

Matematica con esercitazioni, Modulo 2.

Analisi matematica. Diario delle lezioni.

Laurea triennale Chimica e tecnologie per l'ambiente e per i materiali. Rimini

Avvertenza per gli studenti: il libro di testo di riferimento è M. Bramanti, C. D. Pagani, S. Salsa, Analisi matematica 1. Zanichelli. 2 edizione, 2004.

Diario delle lezioni

Lezione 1 – 5 novembre 2019 (2)

Richiami sulla notazione per gli insiemi di numeri. Concetto di funzione e relativo vocabolario. EL funzioni affini. pendenza di un segmento.

Grafici delle funzioni affini.

Lezione 2 – 12 novembre (2)

La funzione valore assoluto. Disequazioni $|x - c| < r$ e intorno di un punto. Funzioni pari e dispari. Confronto tra i grafici delle funzioni $f(x), f(x) + k, -f(x), f(-x)$. Introduzione alle funzioni potenza (da finire).

Esercizi. Tracciare usando le considerazioni fatte in classe i grafici delle funzioni $f(x) = 1 - x^2$, $f(x) = -1 + x^3$.

Risolvere le seguenti disequazioni ripassando le tecniche della scuola superiore

$$-2x + 3 > 1, \quad x^2 + x - 6 < 0, \quad x^2 + 2x + 1 \leq 0, \quad \frac{x + 3}{x - 2} < 0.$$

Usando la definizione di valore assoluto risolvere le disequazioni

$$|x| < 2 + \frac{x}{3}, \quad |x - 1| < 2x, \quad \frac{x + 3}{|x| - 1} \geq 0.$$

15 novembre 2019 (3)

Panoramica delle funzioni potenza con vari esponenti. Definizione di funzione monotona. Funzioni esponenziali di base $a > 0$ (grafici e proprietà).

Esercizio: tracciare usando i ragionamenti descritti in classe i grafici delle funzioni

$$f_1(x) = -a^x, \quad f_2(x) = a^x - c, \quad f_3(x) = a^{x-c}, \quad \text{con } a > 1, a < 1, c = 1 \text{ e } c = -1.$$

$$g_1(x) = x^3 - 1, \quad g_2(x) = 2 - (x - 1)^2, \quad g_3(x) = \frac{1}{x + 3}, \quad g_4(x) = \frac{1}{x^2} - 1$$

Martedì 17 novembre (3)

Funzioni esponenziali e logaritmo, in basi arbitrarie. Esercizi vari su disequazioni con esponenziali e logaritmi.

Esercizi per casa. Risolvere usando le tecniche imparate in classe le disequazioni

$$|\log x| > 1 + \log \sqrt{x}, \quad \log(2 - |x|) < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{e^{-x}}{2^{1+x^2}} > \frac{1}{4}e^{-x^2}, \quad a^x < 10^{x^2} \quad \text{al variare di } a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$$

Verificare per quali valori di $a > 0$ la funzione $f : [-a, +\infty[$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0 \\ -x - 1, & \text{se } -a \leq x \leq 0 \end{cases}$$

è iniettiva. Dire anche se esiste qualche scelta di $a > 0$ per cui la funzione è monotona.

Venerdì 22 novembre

Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche. Funzioni composte. Funzione inversa e suo grafico.

Esercizio.

- Data la funzione $f : [1, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$

$$f(x) = 1 + (x - 1)^2,$$

verificare seguendo lo schema applicato in classe che f è biunivoca individuandone nel contempo l'inversa. Fatti i conti, verificare che $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$ sono l'identità su $[1, +\infty[$.

- Esercizio analogo per la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Martedì 26, mercoledì 27 novembre e venerdì 29 (3+3+3)

Angoli, misure di angoli, funzioni circolari sin, cos, tan, arctan, arcsin.

Successioni divergenti, convergenti e oscillanti. Limiti e operazioni algebriche. Teoremi di unicità del limite (*), della permanenza del segno (*) e del confronto (*).

Esercizi

Calcolare evidenziando le potenze più grandi di n i seguenti limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n - 2n^2 + 1}{1 - n}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3 - n + \sqrt{n}}{n - 3n^{7/2} - 2}$$

Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + n + \alpha^2 n^2}}{1 - n^{3/4}} \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}$$

Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha (\sqrt{1 + n^2} - n) \quad \text{per ogni } \alpha \in \mathbb{R}$$

Individuare i punti di accumulazione degli insiemi

$$A = \{1, 2, 5\}, \quad B = \mathbb{N}, \quad C = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad D = \{(-n)^n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Martedì 3 e venerdì 6 dicembre (3+3)

Limite di funzione $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$. Significato e verifiche di alcuni limiti secondo la definizione. Comportamenti al limite di alcune funzioni elementari. Limiti da destra e da sinistra. Limiti notevoli $\frac{\sin x}{x}$, $\lim e^x - 1x$ e $\lim \frac{\log(1+x)}{x}$ e generalizzazioni. Esercizi vari.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^3} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\log(x^{-1})}{x-2} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan x \\ & \lim_{x \rightarrow 0^\pm} e^{1/x} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{1/x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log(\sin^2(x)) \\ & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(\frac{1}{2} + x)}{1 - \cos x} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{bx^2 + x^3} \quad \text{per ogni } b \in \mathbb{R} \\ & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{e^x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{e^x - e^{-1}} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{x^2}}{\sin(x)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x) \\ & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{e^{x^2} - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log(2+x)}{(x-1)\sin(x-1)} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{-x} \\ & \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + \sin(x) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 2e^{-x} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x^2 + \sin(x)) \end{aligned}$$

Lun 9, Mar 10, ven 13 dicembre

Punti di massimo e di minimo, locale e globale. Enunciato del teo di esistenza di punti di massimo/minimo (Weierstrass). Definizione di derivata. Calcolo delle derivate di potenze, funzioni circolari, esponenziali e logaritmi. Legame tra derivabilità e continuità (*). Derivate di prodotti (*) e quozienti. Simboli di o piccolo e loro utilizzo. Polinomio di Taylor del primo ordine di una funzione ed equazione della retta tangente. Formula per il calcolo delle derivate di funzioni composte (*).

Esercizi

Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \cos(2x), \quad \frac{d}{dx} e^{x^2}, \quad \frac{d}{dx} \log(1 + 3x^2), \\ & f(x) = a^{x \cos x}, \quad (a > 0), \quad f(x) = \sin(1 + 2 \cos x), \\ & f(x) = (x + e^{2x} + x \sin x)^2, \quad f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 + 2x^{3/2}}, \quad f(x) = \exp(\sin(x^2)), \\ & f(x) = x^2 e^{-2x} \sin x. \end{aligned}$$

Calcolare le seguenti derivate:

$$f(x) = x^2 \sin x + 2 \cos x \quad f(x) = x^2 (\sin x + 2 \cos x) \quad f(x) = (2x^3 - x) (2x^3 + x)$$

$$f(x) = (-x^2 + x - 1) e^x \quad f(x) = 4x \sqrt{x} - 5x \sqrt[3]{x} \quad f(x) = x \log x - x$$

$$f(x) = \frac{2x-1}{2x^3} \quad f(x) = \frac{1}{3 \log x} \quad f(x) = \frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{4}$$

$$f(x) = \frac{x+a^x}{x-a^x}, \quad a > 0 \quad f(x) = \frac{x \log x}{\sqrt{x}} \quad f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

$$f(x) = 4 \sin(2x) - 3 \cos(3x+1) \quad f(x) = \log(x^2 - 5x + 4) \quad f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$$

$$f(x) = e^{x^2-5x+4} \quad f(x) = \sin^3 x + \sin(x^3) \quad f(x) = \tan(1+x+3x^2)$$

$$f(x) = x^4 (2x^2 - 5)^3 \quad f(x) = (\log x)^2 + 3 \log x + 2 \quad f(x) = x^{2-x^2}$$

$$f(x) = \log \log x \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad f(x) = \sqrt{\frac{4x^2+3}{2x-1}}$$

$$f(x) = \sqrt{\log(x^2+1)} \quad f(x) = \left(\frac{a}{a-x}\right)^2, \quad a > 0 \quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0$$

$$f(x) = x^{r-1} e^{-x}, \quad r > 0 \quad f(x) = x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \quad a, b > 0 \quad f(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)},$$

Lezioni 16,17,18 dicembre (3+3+2)

Punti di massimo/minimo locali e globali per una funzione. Teoremi di Fermat (*), Rolle (*), Lagrange (*). Regola di de l'Hopital (*). Formula per la derivata funzione inversa (esempio arcotangente).

Esercizi

Calcolare i seguenti limiti.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2 + e^{2x}}.$$

Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^{x^2} - 1)}{x \sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{e^x - 1}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{ax^2}, \quad \text{per ogni possibile } a \in \mathbb{R}.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 2 \cos x) e^{1/x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x - x^2}.$$

Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} e^{1/x}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{e^{x^2-4x} - e^{-4}}{x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 12x - 8}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{1/x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log(e^x - e + 1)}{\sin(x - 1)}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1 + e^x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 + 1 - 3x^4}{e^x - e}.$$

Dire in quali intervalli sono crescenti (o decrescenti) le funzioni

$$f(x) = x + \sin x, \quad f(x) = e^{1/x}, \quad x \neq 0;$$

$$f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x - \log(1 + x);$$

Determinare il massimo e il minimo valore assunti dalle funzioni $f : [-1, 3], f(x) = x^3$ e $g : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^{-x^2}$.

È data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x).$$

Stabilire in quali intervalli la funzione è positiva, negativa, crescente, decrescente e determinare i suoi eventuali punti di massimo o di minimo. Tracciare un grafico qualitativo della funzione data che sia compatibile con le informazioni acquisite.

Data la funzione $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x(2-x)}$, dire quali sono i suoi punti di massimo o di minimo. Tracciare un grafico qualitativo di f .

Per le tre funzioni $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = e^x + e^{-x}, \quad f_2(x) = e^{-x^2}, \quad f_3(x) = e^{-x^3},$$

calcolare $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$, dire in quali intervalli esse sono crescenti o decrescenti e tracciarne un grafico qualitativo.

Data la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{1+x}}.$$

stabilirne il dominio naturale, calcolare i limiti agli estremi del dominio e stabilire infine in quali intervalli la funzione è crescente/decescente.

Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4e^{x-2}}{\log(1+x) \sin^2(x-2)} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - xe^x}{e^{2x} - xe^{-x}}$$

Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x \log(x)}{2e^{1/x}} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pi+} \frac{\sin(x) \cos(\frac{x}{3})}{(x-\pi)^b}, \quad \text{per } b = 1 \text{ e } 2.$$

Data la funzione

$$f(x) = xe^{-(x+x^2)},$$

stabilirne il dominio, indicare in quali intervalli è crescente/decescente e calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{e^{x+1}(1 - \cos(2x))} \quad \lim_{x \rightarrow 1-} \log\left(-x + \frac{3}{2}\right) \exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)$$

Sia $A = [0, +\infty[$ e si consideri $f : A \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^{3/2} - 3\sqrt{1+x}.$$

Stabilire in quali sottointervalli di A tale funzione è crescente/decrescente.

Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{xe^x - e^{x^2}}{x^3 + x - 2x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{1/x} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \sin |x^2 - x|}{x^2 - |x|^{3/2}}$$

Dire in che insieme è definita e in che intervalli è crescente la funzione

$$f(x) = \log(\log(x^2 + x - 1))$$

Calcolare il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^{x^2}}{x}$

Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + e^x}{2x^3 + \log(x^2)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \cos x)}{\sin x + x \cos x}$$

Individuare il dominio e dire in quali intervalli è crescente/decrescente la funzione

$$f(x) = e^{x\sqrt{1-x}}.$$

Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \sqrt{x}\right) - 1}{\sin(\sqrt{x - x^2})} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + e^{x^2}}}{2e^x - e^{-x^2}}$$

Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}{1 - 2e^{2/x}} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1) \ln(1 + 3x^2)}{\sqrt{x} - x}$$

Dire dove è definita e in che intervalli è crescente/decrescente la funzione

$$f(x) = (x - 2) \log(2 - x).$$

Calcolare i limiti

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(1 + |x|) + xe^x}{x^2 e^x - 1} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(x^2 + bx)}{(1 + x^2)^{3/2} - 1}, \quad b \in \mathbb{R}$$

Lezioni del 7, 8 gennaio 2020

Somme di Cauchy-Riemann e definizione di integrale $\int_a^b f(x)dx$ per una funzione f continua. Proprietà dell'integrale. Primitive di una funzione. Teorema di caratterizzazione delle primitive (*). Funzione integrale di una funzione continua. Teorema fondamentale del calcolo integrale. Formula di Torricelli (*).

Integrali di derivate di funzioni composte del tipo $\int g'(f(x))f'(x)$.

Esercizi

Calcolare

$$\int \frac{dx}{x \log x}, \quad \int \frac{xdx}{(1-x^2)^2}, \quad \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin^2(x)dx,$$

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin^4 x}, \quad \int \frac{x^2 + x^5}{1 + x^6}, \quad \int_a^b \frac{x^2}{\cos^2(x^3)} dx, \quad \int$$

10 gennaio 2020

Formula di integrazione per parti. Introduzione alle equazioni differenziali ordinarie. Equazioni a variabili separabili.

13 gennaio 2020

Esercizi sulle equazioni a variabili separabili. Equazioni del primo ordine lineari non omogenee. Esercizi. Risolvere le seguenti equazioni:

Esercizi

Risolvere i seguenti problemi di Cauchy

$$y' = t \log t y, \quad y(0) = y_0$$

$$y' = 2ty + t^3 \quad y(0) = 2$$

$$y' + y = e^t \quad y(0) = 1$$

$$t^2 y' = y + 2t^3, \quad y(1) = 2$$

$$y = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

$$y' = \sqrt{1+y} \sin t \quad y(0) = 1$$

$$y' \log y = \frac{\cos t}{y} \quad y(1) = 2$$

$$y' = y^2 t \quad y(0) = 0$$

$$y' = y^3(t+1) \quad y(1) = 2$$

$$y' = (y+1)^2 t \quad y(0) = 1$$

$$e^{t+y} y' = -t, \quad y(1) = 2$$

14, 15, 17 gennaio 2020

Equazioni differenziali del secondo ordine a coefficienti costanti. Curve nello spazio. Velocità e accelerazione. Esercizi sulla formula del cambio di variabile negli integrali. Esercizi di riepilogo sul calcolo dei limiti.

Testi delle ultime prove d'esame

chimica_modelli_18-19.pdf

Ricevimento pre-esame: venerdì 24 mattina, dalle ore 9 alle 11.30, alla sede Teatini (Piazzetta, Teatini, 10, primo piano).

Gli studenti che avessero bisogno di contattare il tutor possono farlo via email.

Lista degli argomenti d'esame

Nota: l'asterisco accanto a un teorema significa che è stata svolta la dimostrazione (*)

- Definizione di funzione monotona.
- Definizione di successione convergente/divergente.
- Teoremi sui limiti: unicità (*), permanenza del segno e del confronto (*).
- Limiti di funzioni. Funzioni continue.
- Definizione di derivata.

- Approssimazione di Taylor del primo ordine di f derivabile (*).
- Derivate di somme, prodotti (*), quozienti e funzioni composte (*).
- Punti di massimo/minimo
- Teorema di Fermat (*). Teorema di Weierstrass. Teorema di Rolle (*). Teorema di Lagrange (*).
- Teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti (*) e delle funzioni monotone derivabili (*).
- Introduzione alla nozione di integrale. Definizione di primitiva. Caratterizzazione delle primitive di una funzione su un intervallo (*). Enunciato del teorema fondamentale del calcolo sulle funzioni integrali. Formula di Torricelli (*).
- Formula di integrazione per parti (*).
- Nozione di curva, velocità e accelerazione.