbolo (*) significa che la dimostrazione è stata svolta in classe.

- Definizione di funzioe monotona.
- Costruzione/definizione e proprietà della funzione inversa
- Definizione di successione convergente/divergente.
- Teoremi sui limiti: unicità,permanenzadel segno e due carabinieri.
- Limiti di funzioni.
- Definizione di derivata.
- Derivata e differenziabilità.
- Derivate di somme, prodotti (*), quozienti e funzioni composte.
- Punti di massimo/minimo
- Teorema di Fermat (*). Teorema di Weierstrass. Teorema di Rolle (*). Teorema di Lagrange.
- Teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti (*) e delle funzioni monotone derivabili (*).
- Condizioni sufficienti del secondo ordine per punti di massimo/minimo.
- Primitive e loro proprietà (*)
- (Secondo) Teorema fondamentale del calcolo (sulle derivate della funzione integrale) (*).
- Primo Teorema fondamentele del calcolo (formula di Torricelli) (*).
- Formula di integrazione per parti (*).
- Formula del cambio di variabile (*)
- Definizione e proprietà elementari dei numeri complessi.
- Equazioni differenziali del primo e del secondo ordine.
- Limite per successioni in $\mathbb{R}^n$.
- Definizione di derivata parziale, gradiente, matrice Hessiana, derivata direzionale
- Continuità delle funzioni differenziabili (*) Funzioni C^1 e differenziabilità (*). Derivate direzionali e formula del gradiente (*). Direzione di massima crescita di una funzione scalare.
- Derivata lungo una curva.
- Derivate seconde, matrice Hessiana e teorema di Schwarz. Condizioni del secondo ordine necessarie (*) e sufficienti per punti di massimo e di minimo. Punti di sella.
- Domini semplici e teorema di riduzione.
- Trasformazioni regolari di coordinate (in $\mathbb{R}^2$) e formula per il cambio di variabile.