Matematica con esercitazioni, Modulo 2.
Analisi matematica. Diario delle lezioni.

Laurea triennale Chimica e tecnologie per l'ambiente e per i materiali. Rimini

Avvertenza per gli studenti: il libro di testo di referimento è M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica 1. Zanichelli. 2 edizione, 2004.

Link a una presentazione della piattaforma Almamathematica per recupero argomenti di base: `http://www.dm.unibo.it/~morbidel/Almamathematica.ppt`

Diario delle lezioni

Lezione 1 – (3/10/16)

Richiamo sugli insiemi. Unione, intersezione differenza. Insiemi di numeri (naturali, interi, (1)
razionali e reali) con qualche proprietà. La relazione di $\leq$ su $\mathbb{R}$. La retta reale.

Lezione 2 – (4/10/16)

Disequazioni di primo e secondo grado. Proprietà delle potenze. Disequazioni con il valore (3)
assoluto. Prodotto cartesiano.

Esercizi

Risolvere le disequazioni

$$|2x-1| > 1+x, \quad x^2+2x > x+2, \quad (|x|+1)^2 < 4, \quad \frac{x+1}{x-3} < 0$$

Elencare tutti gli elementi dell'insieme $A \times B$ con $A = \{1,3\}$ e $B = \{-\pi, 0, 4\}$. Rappresentare nel piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gli insiemi

$$[1,2] \times]3,4[\subset \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad ([1,3] \setminus \{2\}) \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2.$$

Lezione 3 – (7/10/16)

Grafici delle funzioni valore assoluto, le funzioni affini, le funzioni potenze di esponente 2 e 3. Funzioni pari e dispari. Confronto tra i grafici delle funzioni $f(x)$, $f(x)+k$, $-f(x)$, $f(-x)$ e $f(x+k)$.

Esercizi

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione dispari. Dire se la funzione prodotto $h = fg$, definita come $h(x) = f(x)g(x)$ e la funzione $\ell = g^2$, definita come $\ell(x) = g(x)^2$ sono pari o dispari.

Tracciare, seguendo i procedimenti discussi in classe, i grafici delle funzioni

$$f(x) = (x+2)^2, \quad -x^2+1, \quad -x^3, \quad 1-x^2, \quad 1+|x+1|$$

Lezione 4 – (10/10/16)

Funzioni monotone, funzioni iniettive, suriettive e biunivoche. Funzione inversa di una funzione biunivoca $f : A \to B$.

Lezione 5 – (11/10/16)

Funzione esponenziale, funzione logaritmo in base e e in base qualsiasi a.

Esercizi

Risolvere le disequazioni

$$\log(2x) < 2\log(x-1), \quad ,\log((x-1)(1+x^4+x^6)) < \log(1+x^4+x^6), \quad \log_{10} x < \log_e(x)$$

$$e^{x^3-1} < 2, \quad 10^x < 2^x \cdot e^{x+1},$$

Verificare (usando solo la definizione!!!) che la funzione

$$f(x) = x^2 - x$$

è crescente su $[\frac{1}{2}, +\infty[$. Verificare esplicitamente che, se $a < \frac{1}{2}$, la funzione NON è crescente (e nemmeno decrescente) su nessun intervallo $[a, +\infty[$.

Lezione 6 (17/10/16

Funziomi circolari seno, coseno, tangente, con alcune loro proprietà e i loro grafici. Defiinizione di funzione composta $g \circ f$.

Esercizi

Dire quali sono i valori di $\sin x$, $\cos x$ e $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$ per i seguenti x

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad -\frac{3}{4}\pi, \quad 3\pi, \quad \frac{7}{6}\pi, \quad \frac{8}{3}\pi, \quad -\frac{5}{4}\pi, \quad -\frac{2}{3}\pi$$

Lezione 7 (18/10/16

Successioni numeriche. Limiti di successioni.

Lezione 8 (21/10/16)

Teoremi sui limiti (unicità ($*$), permanenza del segno ($*$) e confronto ($*$)). Limiti e operazioni algebriche (somme, prodotti, quozienti)

Esercizi

Scrivere le seguenti funzioni come funzioni composte $g \circ f$ oppure $h \circ g \circ f$:

$$u_1(x) = \cos(e^x), \quad u_2(x) = e^{4x}, \quad u_3(x) = \log^3(x^2), \quad u_4(x) = \sin^2(e^{x^3})$$

Calcolare i limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{1+n-2n^2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1+n^{3/2}-n^3}{2-n+2n^2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{bn^2+1+\sqrt{n}}{1+n},$$

al variare di $b \in \mathbb{R}$.

Lezione 9 (24/10/16)

Punti di accumulazione. Limiti di funzioni. Funzioni continue.

Lezione 10 (25/10/16) – 1 ora

Limiti notevoli ed esercizi sui limiti notevoli.

Esercizi

Calcolare quando possibile (altrimenti fare i dovuti commenti) i limiti:

$$\lim_{x\to1-} \frac{1}{(x-1)^3} \qquad \lim_{x\to2-} \frac{\log(x^{-1})}{x-2} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \tan x \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \tan x$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin(1/x) \qquad \lim_{x\to0} \log(\sin^2(x)) \qquad \lim_{x\to0+} \sqrt{x}\sin\Big(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\Big)$$

$$\lim_{x\to2-} \frac{e^{x^2-4x}-e^{-4}}{(x-2)^3} \qquad \lim_{x\to0-} \log(x) \qquad \lim_{x\to0-} \frac{1}{bx^2+x^3} \quad \text{per ogni } b \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to0-} \frac{1}{e^x-1} \qquad \lim_{x\to-1-} \frac{1}{e^x-e^{-1}} \qquad \lim_{x\to0+} \frac{e^{x^2}}{\sin(x)} \qquad \lim_{x\to+\infty} \cos(x)$$

$$\lim_{x\to0-} \frac{x-1}{e^{x^2}-1} \qquad \lim_{x\to1-} \frac{\log(2+x)}{(x-1)\sin(x-1)} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x+\sin(x) \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x-2e^{-x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp(x^2+\sin(x))$$

Lezione 11 (28/10/16)

Nozione di derivata. Derivate di funzioni elementari (potenze, esponenziale logaritmo...). Continuità delle funzioni derivabili ($*$). Retta tangente al grafico di una funzione.

Esercizi

Data la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin(x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è continua e per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ è derivabile in $x = 0$.

Lezione 12 (11/11/2016)

Derivate di somme, prodotti ($*$), quozienti e funzioni composte.

Esercizi

Calcolare le derivate a pag. 25 delle dispense in rete.

Lezione 13 (14/11/2016)

Punti di massimo, teoremi di Fermat ($*$), Rolle ($*$) e Lagrange ($*$). Caratterizzazione funzioni costanti ($*$).

Lezione 14 (15/11/2016)

Caratterizzazione delle funzioni monotone derivabili ($*$). Esercizi.

Esercizi

Seguendo il procedimsnto seguito in classe per lo studio della funzione $\mathrm{ch}(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$, discutere le proprietà e tracciare il grafico della funzione seno iperbolico $\mathrm{sh}(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Verificare poi l'identità

$$\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni, dire in quali intervalli ciascuna di esse è crescente o decrescente e individuarne i punti di massimo o di minimo locale.

$$f(x) = \sqrt{1+x^4}, \quad f(x) = e^x - x, \quad f(x) = x^2 e^x$$
$$f(x) = e^{2x} + e^{-x}, \qquad \text{(per } x > 0,\text{)}$$
$$f(x) = xe^{-x^2}, \quad f(x) = \frac{1+2x}{2+3x}, \quad f(x) = (x-3)\sqrt{x}, \quad f(x) = \frac{x}{x^2+1}$$

Lezione 15 (18/11/2016) – 3 ore

Formula per la derivata della funzione inversa ($*$), le funzioni arctan e arcsin.

La regola di De l'Hopital. Esercizi.

Derivabilità e approssimazione di Taylor del primo ordine.

Lezione 16 (21/11/2016)

Formula di Taylor di ordine 1 e 2 per funzioni di una variabile con resto "o piccolo" ($*$). Condizioni sufficienti per punti di minimo/massimo locale ($*$).

Esercizi

Scrivere il polinomio di Taylor di ordine 2 per le funzioni

$$f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad \text{punto iniziale } x_0 = 1$$
$$f(x) = \cos x \quad \text{punto iniziale } x_0 = 0 \text{ e } x_0 = \pi/2$$
$$f(x) = xe^x \quad \text{punto iniziale } x_0 = -1$$

Lezione 17 (25/11/2016) – 3 ore

Funzioni convesse derivabili (definizione). Caratterizzazione delle funzioni convesse derivabili attraverso monotonia della derivata prima ($*$). Caratterizzazione funzioni convesse derivabili due volte ($*$).

Cenni sulla contruzione dell'integrale con somme superiori e inferiori.

Esercizi

Date le funzioni

$$f(x) = (x^2-1)^2 \qquad \text{e} \qquad g(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

studiarne intervalli di crescita decrescita, massimi, minimi, intervalli di concavità e convessità. Tracciare infine un grafico di tali funzioni.

Lezione 18 (28/11/2016)

Primitive, caratterizazione delle primitive di una funzione ($*$). Funzioni integrali. Teorema fondamentele dal calcolo sulla derivata delle funzioi integrali ($*$). Formula per il calcolo degli integrali definitimediante primitive ($*$).

Lezione 19 (29/11/2016)

Tabella di primitive per funzioni elementari. Primitive di funzioni derivate di funzioni composte (del tipo $(f \circ g)(x) g'(x)$). Esercizi.

Esercizi

Calcolare, come fatto in classe, utilizzando la formula $(f \circ g)(x) g'(x) = \frac{d}{dx} f \circ g(x)$ con f e g opportune i seguenti intgrali

$$\int_a^b (1-2x)^n dx \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin x}{1+\cos x} dx \qquad \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx$$
$$\int_1^2 x^2 e^{x^3} dx \qquad \int_2^3 \frac{dx}{x \log x}, \qquad \int_2^3 \frac{1+\log x}{x} dx \qquad \int_a^b \sqrt{x} \sin(1+x^{3/2}) dx$$

Verificare, calcolandone entrambi i membri, l'uguaglianza

$$\lim_{\lambda \to -1} \int_a^b x^\lambda dx = \int_a^b \frac{dx}{x} \qquad \forall\, a, b > 0$$

Usando le formule per le derivte dellel funzioni circolari inverse viste in classe calcolare

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{11-x^2}}, \qquad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \int_z^b \frac{x}{1+x^4} dx$$

Lezione 20 (1/12/2016) – 3 ore)

Integrazione per parti ($*$). Derivate di funzioni del tipo $\int_c^{g(x)} f$. Formula del cambio di variabile ($*$).

Esercizi

Calcolare

$$\int \cos^2 x dx, \qquad \int_0^2 x^2 2^x dx, \qquad \int_1^2 x \log^2(x) dx \qquad \int_2^3 x \log(x+1) dx$$
$$\int (x+x^3) e^{-x^2} dx, \qquad \int_1^3 \frac{e^x}{1+e^x} dx, \qquad \int (x+1) e^{\sqrt{x}} dx, \qquad \int x(\cos x + \cos(x^2)) dx$$

Verificata l'identità $\mathrm{ch}^2(t) = 1 + \mathrm{sh}^2\, t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, calcolare

$$\int \sqrt{1+x^2} dx$$

Lezione 21 (5/12/2016)

Integrali di funzioni razionali con denominatore di grado 1 e 2 (riferimento: libro di testo). Introduzione al problema delle equazioni differenziali ordinarie.

Esercizi

Calcolare gli integrali

$$\int_1^2 \frac{2x^3}{x+1}dx, \qquad \int_0^1 \frac{1+2x}{4-x^2}, \qquad \int \frac{x^3+1}{x^2-x-2}dx, \qquad \int \frac{x^2-x}{4-2x-x^2}$$

$$\int \frac{1-x^3}{(2x+1)^2}dx, \qquad \int \frac{x^2+x}{x^2+2x+10}dx, \qquad \int x \arctan x \, dx$$

Lezione 22 (12/12/2016)

Equazioni differenziali ordinarie a variabili separabili. Esercizi.

Lezione 23 (13/12/2-16)

Equazioni del primo ordine lineari con esercizi. Introduzione alle eq. ordinarie del secondo ordine.

Esercizi

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{aligned}
&y' = y^2 t \quad y(0) = 0\\
&y' = y^2 t \quad y(1) = 1\\
&y' = (y+1)^2 t \quad y(0) = 1\\
&y' = 2ty + t^3 \quad y(0) = 2\\
&y' = y(2-y) \quad y(0) = 1\\
&yy' = t + ty^2 \quad y(0) = 1\\
&y' + y = e^t \quad y(0) = 1\\
&y' = te^y \quad y(1) = 1
\end{aligned}$$

Lezione 24 (16/12/2016) – 3 ore

Equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti.

Esercizi

- Risolvere i problemi di Cauchy

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{con } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.$$
$$9y'' - 6y' + y = 0 \quad \text{con } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.$$
$$y'' + 6y' + 25y = 0 \quad \text{con } y(-1) = 0 \text{ e } y'(-1) = 1.$$
$$y'' - 2y' - 3y = 0, \quad \text{con } y(1) = y_0 \text{ e } y'(1) = v_0.$$
$$y'' = y - y', \quad \text{con } y(0) = -1 \text{ e } y'(0) = 1.$$

- Esiste una funzione $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfi $y''(t) = 2y'(t) - y(t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e per la quale valgano le condizioni $y(0) = y''(0) = 0$ e $y'(0) = 1$?
- Verificare, ricordando le proprietà elementari di seno e coseno (formula di addizione $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$), che dati A, B reali, esiste $\theta \in R$ tale che

$$A\cos x + B\sin x = \sqrt{A^2 + B^2}\ \sin(x + \theta) \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Trovare C e θ tali che

$$\sqrt{3}\cos(2t) + \sin(2t) = C\sin(2t + \theta)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Lezione 25 (19/12/2016)

Richiami su prodotto scalare euclideo, norma, distanza, insiemi aperti. Introduzione alle funzioni di piú variabili. Grafici e insiemi di livello

Lezione 26 (20/12/2016)

Funzioni continue (cenni). Derivate parziali, gradiente.

Esercizi

Calcolare le derivate parziali delle funzioni

$$f(x,y) = xy^2 + \log(xy), \quad f(x,y) = xe^{-x}, \quad f(x,y) = \sin(x^2 + y^2),$$
$$f(x,y) = x^2 + xe^{xy}, \quad f(x,y) = \arctan(x^2 + y), \quad f(x,y) = e^{x/y},$$
$$f(x,y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2},$$
$$f(x,y,z) = \sqrt{1 + xyz}, \quad f(x,y,z) = \log\Big(\frac{x}{1 + y^2 + z^2}\Big)$$

Calcolare il gradiente della funzione $\nabla f(x,y)$ delle funzioni

$$f(x,y) = x^2 + xy, \qquad f(x,y) = xe^{-x^2+y^2}$$

e dire in quali punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vale $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

Calcolare i gradienti $\nabla f(x,y)$ e $\nabla g(x,y)$ delle funzioni

$$f(x,y) = x + y \qquad g(x,y) = e^{xy}.$$

Per quali scelte di (x,y) tali vettori sono paralleli? Per quali scelte sono invece perpendicolari?

Lezione 27 (9/01/2017)

Funzioni differenziabili, differenziale, piano tangente. Differenziabilità e continuità. Differenziabilità delle funzioni "elementari". Derivate direzionali

Lezione 28 (10/01/2017)

Derivate direzionali e loro calcolo con la formula del gradiente. Curve, velocità di una curva.

Esercizi

1. Individuare la direzione di massima crescita $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ per $f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ in $(1,2)$.

2. Calcolare la velocità e l'accelerazione delle curve
$$r(t) = (t^2, t^3 + \log t)$$
$$r(t) = (te^{-t}, t+1, t^3)$$

3. Generalizzando la formula del gradiente al caso di dimensione piú alta, calcolare la derivata $\frac{\partial f}{\partial v}(\bar{x})$ con :
$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 e^{x_2 x_3^2}, \quad \bar{x} = (1,2,1)$$

4. Sia $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una curva derivabile due volte che si muove con velocità scalare 1: $|r'(t)| = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Derivando l'identità $|r'(t)|^2 = 1$ verificare che $r''(t) \perp r'(t)$.

5. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = \dfrac{2x+y}{x^2+y^2}$ nel punto $(1, -2, f(1,-2))$.

Lezione 29 (16/01/2017)

Derivata e accelerazione di una curva. Formula per la derivata di una funzione scalare lungo una curva.

Lezione 30 (17/01/2017)

Integrale per funzioni di due variabili. Calcolo tramite formule di riduzione.

Esercizi

Svolgere gli esercizi a pagina 522 del libro di testo. Numeri 1,2,6,7,8,9

- Calcolare la misura dell'insieme
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 \quad \text{ed} \quad y < x\}.$$

- Sia $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y|^{1/2} \leq x \leq 1\}$. Calcolare
$$\int_A (x+y)\,dxdy.$$

Lezione 31 (20/01/2017)

Esercizi su integrali. Integrzione in coordinate polari.

Lista degli argomenti di teoria

Nota: l'asterisco accanto a un teorema significa che è stata svolta la dimostrazione (*)
- Definizione di funzione monotona.
- Costruzione/definizione e proprietà della funzione inversa
- Definizione di successione convergente/divergente.
- Teoremi sui limiti: unicità (*), permanenza del segno e due carabinieri (*).
- Limiti di funzioni. Funzioni continue.

- Definizione di derivata.
- Derivate di somme, prodotti (*), quozienti e funzioni composte.
- Punti di massimo/minimo
- Teorema di Fermat (*). Teorema di Weierstrass. Teorema di Rolle (*). Teorema di Lagrange (*).
- Teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti (*) e delle funzioni monotone derivabili (*).
- Definizione di funzione convessa/concava derivabiile. Caratterizzazione attraverso monotonia della derivata prima ($*$) e segno della derivata seconda ($*$).
- Introduzione alla nozione di integrale. Enunciato del teorema fondamentale del calcolo e Fromula di Torricelli.
- Definizione di derivata parziale, gradiente per funzioni di due o piú variabili. Definizione di funzione differenziabile e di differenziale. Definizione di piano tangente al grafico di una funzione.
- Definizione di derivata direzionale. Formula del gradiente ($*$). Direzione di massima crescita per una funzione di due variabili.
- Nozione di curva, vettore tangente e formula per la derivata lungo una curva.

MODELLO DI ESERCIZI DA PROVA SCRITTA 1

1. Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\sin(x^2 - x)}{(x+2)\log(x+1)} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \log(x\sqrt{1+x} - \sqrt{x})$$

2. Calcolare gli integrali

$$\int_1^2 \sqrt{5-2x}\,dx \quad \text{e} \qquad \int_0^{\pi} x \sin x dx.$$

3. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = xe^{-x^2}$$

   e scrivere l'equazione della retta tangente a tale grafico nel punto $(-1, f(-1))$.

4. Risolvere il problema di Cauchy

$$y'' + 4y = 0 \qquad \text{con} \quad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = 1.$$

5. Data la funzione $f(x,y) = y\sqrt{1+xy}$, calcolare la derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial v}(1,2) \quad \text{con} \quad v = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}).$$

6. Esercizio su integrali multipli

MODELLO DI ESERCIZI DA PROVA SCRITTA 2

1. Calcolare i limiti
$$\lim_{x\to 2+} \frac{\sqrt{x+2}-1-\log(x)}{x^2-2x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sqrt{x}}{1+e^{1+\log(x)}}$$

2. Sia $z > 0$ un parametro. Calcolare l'integrale
$$I(z) = \int_0^z xe^{-x}dx.$$
Dire poi quanto vale $\lim_{z\to+\infty} I(z)$.

3. Data la funzione
$$f(x) = \frac{x-1}{1+x^2},$$
stabilire in quali intervalli f è crescente/decrescente, calcolare i limiti a $\pm\infty$ e tracciare il grafico di f.

4. Risolvere il problema di Cauchy
$$ty' = 1-y \qquad y(1) = -1$$

5. Esercizio su funzioni di piú variabili

6. Integrale doppio

MODELLO DI ESERCIZI DA PROVA SCRITTA 3

1. Calcolare i limiti
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}+e^{-x^2}}{xe^x}\qquad \text{e}\qquad \lim_{x\to0-}\frac{x\cos x-\sin^2 x-x}{x^2}$$
2. Calcolare l'integrale
$$\int_1^2\left\{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{x^2}{1+x^2}\right\}dx$$
3. Stabilire il dominio della funzione
$$f(x)=x\sqrt{1+x}.$$
Stabilire in quali intervalli f è crescente/decrescente, calcolare i limiti agli estremi del dominio e tracciare il grafico di f.
4. Risolvere i problemi di Cauchy
$$\begin{cases} y''-2y'+10y=0\\ y(0)=1\\ y'(0)=0\end{cases}\qquad \text{e}\qquad \begin{cases} y'+y=1\\ y(0)=2\end{cases}$$
5. Esercizio su piú variabili
6. Esercizio su integrale doppio