Matematica con esercitazioni, Modulo 2.
Analisi matematica. Diario delle lezioni.

Laurea triennale Chimica e tecnologie per l'ambiente e per i materiali. Rimini

Avvertenza per gli studenti: il libro di testo di referimento è M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica 1. Zanichelli. 2 edizione, 2004.

Link alla piattaforma Almamathematica per recupero argomenti di base: `https://almaorienta.unibo.it/AlmaMathematica`

Diario delle lezioni

Lezione 1-2-3 – (9,10 e 13 ottobre 2017)

Grafici delle funzioni valore assoluto, le funzioni affini, le funzioni potenze di esponente 2 e 3. Funzioni pari e dispari. Confronto tra i grafici delle funzioni $f(x), f(x)+k, -f(x), f(-x)$ e $f(x+k)$. Funzioni monotone, funzioni iniettive, suriettive e biunivoche. Funzione inversa di una funzione biunivoca $f : A \to B$. Funzione esponenziale, funzione logaritmo in base e e in base qualsiasi a.

Esercizi

- Risolvere le disequazioni

$$|2x-1| > 1+x, \quad x^2+2x > x+2, \quad (|x|+1)^2 < 4, \quad \frac{x+1}{x-3} < 0$$

- Elencare tutti gli elementi dell'insieme $A \times B$ con $A = \{1,3\}$ e $B = \{-\pi, 0, 4\}$. Rappresentare nel piano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gli insiemi

$$[1,2] \times]3,4[\subset \mathbb{R}^2 \quad \text{e} \quad ([1,3] \setminus \{2\}) \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2.$$

- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione pari e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione dispari. Dire se la funzione prodotto $h = fg$, definita come $h(x) = f(x)g(x)$ e la funzione $\ell = g^2$, definita come $\ell(x) = g(x)^2$ sono pari o dispari.
- Tracciare, seguendo i procedimenti discussi in classe, i grafici delle funzioni

$$f(x) = (x+2)^2, \quad -x^2+1, \quad -x^3, \quad 1-x^2, \quad 1+|x+1|$$

- Risolvere le disequazioni

$$\log(2x) < 2\log(x-1), \quad , \log((x-1)(1+x^4+x^6)) < \log(1+x^4+x^6), \quad \log_{10} x < \log_e(x)$$

$$e^{x^3-1} < 2, \quad 10^x < 2^x \cdot e^{x+1},$$

Verificare (usando solo la definizione!!!) che la funzione

$$f(x) = x^2 - x$$

è crescente su $[\frac{1}{2}, +\infty[$. Verificare esplicitamente che, se $a < \frac{1}{2}$, la funzione NON è crescente (e nemmeno decrescente) su nessun intervallo $[a, +\infty[$.

- Dire quali sono i valori di $\sin x$, $\cos x$ e $\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$ per i seguenti x

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad -\frac{3}{4}\pi, \quad 3\pi, \quad \frac{7}{6}\pi, \quad \frac{8}{3}\pi, \quad -\frac{5}{4}\pi, \quad -\frac{2}{3}\pi$$

Lezioni 16,17,20,23,24 ottobre

Successioni, limiti di successioni, Teoremi sui limiti (unicità $(*)$, permanenza del segno $(*)$ e confronto $(*)$). Limiti e operazioni algebriche (somme, prodotti, quozienti). Punti di accumulazione. Limiti di funzioni. Funzioni continue. Limiti notevoli ed esercizi sui limiti notevoli. Nozione di derivata. Derivate di funzioni elementari (potenze, esponenziale logaritmo...).

Esercizi

Scrivere le seguenti funzioni come funzioni composte $g \circ f$ oppure $h \circ g \circ f$:

$$u_1(x) = \cos(e^x), \quad u_2(x) = e^{4x}, \quad u_3(x) = \log^3(x^2), \quad u_4(x) = \sin^2(e^{x^3})$$

Calcolare i limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{1+n-2n^2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1+n^{3/2}-n^3}{2-n+2n^2}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{bn^2+1+\sqrt{n}}{1+n},$$

al variare di $b \in \mathbb{R}$.

Calcolare quando possibile (altrimenti fare i dovuti commenti) i limiti:

$$\lim_{x\to1-} \frac{1}{(x-1)^3} \qquad \lim_{x\to2-} \frac{\log(x^{-1})}{x-2} \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \tan x \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+} \tan x$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin(1/x) \qquad \lim_{x\to0} \log(\sin^2(x)) \qquad \lim_{x\to0+} \sqrt{x}\sin\Big(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\Big)$$

$$\lim_{x\to2-} \frac{e^{x^2-4x}-e^{-4}}{(x-2)^3} \qquad \lim_{x\to0-} \log(x) \qquad \lim_{x\to0-} \frac{1}{bx^2+x^3} \qquad \text{per ogni } b \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to0-} \frac{1}{e^x-1} \qquad \lim_{x\to-1-} \frac{1}{e^x-e^{-1}} \qquad \lim_{x\to0+} \frac{e^{x^2}}{\sin(x)} \qquad \lim_{x\to+\infty} \cos(x)$$

$$\lim_{x\to0-} \frac{x-1}{e^{x^2}-1} \qquad \lim_{x\to1-} \frac{\log(2+x)}{(x-1)\sin(x-1)} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x+\sin(x) \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x-2e^{-x} \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp(x^2+\sin(x))$$

27 ottobre

Legame tra derivabilità contimnuità. Derivabilità e approssimazione lineare del primo ordine.

Esercizio

Verificare che

$x - \sin(x) = xo(1)$, per $x \to 0$.
$o(1) + o(x) = o(1)$, per $x \to 0$.
Per ogni $\alpha < 2$ vale $\cos(x) - 1 = o(|x|^\alpha)$, per $x \to 0$. (Usare formule di trigonometria e lavorare con $x/2$)

Dire per quali valori di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ è continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta(x^2+1) & \text{se } x \geq 0. \\ \log(1+\sin(2x)) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

30 ottobre (4 ore)

Derivabilità e approssimazione lineare (*). Derivate di prodotti fg $(*)$, di funzioni del tipo $\frac{1}{g}$ $(*)$, e di quozienti $\frac{f}{g}$ $(*)$. Esercizi. Derivate di funzioni composte $(*)$ con relativi esercizi (da completare la prossima lezione). Le funzioni iperboliche cosh, sinh con relative proprietà e grafici.

Esercizi

Svolgere gli esercizi 4.13 e 4.14 a pagina 25 delle dispense.

31 ottobre, 6,7 e 10 novembre

Il teorema di Fermat $(*)$ e i teoremi di valor medio di Rolle $(*)$ e Lagrange $(*)$. Caratterizzazione delle funzioni monotone derivabili $(*)$ e relativi esercizi. La fegola di de l'Hopital $(*)$ e relativi esercizi. Il polinomio di Taylor del secondo ordine e la relativa formula di Taylor del secondo ordine $(*)$.

Esercizi

Calcolare i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{xe^x - e^{x^2}}{e^{x\log x} - x} \qquad \lim_{x\to 0+} \frac{xe^{1/x} - x^2\cos x}{\sqrt{1+x} - 1} \qquad \lim_{x-\to-\infty} \frac{\log(1-x)}{\cos(1/x)\log(x^2+1)}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{(e^{x^2}-1)}{x\sin x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{e^x - 1}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{ax^2}, \quad \text{per ogni possibile } a \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x - x, \quad \lim_{x\to 0-} e^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0+} (1-2\cos x)e^{1/x}, \quad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{x-x^2}.$$

$$\lim_{x\to 0\pm} e^{1/x}, \qquad \lim_{x\to 2} \frac{e^{x^2-4x} - e^{-4}}{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8}, \qquad \lim_{x\to+\infty} xe^{1/x}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\log(e^x - e + 1)}{\sin(x-1)}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\log(1+e^x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 1+} \frac{x^2+1-3x^4}{e^x - e}.$$

Dire in queli intervalli sono crescenti (o decrescenti) le funzioni

$$f(x) = x + \sin x, \qquad f(x) = e^{1/x}, \quad x \neq 0;$$

$$f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, \; f(x) = x - \log(1+x);$$

Determinare il massimo e il minimo valore assunti dalle funzioni $f : [-1,3]$, $f(x) = x^3$ e $g : [-1,2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-x^2}$.

Data la funzione $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x(2-x)}$, dire quali sono i suoi punti di massimo o di minimo. Tracciare un grafico qualitativo di f.

13 novembre

Approssimazione di Taylor del secondo ordine. Esercizi. Teorema sulla condizione sufficiente del secondo ordine per punti di massimo/minimo (∗).

14 novembre

Somme superiori/inferiori e integrali. Primitive di una funzione. Caratterizzazione delle primitive di una funzione f su un intervallo (∗).

17 novembre

Teorema fondamentele del calcolo integrale (∗). Formula di Torricelli per il caocolo degli integrali definiti (∗).

Esercizi

1. Provare a svolgere gli esercizi 7.1, 7.2 e 7.3 della pagina 38 (saranno poi ripresi in classe e nel tutorato lunedí).
2. Utilizzando la formula $(f \circ g)(x)g'(x) = \frac{d}{dx} f \circ g(x)$ con f e g opportune i seguenti intgrali
$$\int_a^b (1-2x)^n dx \quad n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin x}{1+\cos x} dx \qquad \int_1^2 \frac{x}{x+1} dx$$
$$\int_1^2 x^2 e^{x^3} dx \qquad \int_2^3 \frac{dx}{x \log x}, \qquad \int_2^3 \frac{1+\log x}{x} dx \qquad \int_a^b \sqrt{x} \sin(1+x^{3/2}) dx$$
3. Calcolare i seguenti integrali
$$\int_0^1 x^2 e^{x^3+1} dx, \quad \int_0^1 x^2(\sqrt{1+x^3}-1) dx$$
$$\int_0^{\pi/4} (x^2 + \tan^2 x) dx \qquad \int_2^3 \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \int_a^b x\cos(1+x^2) dx, \qquad \int_2^3 \frac{dx}{x(\log x)^2} \qquad \int_1^2 \frac{x+1}{x} dx$$
$$\int_1^2 x(x+1)^{-4} dx, \qquad \int_2^3 \frac{3x}{1+x^2} \quad \text{e} \quad \int_0^{\pi/2} (1+\sin^2 x)\cos x dx.$$
4. Calcolare le derivate
$$\frac{d}{dx} \int_1^x [1+t^2]^{3/4} \sin(t) dt \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx} \int_x^2 e^{t^2} dt$$

20, 21 novembre

Integrali di derivate di funzioni composte. Formula di integrazione per parti (∗). Calcolo di derivate di funzioni del tipo $\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(t)dt$. Formula del cambio di variabile per gli integrali (∗).

Esercizi

Calcolare le derivate delle funzioni
$$H(x) = \int_{1-x}^2 (t+t^2)^{3/4} dt \qquad H(x) = \int_{x^2}^{-x} \log(1+t^2) dt,$$
Calcolare i limiti
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \int_0^{2x} \cos(\pi + t^2) dt \qquad \lim_{x\to 0-} \frac{1}{x^2} \int_x^0 \sin(|t|^{3/2}) dt$$

Calcolare gli integrali

$$\int_2^2 \frac{x+1}{x+2}dx \qquad \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx \qquad \int_0^{\pi^2} x\cos(\sqrt{\pi^2 - x}\,)dx \qquad \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx \qquad \int_2^3 \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx.$$

24 novembre

Introduzione al problema delle equazioni differenziali ordinarie. Risoluzione delle equazioni differenziali lineari del primo ordine $y' = a(t)y + b(t)$.

Esercizi

Risolvere le seguenti equazioni del primo ordine usando la formula imparate in classe

$$\begin{cases} y' + y = e^t \\ y(1) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = 2ty + t^3 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Dopo aver scritto le soluzioni usando la formula e calcolando tutti gli integrali coinvolti, verificare che le funzioni trovate risolvono davvero le rispettive equazioni e assumono il corretto valore al tempo t_0.

27-28 novembre

Eqazioni a variabili separabili. Equazioni del secondo ordine a coefficienti costanti.

Esercizi

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$y' = \sqrt{1+y}\sin t \quad y(0) = 1$$
$$y'\log y == \frac{\cos t}{y} \quad y(1) = 2$$

$$y' = y^2 t \quad y(0) = 0$$
$$y' = y^2 t \quad y(1) = 1$$
$$y' = (y+1)^2 t \quad y(0) = 1$$
$$y' = 2ty + t^3 \quad y(0) = 2$$
$$y' = y(2-y) \quad y(0) = 1$$
$$yy' = t + ty^2 \quad y(0) = 1$$
$$y' + y = e^t \quad y(0) = 1$$
$$y' = te^y \quad y(1) = 1$$

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{con } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.$$
$$9y'' - 6y' + y = 0 \quad \text{con } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.$$
$$y'' + 6y' + 25y = 0 \quad \text{con } y(-1) = 0 \text{ e } y'(-1) = 1.$$
$$y'' - 2y' - 3y = 0, \quad \text{con } y(1) = y_0 \text{ e } y'(1) = v_0.$$
$$y'' = y - y', \quad \text{con } y(0) = -1 \text{ e } y'(0) = 1.$$

1 dicembre

Introduzione alle funzioni di piú variabili. Grafici, insiemi di livello ed esempi relativi.

4 dicembre

Cenni alle funzioni continue. Derivate parziali. Differenziabilità/approssimazione di Taylor del primo ordine. Piano tangente al grafico di una funzione di due variabili.

Esercizi

Data la funzione $f(x,y) = \sqrt{1+2x^2y}$, scrivere il polinomio di Taylor del primo ordine di f con punto iniziale $(-2,1)$.

Calcolare le derivate parziali delle funzioni

$$f(x,y) = xy^2 + \log(xy), \quad f(x,y) = xe^{-x}, \quad f(x,y) = \sin(x^2+y^2),$$
$$f(x,y) = x^2 + xe^{xy}, \quad f(x,y) = \arctan(x^2+y), \quad f(x,y) = e^{x/y},$$
$$f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2},$$
$$f(x,y,z) = \sqrt{1+xyz}, \quad f(x,y,z) = \log\Big(\frac{x}{1+y^2+z^2}\Big)$$

Della funzione $f(x,y,z) = \sqrt{1+xyz}$ scrivere il polinomio di Taylor di grado uno e punto iniziale $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = (1,-1,2)$.

Calcolare il gradiente $\nabla f(x,y)$ delle funzioni

$$f(x,y) = x^2 + xy, \qquad f(x,y) = xe^{-x^2+y^2}$$

e dire in quali punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vale $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

Calcolare i gradienti $\nabla f(x,y)$ e $\nabla g(x,y)$ delle funzioni

$$f(x,y) = x+y \qquad g(x,y) = e^{xy}.$$

Per quali scelte di (x,y) tali vettori sono paralleli? Per quali scelte sono invece perpendicolari?

Calcolare le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)$ utilizzando la formula del gradiente vista in classe:

$$f(x,y) = \sqrt{1+x^2+xy} \qquad (\overline{x},\overline{y}) = (1,2) \qquad v = (\cos\theta, \sin\theta)$$
$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad (\overline{x},\overline{y}) = (-1,2) \qquad v = (\cos\theta,\sin\theta) \qquad \text{e } v = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$$

5, 11, 12 e 15 dicembre

- Direzione di massima crescita di una funzione differenziabile.
- Cammini parametrizzati, calcolo di velocità e accelerazione.
- Formula per la derivata $\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(t)$. di una funzione scalare $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lungo una curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.
- Introduzione al calcolo di un integrale doppio tramite la formula di riduzione. Calcolo del baricentro geometrico di un sottoinsieme $A \subset \mathbb{R}^2$.

Esercizi

- Individuare la direzione di massima crescita $v_{\max}$ per le funzioni $f_1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ nel punto $P = (1,-2)$ e $f_2(x,y) = \exp(x/y)$ in $P = (-3,1)$. Calcolare po per entrambe i valori della derivata $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$ corrispondenti.
- Calcolare la velocità e l'accelerazione delle curve

$$r(t) = (t^2, t^3 + \log t)$$
$$r(t) = (te^{-t}, t+1, t^3)$$

- Data una funzione qualsiasi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile, calcolare, usando la formula per la derivata lungo una curva, la derivata della funzione

$$h(t) = f(t^2, t^3)$$

- Facendo l'opportuna generalizzazione della formula appena usata, calcolare le derivate parziali della funzione composta $\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto f(uv, u^2+v^2)$

$$\frac{\partial}{\partial u} f(uv, u^2+v^2), \frac{\partial}{\partial v} f(uv, u^2+v^2)$$

- Considerati i numeri positivi b, u, v e suponendo che sia $b < v$, disegnare il triangolo A che ha vertici $(0,0)$, $(0,b)$ e (u,v). Calcolare poi il baricentro di tale triangolo

$$G = \Big(\frac{1}{\mathrm{Area}(T)} \int_T xdxdy, \frac{1}{\mathrm{Area}(T)} \int_T ydxdy\Big).$$

  (A verifica della correttezza del calcolo degli integrali, si può scrivere l'equazione di due mediane e calcolarne il punto d'intersezione.)
- Calcolare $\int_A xydxdy$ sull'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < \frac{1+x}{2}\}$.
- Dato l'insieme

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \le x \le 2, \quad y \ge x, \quad x^2 \ge y\}$$

  calcolare

$$\int_A \sqrt{xy}\, dxdy$$

Esercizi di riepilogo vari

1. Data la funzione
$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}},$$
individuarne il dominio naturale. Calcolare i limiti di f agli estremi del dominio, studiare in quali intervalli f è crescente o decrescente. Infine, tracciare un grafico di f compatibile con le informazioni acquisite.

2. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(\sin(x))}{x^2 \sin x - x} \qquad \lim_{x\to \frac{1}{2}-} \frac{x\log(x^2+\frac{1}{2})}{\sin(\frac{1}{2}-x)}.$$

3. Calcolare l'integrale
$$\int_1^2 \log(x^2)dx \qquad \text{e} \qquad \int_1^2 x\sqrt{1+x}\ dx$$

4. Risolvere il problema di Cauchy
$$y' = \sqrt{y}\, e^t, \qquad y(0) = 2.$$

5. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = \exp(xy^2)$ nel punto $(1,-2,f(1,-2))$.

6. Stabilire in quali intervalli è crescente/decrescente la funzione
$$f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

7. Calcolare i limiti
$$\lim_{x\to -\infty} xe^{\frac{1}{x}} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(x^2-x)\cdot\log(1+x)}{x^{5/2}-x^2}$$

8. Calcolare l'integrale
$$\int_a^b x(\sin x + \cos(x^2))dx$$

9. Data la funzione di due variabili $f(x,y) = \cos(\pi + xy)$ e la curva parametrizzata $\gamma(t) = (t,t^3)$, calcolare il prodotto scalare
$$\left\langle \nabla f\left(1,\frac{\pi}{2}\right), \gamma'(1)\right\rangle$$

10. Risolvere il problema di Cauchy
$$y'' - 2y' + 5y = 0 \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

11. Calcolare i limiti
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sin x + x^2e^{-x}}{1+x-\cos x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to -1-} \frac{\log(2+x)-x-1}{(x^2-1)^2\cos(x+1)}$$

12. Dire in quali intervalli è crescente/decrescente la funzione
$$f(x) = e^x + 4e^{-x}.$$

13. Calcolare l'integrale
$$\int_a^b x\Big(\sin(x^2) + (e^x)^2\Big)dx$$

14. È data la funzione $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$ e il punto $P = (1,2)$.

    - Individuare la direzione $v \in \mathbb{R}^2$ di massima crescita e stabilire il valore della derivata $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$ corrispondente a tale direzione.
    - Esistono dei vettori di lunghezza unitaria $w \in \mathbb{R}^2$ per i quali
    $$\frac{\partial f}{\partial w}(P) = 0?$$
    Se sí, individuarli.

15. Risolvere il problema di Cauchy
$$y' = t\sqrt{1+y}, \qquad y(0) = 0.$$

16. Calcolare
$$\int_A x^2 dxdy \qquad \text{con } A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}.$$

17. Calcolare i limiti
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sqrt{1+x^2-2x}}{1+x^2e^{-x}+x} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x^2)-\sin x}{x\cos(x^2)-x^2\cos x}$$

18. Calcolare
$$\int_0^4 (1+\sqrt{x})e^{\sqrt{x}}dx$$

19. Stabilire il dominio della funzione
$$f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
e dire in che intervalli essa è crescente/decrescente.
Ci sono valori di x per cui $f(x) = 0$? Se sí, quali?

20. Dato l'insieme
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 > y > |x|^{1/2}\}$$
calcolare
$$\int_A (x+y)dxdy.$$

21. È assegnata la curva $\gamma(t) = (t, t^3 - t^2)$.
    - Data una funzione arbitraria $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile dappertutto, esprimere in termini delle derivate parziali di f la derivata $\frac{d}{dt}f(\gamma(t))$ ad un tempo $t \in \mathbb{R}$ qualsiasi.
    - Stabilire se ci sono (e, in caso affermativo, trovarli) valori di t per i quali la velocità ha norma unitaria.

Lista degli argomenti di teoria

Nota: l'asterisco accanto a un teorema significa che è stata svolta la dimostrazione (*)

- Definizione di funzione monotona.
- Costruzione/definizione e proprietà della funzione inversa
- Definizione di successione convergente/divergente.
- Teoremi sui limiti: unicità (*), permanenza del segno e due carabinieri (*).
- Limiti di funzioni. Funzioni continue.
- Definizione di derivata.
- Derivate di somme, prodotti (*), quozienti e funzioni composte.
- Punti di massimo/minimo
- Teorema di Fermat (*). Teorema di Weierstrass. Teorema di Rolle (*). Teorema di Lagrange (*).
- Teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti (*) e delle funzioni monotone derivabili (*).
- Introduzione alla nozione di integrale. Enunciato del teorema fondamentale del calcolo e Fromula di Torricelli.
- Definizione di derivata parziale, gradiente per funzioni di due o piú variabili. Definizione di funzione differenziabile e di differenziale. Definizione di piano tangente al grafico di una funzione.
- Definizione di derivata direzionale. Formula del gradiente. Direzione di massima crescita per una funzione di due variabili.
- Nozione di curva, vettore tangente e formula per la derivata lungo una curva.
- Calcolo di alcuni integrali doppi su domini semplici attraverso la formula di riduzione.

Date di ricevimento gennaio

Sarò presente alla sede Navigare:

- Lunedí 15, ore 9.30-11.45
- Venerdí 19, ore 9.30-11.45.

Gli studenti interessati sono comunque pregati di consultare questa pagina nei giorni precedenti a tali date per verificare che non ci siano cambiamenti delle medesime.