Matematica con esercitazioni, Modulo 2.
Analisi matematica. Diario delle lezioni.

Laurea triennale Chimica e tecnologie per l'ambiente e per i materiali. Rimini

Avvertenza per gli studenti: il libro di testo di referimento è M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica 1. Zanichelli. 2 edizione, 2004.

Diario delle lezioni

Lezione 1 – (5/10/15)

Richiami sugli insiemi, operazioni di unione, intersezione e differenza. Gli insiemi numerici dell'analisi: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Richiami sulla relazione di $\leq$. (1)

Lezione 2 – (6/10/15)

Disequazioni di secondo grado. Prodotto cartesiano. Il concetto di funzione. (3)

Lezione 3 – (9/10/15)

Le prime funzioni elementari: funzioni affini, funzioni potenza. Funzioni pari, dispari. Funzioni monotone crescenti e decrescenti. (5)

Lezione 4 – (12/10/15)

Funzione esponenziale e sue proprietà (base e e base $a > 0$, $a \neq 1$). Funzione logaritmo e sue proprietà. Disequazioni con esponenziale e logaritmo. (7)

Lezione 5 – (13/10/15)

Funzioni iniettive, suriettive, funzione inversa. Esempi. Funzione inversa dell' esponenziale e della funzione x^2. Monotonia dell'inversa di una funzione strettamente monotona. (9)

Lezione 6 – (16/10/14)

Confronto tra il grafico di f e di f^{-1}. Angoli, misure in radianti, cerchio goniometrico e funzioni seno e coseno. Loro proprietà elementari di periodicità e simmetria. (11)

Esercizi per casa

- Verificare che la funzione seno iperbolico $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

è iniettiva, suriettiva e trovarne l'inversa. [Suggerimento: porre $z = e^x$ e usare le proprietà dell'esponenziale]

- Calcolare le funzioni seno e coseno in tutti i seguenti punti: $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{3}\pi$, $\frac{10}{3}\pi$, $-\frac{2}{3}\pi$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{14}{3}\pi$.

Lezione 7 – (19/10/14) (13)

La funzione tangente e le sue proprietà. Funzioni composte. Successioni numeriche e definizione di limite.

Lezione 8 – (23/10/14) (15)

Limiti di prodotti, somme, quozienti e prima descrizione delle forme indeterminate. Teorema di unicità del limite (*), del confronto (*) e della permanenza del segno (*).

Esercizi per casa

- Dire quanto valgono
$$\tan(\pi/4), \quad \tan(\pi/3), \quad ,\tan(4/3\pi), \quad \tan(-\pi/4), \quad \tan(\pi)$$
- Data $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \sum_{k=0}^{n} e^{-k^2}$, verificare, usando la definizione, che f è crescente su $\mathbb{N}$.
- Verificare che la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = \frac{n}{n+1}$ è monotona.
- Sono date $f : A \to B$ e $g : B \to C$ funzioni strettemente crescenti. Verificare che $g \circ f$ è strettamente crescente.
- Verificare che se $f : A \to \mathbb{R}$ è crescente, allora la funzione $g := -f$ è decrescente.
- Siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ de funzioni. Verificare che f crescente strett e g crescente strett $\Rightarrow f + g$ crescente strettamente. È vero il viceversa dell'implicazione?
- Sono date le funzioni
$$u_1(x) = 2^{1+x} \quad u_2(x) = \tan(\log(x)) \quad u_3(x) = \cos(\log^2(x^2)),$$
dove abbiamo usato la notazione $\log^2(z) = (\log(z))^2$. Scrivere le funzioni indicate come composizioni di funzioni elementari.
- Dire quali sono i punti di accumulazione degli insiemi $A_1 =]1, 3[\setminus \{2\}$ e $A_2 =]0, 3] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})$. Se
- Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $\mathrm{acc}(A)$ l'insieme dei suoi punti di accumulazione. Se $B \subset A$, esiste qualche relazione tra $\mathrm{acc}(A)$ e $\mathrm{acc}(B)$?
- SIa $A \subset \mathbb{N}$. Cercare di descrivere l'insieme dei punti di accumulazione di A

Lezione 9 – (27/10/14)

Definizione di limite di funzone. Definizione di funzione continua. Limiti da destra e da sinistra. Limiti singolari del tipo $L/0$.

Lezione 10 – (30/10/14)

Limiti notevoli. Esercizi sui limiti.

Esercizi per casa

Calcolare i limiti
$$\lim_{x\to 0-} \frac{x-1}{e^{x^2}-1}, \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{bx^2+x^3} \qquad \text{per ogni } b \in \mathbb{R};$$
$$\lim_{x\to+\infty} e^x + \sin(x) \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x - 2e^{-x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp(x^2+\sin(x))$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x\cos x}\qquad \lim_{x\to -2-}\frac{\log(x+3)}{(x+2)^2\cos(x+2)}\qquad \lim_{x\to 1-}\frac{\log(2-x)}{(x-1)\sin(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+bx)^{1/x}\quad \text{per ogni } b\in\mathbb{R}.$$

Lezione 11. Lunedí 2 novembre

Derivate. Definizione e prime proprieta'. Derivate di funzioni elementari, somme prodotti e quozienti

Lezione 12. Martedí 3 novembre

Continuit'a delel funzioni derivabili. Derivate di funzioni composte. FUnzione arctan e la suaderivata

Lezione 13. Venerdí 6 novembre

Esercizi su derivate. Definizione di punto di massimo/minimo. Teoremi di Fermat, Weierstrass, Rolle

Eserczi per casa

(1) Verificare la formula per la derivata della funzione inversa seguente: se $f:]a_1,a_2[\ \to\ ]b_1,b_2[$ soddisfa $f'(x)>0$ per ogni $x\in\ ]a_1,a_2[$ allora risulta

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}\qquad \forall x\in(b_1,b_2).$$

(2) Calcolare le derivate delle funzioni seguenti:

$$f(x)=x^2\ \sin x+2\cos x\qquad f(x)=x^2\ (\sin x+2\cos x)\qquad f(x)=(2x^3-x)\ (2x^3+x)$$

$$f(x)=(-x^2+x-1)\ e^x\qquad f(x)=4x\ \sqrt{x}-5x\ \sqrt[3]{x}\qquad f(x)=x\ \log x-x$$

$$f(x)=\frac{2x-1}{2x^3}\qquad f(x)=\frac{1}{3\log x}\qquad f(x)=\frac{4}{x^2}-\frac{x^2}{4}$$

$$f(x)=\frac{x+a^x}{x-a^x},\quad a>0\qquad f(x)=\frac{x\log x}{\sqrt{x}}\qquad f(x)=\frac{1}{\sin x\ \cos x}$$

$$f(x)=4\sin(2x)-3\cos(3x+1)\qquad f(x)=\log(x^2-5x+4)\qquad f(x)=\sqrt{x^2-5x+4}$$

$$f(x)=e^{x^2-5x+4}\qquad f(x)=\sin^3 x+\sin(x^3)\qquad f(x)=\tan(1+x+3x^2)$$

$$f(x)=x^4\,(2x^2-5)^3\qquad f(x)=(\log x)^2+3\log x+2\qquad f(x)=x\,2^{-x^2}$$

$$f(x)=\log\log x\qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\qquad f(x)=\sqrt{\frac{4x^2+3}{2x-1}}$$

$$f(x)=\sqrt{\log(x^2+1)}\qquad f(x)=\left(\frac{a}{a-x}\right)^2,\quad a>0\qquad f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\quad \lambda>0$$

$$f(x)=x^{r-1}\,e^{-x},\quad r>0\qquad f(x)=x^{a-1}\,(1-x)^{b-1},\quad a,b>0\qquad f(x)=\frac{1}{1+\exp(-x)},$$

(3) Scrivere l'equazione della retta tangente al grefico della funzione $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ nel punto $P = (1, f(1))$ e nel punto $Q = (-2, f(-2))$.

Lezione 14 - 9 novembre 2015

Caratterizzazione delle funzioni monotone con la derivata. Punti di massimo, minimo. Esercizi.

Lezione 15 - 10 novembre 2015

Regola di de l'Hopital. Esercizi sul calcolo dei limiti

Lezione 16 - 13 novembre 2015

Esercizi di riepilogo sul calcolo differenziale in una variabile.

Lezione 17 - 16 novembre 2015

Introduzione alle somme di Riemann e agli integrali. Nozione di primitiva.

Lezione 18 - 17 novembre 2015

Funzioni integrali. Teorema fondamentale del calcolo e formula di Torricelli.

Lezione 19 - 20 novembre 2015

Integrali di derivate di funzioni composte. Esercizi.

Esercizi

Calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^1 x^2 e^{x^3+1}dx, \quad \int_0^1 x^2(\sqrt{1+x^3}-1)dx$$
$$\int_0^{\pi/4}(x^2+\tan^2 x)dx \qquad \int_2^3 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx \int_a^b x\cos(1+x^2)dx, \qquad \int_2^3 \frac{dx}{x(\log x)^2} \qquad \int_1^2 \frac{x+1}{x}dx$$
$$\int_1^2 x(x+1)^{-4}dx, \qquad \int_2^3 \frac{3x}{1+x^2} \quad \text{e} \quad \int_0^{\pi/2}(1+\sin^2 x)\cos x dx.$$

Lezione 20 – 23 novembre 2015

Integrazione per parti e formula del cambio di variabile negli integrali.

Lezione 21 – 24 novembre 2015

Introduzione ai numeri complessi. Operazioni di somma e prodotto di numeri complessi. Il piano di Gauss.

Lezione 22 – 27 novembre 2015

Numeri complessi (segue). Equazioni di secondo grado. Rappresentazione trigonometrica.

Lezione 23 – 30 novembre 2015

Prodotto e quoziente in forma trigonometrica. Formule di De Moivre, radici n-esime di un numero complesso.

Lezione 24 – 1 dicembre 2015

Intro a equazioni differenziali ordinarie. Equazioni a variabili separabili

Lezione 25 – 4 dicembre 2015

Ancora equazioni a variabili separabili. Equazioni lineari del primo ordine.

Esercizi

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{aligned}
&y' = y^2 t \quad y(0) = 0\\
&y' = y^2 t \quad y(1) = 1\\
&y' = (y+1)^2 t \quad y(0) = 1\\
&y' = 2ty + t^3 \quad y(0) = 2\\
&y' = y(2-y) \quad y(0) = 1\\
&yy' = t + ty^2 \quad y(0) = 1\\
&y' + y = e^t \quad y(0) = 1\\
&y' = te^y \quad y(1) = 1
\end{aligned}$$

Lezione 26 – 11 dicembre 2015

Equazioni del secondo ordine del tipo $ay'' + by' + cy = 0$ e il relativo problema di Cauchy.

Esercizi

- Risolvere i problemi di Cauchy

$$\begin{gathered}
y'' + 4y = 0 \quad \text{con } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.\\
9y'' - 6y' + y = 0 \quad \text{con } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.\\
y'' + 6y' + 25y = 0 \quad \text{con } y(-1) = 0 \text{ e } y'(-1) = 1.\\
y'' - 2y' - 3y = 0, \quad \text{con } y(1) = y_0 \text{ e } y'(1) = v_0.\\
y'' = y - y', \quad \text{con } y(0) = -1 \text{ e } y'(0) = 1.
\end{gathered}$$

- Esiste una funzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfi $y''(t) = 2y'(t) - y(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per la quale valgano le condizioni $y(0) = y''(0) = 0$ e $y'(0) = 1$?
- Verificare, ricordando le proprietà elementari di seno e coseno (formula di addizione $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$), che dati A, B reali, esiste $\theta \in R$ tale che

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\,\sin(x+\theta) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

  Trovare C e θ tali che

$$\sqrt{3}\cos(2t) + \sin(2t) = C\sin(2t+\theta)$$

  per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Lezione 27 – 14 dicembre 2015

Prodotto scalare, norma e loro prime proprietà.

Lezione 28 – 15 dicembre 2015

Fine discussione su prodotto scalare e norma. Funzioni di piu' variabili. Funzioni continue. Insiemi aperti.

Lezione 29 – 18 dicembre 2015

Definizione di derivata parziale, gradiente per funzioni regolari. Esercizi sul calcolo di derivate e gradiente.

Esercizi per casa.

Calcolare le derivate parziali delle seguenti funzioni:

$$f(x,y) = xy^2 + \log(xy), \quad f(x,y) = xe^{-x}, \quad f(x,y) = \sin(x^2+y^2),$$
$$f(x,y) = x^2 + xe^{xy}, \quad f(x,y) = \arctan(x^2+y), \quad f(x,y) = e^{x/y},$$
$$f(x,y,z) = \sqrt{1+xyz}, \quad f(x,y,z) = \log\Big(\frac{x}{1+y^2+z^2}\Big)$$
$$f(x) = f(x_1,\dots,x_n) = |x|^2 + \langle b, x\rangle \quad \text{con } b \in \mathbb{R}^n.$$

Lezione 30 – 11 gennaio 2016

Esempio di funzione con derivate parziali ma discontinua. Definizione di funzione differenziabile e di differenziale.

Lezione 31 – 12 gennaio 2016

Piano tangente al grafico di una funzione. Derivata direzionale. Definizione e formula del gradiente per la derivata direzionale di funzioni differenziabili.

Lezione 32 – 15 gennaio 2016

Direzioni di massima crescita per una funzione scalare di piú variabili. Curve e loro velocità. Derivata lungo una curva di una funzione scalare. Ortogonalità tra insiemi di livello di una funzione scalare e gradiente (cenni).

Esercizi di riepilogo

1. Individuare la direzione di massima crescita $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ per $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ in $(1,2)$.

2. Calcolare la velocità e l'accelerazione delle curve
$$r(t) = (t^2, t^3 + \log t)$$
$$r(t) = (te^{-t}, t+1, t^3)$$

3. Generalizzando la formula del gradiente al caso di dimensione piú alta, calcolare la derivata $\dfrac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})$ con :
$$f(x) = f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 e^{x_2 x_3^2}, \quad \bar{x} = (1,2,1)$$

4. Sia $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva derivabile due volte che si muove con velocità scalare 1: $|r'(t)| = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Derivando l'identità $|r'(t)|^2 = 1$ verificare che $r''(t) \perp r'(t)$.

5. E' data una funzione f delle variabili (x, y). Calcolare le derivate

$$\frac{\partial}{\partial u} f(u^2 v, v e^{uv}), \qquad \frac{\partial}{\partial v} f(u^2 v, v e^{uv})$$

6. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = \dfrac{2x + y}{x^2 + y^2}$ nel punto $(1, -2, f(1, -2))$.

Lista degli argomenti di teoria

Nota: l'asterisco accanto a un teorema significa che è stata svolta la dimostrazione (*)

- Definizione di funzione monotona.
- Costruzione/definizione e proprietà della funzione inversa
- Definizione di successione convergente/divergente.
- Teoremi sui limiti: unicità (*), permanenza del segno e due carabinieri (*).
- Limiti di funzioni. Funzioni continue.
- Definizione di derivata.
- Derivate di somme, prodotti (*), quozienti e funzioni composte.
- Punti di massimo/minimo
- Teorema di Fermat (*). Teorema di Weierstrass. Teorema di Rolle (*). Teorema di Lagrange (*).
- Teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti (*) e delle funzioni monotone derivabili (*).
- Regola di de l'Höpital (*).
- Introduzione alla nozione di integrale. Enunciato del teorema fondamentale del calcolo e Fromula di Torricelli.
- Prodotto scalare e sue proprietà. Norma e sue proprietà.
- Definizione di derivata parziale, gradiente per funzioni di due o piú variabili. Definizione di funzione differenziabile e di differenziale.
- Definizione di derivata direzionale. Formula del gradiente.
- Nozione di curva, vettore tangente e formula per la derivata lungo una curva.