Matematica con esercitazioni, Modulo 2.
Analisi matematica. Diario delle lezioni.

Laurea triennale Chimica e tecnologie per l'ambiente e per i materiali. Rimini

Avvertenza per gli studenti: il libro di testo di referimento è M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica 1. Zanichelli. 2 edizione, 2004.

Diario delle lezioni

Lezione 1 – 9 ottobre 2017 (2)

Grafici delle funzioni valore assoluto, le funzioni affini, le funzioni potenze di esponente intero positivo pari e dispari. Funzioni pari e dispari. Funzioni logaritmo ed esponenziale.

Lezione 2 – 12 ottobre (3)

Confronto tra i grafici delle funzioni $f(x), f(x)+k, -f(x), f(-x)$ e $f(x+k)$. Funzioni monotone, funzioni composte. Successioni numeriche. Successioni comvergenti con esempi.

Esercizi

- Risolvere le disequazioni

$$|2x-1| > 1+x, \quad x^2+2x > x+2, \quad (|x|+1)^2 < 4, \quad \frac{x+1}{x-3} < 0$$

- Tracciare, seguendo i procedimenti discussi in classe, i grafici delle funzioni

$$f(x) = (x+2)^2, \quad -x^2+1, \quad -x^3, \quad 1-x^2, \quad 1+|x+1|$$

- Risolvere le disequazioni

$$\log(2x) < 2\log(x-1), \quad ,\log((x-1)(1+x^4+x^6)) < \log(1+x^4+x^6), \quad \log_{10} x < \log_e(x)$$

$$e^{x^3-1} < 2, \quad 10^x < 2^x \cdot e^{x+1},$$

16/10 (2) e 19/10 (3)

Successioni convergenti e divergenti. Proprietà dei limiti: teorema del confronto ($*$) e della permanenza del segno ($*$). Limiti di somme, prodotti e quozienti. Algebra degli infiniti. Punti di accumulazione di un insieme. Limiti di funzioni. Limiti destri e sinistri.

Esercizi

Calcolare evidenziando le potenze piú grandi di n i seguenti limiti

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n-2n^2+1}{1-n},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n^3-n+\sqrt{n}}{n-3n^{7/2}-2}$$

Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+n+\alpha^2n^2}}{1-n^{3/4}}\quad \text{per ogni } \alpha\in\mathbb{R}$$

Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha(\sqrt{1+n^2}-n) \text{ per ogni } \alpha\in\mathbb{R}$$

Calcolare

$$\lim_{x\to0-}\frac{1}{\sin(x)},\quad \lim_{x\to0+}\frac{\log(2+x)-2}{e^x-1}\quad \lim_{x\to-2-}\frac{2+3x}{x+2}$$

(per i limiti precedenti serve capure se le funzioni a denominatore tendono a $0+$ o $0-$).

Mar 23 (2) e ven 26 (3)

Esercizi su limiti destri e sinistri. Funzioni continue Teorema di Weierstrass. Def di punto di massimo/minimo locale e globale. Studio dei limiti notevoli di sin, exp e log.

Esercizi

Calcolare

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{2x-x^2},\qquad \lim_{x\to+\infty}e^{x^2+x}\log(1+e^{-x^2}),\qquad \lim_{x\to0+}\frac{\sin(\sin(x))}{e^x\sin^2x}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{|x|^\alpha\sin(x)}{x-\sin^2x}\quad \text{con } \alpha\in\mathbb{R}.$$

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{1/x},\qquad \lim_{x\to0\pm}(1+\sin x)^{1/x^2}.$$

Per gli ultimi due, usare il fatto che se f e g sono funzioni positive, allora $f(x)^{g(x)}=\exp(\log(f(x)^{g(x)}))$...

Martedí 30

Definizione di derivata. Calcolo con la definizione delle derivate delle funzioni elementari (potenze, esponenziale logaritmo, funzioni circolari ...)

Lunedí 5 e Martedí 6 novembre 2018

Simbooli di Landau (di o piccolo). Derivabilità e approssimazione lineare ($*$). Fomula di Taylor del primo ordine, relativo polinomio e equazione della retta tangente al grafico. per la derivata di una funzione composta ($*$).

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$\frac{d}{dx}\cos(2x),\quad \frac{d}{dx}e^{x^2},\quad \frac{d}{dx}\log(1+3x^2),$$

$$f(x)=a^{x\cos x},\quad (a>0),\quad f(x)=\sin(1+2\cos x),$$

$$f(x)=(x+e^{2x}+x\sin x)^2,\quad f(x)=\frac{1+\sqrt{x}}{1+2x^{3/2}},\quad f(x)=\exp(\sin(x^2)),$$

$$f(x) = x^2 e^{-2x} \sin x.$$

Calcolare le seguenti derivate:

$$f(x) = x^2 \sin x + 2\cos x \qquad f(x) = x^2 (\sin x + 2\cos x) \qquad f(x) = (2x^3 - x)(2x^3 + x)$$

$$f(x) = (-x^2 + x - 1)e^x \qquad f(x) = 4x\sqrt{x} - 5x\sqrt[3]{x} \qquad f(x) = x \log x - x$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{2x^3} \qquad f(x) = \frac{1}{3\log x} \qquad f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{4}$$

$$f(x) = \frac{x + a^x}{x - a^x}, \quad a > 0 \qquad f(x) = \frac{x \log x}{\sqrt{x}} \qquad f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$f(x) = 4\sin(2x) - 3\cos(3x+1) \qquad f(x) = \log(x^2 - 5x + 4) \qquad f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$$

$$f(x) = e^{x^2 - 5x + 4} \qquad f(x) = \sin^3 x + \sin(x^3) \qquad f(x) = \tan(1 + x + 3x^2)$$

$$f(x) = x^4 (2x^2 - 5)^3 \qquad f(x) = (\log x)^2 + 3\log x + 2 \qquad f(x) = x\, 2^{-x^2}$$

$$f(x) = \log\log x \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \qquad f(x) = \sqrt{\frac{4x^2 + 3}{2x - 1}}$$

$$f(x) = \sqrt{\log(x^2 + 1)} \qquad f(x) = \left(\frac{a}{a - x}\right)^2, \quad a > 0 \qquad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0$$

$$f(x) = x^{r-1} e^{-x}, \quad r > 0 \quad f(x) = x^{a-1} (1 - x)^{b-1}, \quad a, b > 0 \quad f(x) = \frac{1}{1 + \exp(-x)},$$

Scrivere il polinomio di Taylor del primo ordine delle seguenti funzioni f nei punti x_0 indicati, assieme all'equazione della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$.

$$f(x) = x\sin(x), \quad x_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{e} \quad x_0 = -\frac{\pi}{4}$$
$$f(x) = \log x - 1 - x\cos x, \quad x_0 = 0, \quad x_0 = \frac{\pi}{6}$$
$$f(x) = e^{x^2 - x}, \quad x_0 = 2$$
$$f(x) = (1 + x)^\alpha, \quad x_0 = 0 \quad \text{e} \quad x_0 = -\frac{1}{2}, \qquad .$$

Venerdí 9 novembre

Teorema di Fermat ($*$), Rolle ($*$) e Lagrange ($*$)

Lunedí 12 novembre, martedí 13, venerdí 16

Teorema di de L'Hopital (($*$) nel caso di $\lim_{x \to a+} f(x)/g(x) = 0/0$). Relativi esercizi. Funzioni crescenti e segno della derivata ($*$). Formula di Taylor del secondo ordine. COndizioni sufficienti del secondo ordine per punti di massimo/minimo.

Esercizi

Seguendo il metodo utilizzato a lezione, tracciare i grafici delle seguenti funzioni nei loro domini naturali

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad f(x) = xe^{-x}, \quad f(x) = \sinh x,$$
$$f(x) = \cosh x, \quad f(x) = x\log(x), \quad f(x) = e^{1/x}., \quad f(x) = e^x + 2e^{-x}.$$

Esercizi

Scrivere la formula di Taylor di ordine 2 per le funzioni $f(x)$ scritte sotto nei punti x_0 e x_1 indicati.

$$f(x) = e^x, \quad x_0 = 0$$
$$f(x) = \arctan x, \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = 1$$
$$f(x) = (1+x)^\alpha, f(x) = \cosh x, f(x) = \log(1+x), \qquad x_0 = 0.$$

Trovare il valore di $p \in \mathbb{R}$ per cui la seguente formula di ordine tre per funzioni con derivata terza continua è corretta

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} + ph^3 + o(h^3).$$

Usare tre volte la regola di de l'Hopital.

19, 20, 21, 22 e 26 novembre

Funzioni convesse derivabili e caratterizzazione in termini di crescita della deerivata prima (∗). Esercizi su f=unzioni convesse. Formula di Tayllor di ordine superiore. Somme di Riemann e definizione di integrale. Primitive. Caratterizzazione delle primitive (∗). Funzioni intgrali. Teorema fondamentele del calcolo. Formula di Torricelli per il calcolo degli integrali definiti (∗). Integrazione per parti (∗). Formula per il cambio di variabile negli integrali (∗).

27, 30 novembre

Equazioni differenziali ordinarie del primo ordine lineari. Equazioni a variabili separabili.

Esercizi

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$y' = t\log t\, y, \qquad y(0) = y_0$$
$$y' = 2ty + t^3 \quad y(0) = 2$$
$$y' + y = e^t \quad y(0) = 1$$
$$t^2y' = y + 2t^3, \qquad y(1) = 2$$

$$y' = \sqrt{1+y}\sin t \quad y(0) = 1$$
$$y'\log y == \frac{\cos t}{y} \quad y(1) = 2$$
$$y' = y^2 t \quad y(0) = 0$$
$$y' = y^2 t \quad y(1) = 1$$
$$y' = (y+1)^2 t \quad y(0) = 1$$
$$e^{t+y}y' = -t, \quad y(1) = 2$$

$$y'' + 4y = 0 \quad \text{con } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.$$
$$9y'' - 6y' + y = 0 \quad \text{con } y(0) = 0 \text{ e } y'(0) = 1.$$
$$y'' + 6y' + 25y = 0 \quad \text{con } y(-1) = 0 \text{ e } y'(-1) = 1.$$
$$y'' - 2y' - 3y = 0, \quad \text{con } y(1) = y_0 \text{ e } y'(1) = v_0.$$
$$y'' = y - y', \quad \text{con } y(0) = -1 \text{ e } y'(0) = 1.$$

7,10,11,12,14 dicembre

- Introduzione alle funzioni di piú variabili. Grafici, insiemi di livello ed esempi relativi.
- Cenni alle funzioni continue. Derivate parziali. Differenziabilità/approssimazione di Taylor del primo ordine. Piano tangente al grafico di una funzione di due variabili.
- Direzione di massima crescita di una funzione differenziabile.
- Cammini parametrizzati, calcolo di velocità e accelerazione.
- Derivata lungo una curva di una funzione scalare. Ortogonalità tra gradiente di una funzione e linee di livello.

Esercizi

Data la funzione $f(x,y) = \sqrt{1+2x^2y}$, scrivere il polinomio di Taylor del primo ordine di f con punto iniziale $(-2,1)$.

Calcolare le derivate parziali delle funzioni

$$f(x,y) = xy^2 + \log(xy), \quad f(x,y) = xe^{-x}, \quad f(x,y) = \sin(x^2+y^2),$$
$$f(x,y) = x^2 + xe^{xy}, \quad f(x,y) = \arctan(x^2+y), \quad f(x,y) = e^{x/y},$$
$$f(x,y) = \frac{x}{1+x^2+y^2},$$
$$f(x,y,z) = \sqrt{1+xyz}, \quad f(x,y,z) = \log\Big(\frac{x}{1+y^2+z^2}\Big)$$

Della funzione $f(x,y,z) = \sqrt{1+xyz}$ scrivere il polinomio di Taylor di grado uno e punto iniziale $(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = (1,-1,2)$.

Calcolare il gradiente $\nabla f(x,y)$ delle funzioni

$$f(x,y) = x^2 + xy, \qquad f(x,y) = xe^{-x^2+y^2}$$

e dire in quali punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vale $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

Calcolare i gradienti $\nabla f(x,y)$ e $\nabla g(x,y)$ delle funzioni

$$f(x,y) = x + y \qquad g(x,y) = e^{xy}.$$

Per quali scelte di (x,y) tali vettori sono paralleli? Per quali scelte sono invece perpendicolari?

Calcolare le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)$ utilizzando la formula del gradiente vista in classe:

$$f(x,y) = \sqrt{1+x^2+xy} \qquad (\overline{x},\overline{y}) = (1,2) \qquad v = (\cos\theta, \sin\theta)$$
$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} \qquad (\overline{x},\overline{y}) = (-1,2) \qquad v = (\cos\theta,\sin\theta) \qquad \text{e } v = \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)$$

Esercizi

- Individuare la direzione di massima crescita $v_{\max}$ per le funzioni $f_1(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ nel punto $P = (1,-2)$ e $f_2(x,y) = \exp(x/y)$ in $P = (-3,1)$. Calcolare po per entrambe i valori della derivata $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$ corrispondenti.
- Calcolare la velocità e l'accelerazione delle curve
$$r(t) = (t^2, t^3 + \log t)$$
$$r(t) = (te^{-t}, t+1, t^3)$$
- Data una funzione qualsiasi $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenziabile, calcolare, usando la formula per la derivata lungo una curva, la derivata della funzione
$$h(t) = f(t^2, t^3)$$
- Facendo l'opportuna generalizzazione della formula appena usata, calcolare le derivate parziali della funzione composta $\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \mapsto f(uv, u^2+v^2)$
$$\frac{\partial}{\partial u} f(uv, u^2+v^2), \frac{\partial}{\partial v} f(uv, u^2+v^2)$$
- Dato l'insieme
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 1 \le x \le 2, \quad y \ge x, \quad x^2 \ge y\}$$
calcolare
$$\int_A \sqrt{xy}\, dxdy$$
- Calcolare l'integrale
$$\int_A y dxdy,$$
sul triangolo $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0, \quad y \ge x \quad \text{e} \quad y \le 1 + \frac{x}{2}\right\}$.
- Calcolare la misura dell'insieme
$$A = \{(x,y) : |x-1| < 1 \quad \text{e} \quad 0 < (x+1)y < 1\}.$$

Modelli di compito

`modelli.pdf`

Lista degli argomenti di teoria

Nota: l'asterisco accanto a un teorema significa che è stata svolta la dimostrazione (*)

- Definizione di funzione monotona.
- Definizione di successione convergente/divergente.
- Teoremi sui limiti: unicità (*), permanenza del segno e del cofronto (*).
- Limiti di funzioni. Funzioni continue.
- Definizione di derivata.
- Derivate di somme, prodotti (*), quozienti e funzioni composte (*).
- Punti di massimo/minimo
- Teorema di Fermat (*). Teorema di Weierstrass. Teorema di Rolle (*). Teorema di Lagrange (*).
- Teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti (*) e delle funzioni monotone derivabili (*).
- Introduzione alla nozione di integrale. Enunciato del teorema fondamentale del calcolo e Formula di Torricelli ($*$).
- Forula di integrazione per parti ($*$) e di cambio variabile ($*$).
- Definizione di derivata parziale, gradiente per funzioni di due o piú variabili. Definizione di funzione differenziabile e di differenziale. Definizione di piano tangente al grafico di una funzione.
- Definizione di derivata direzionale. Formula del gradiente. Direzione di massima crescita per una funzione di due variabili.
- Nozione di curva, vettore tangente e formula per la derivata lungo una curva.
- Calcolo di alcuni integrali doppi su domini semplici attraverso la formula di riduzione.