

MATEMATICA 16 GENNAIO 2013

- Non si possono usare appunti né calcolatrici o dispositivi elettronici.
- Tempo: 2 ore.

1. E' data la funzione

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 5}.$$

Si verifichi che f e' definita per ogni $x \in \mathbb{R}$; si calcolino i limiti di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$; si determinino gli eventuali punti di minimo e massimo relativo per f ; si dia una rappresentazione del grafico di f compatibile con i risultati ottenuti.

2. Si calcolino gli integrali

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 \right) dx, \quad \int_0^1 x \sqrt[3]{1+x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} (e^{2x} - x^2) dx.$$

3. E' data la funzione

$$f :] - 2/3, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2 + 3x}.$$

Si scriva l'approssimazione del I ordine di f vicino al punto $x = 0$ e si verifichi la proprieta' del resto; Si scriva l'approssimazione del II ordine di f vicino al punto $x = 0$.

4. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

5. Risolvere ai minimi quadrati il sistema

$$\begin{cases} -x_1 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

6. Sia $y = (1, 2, 2)$. Calcolare la proiezione del vettore y sul sottospazio unidimensionale $\text{span}\{(1, 0, -1)\}$.

- Non si possono usare appunti né calcolatrici o dispositivi elettronici.
- Tempo: 2 ore.

1. Si determini l'insieme A dei valori di x per i quali è definita la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\log x}.$$

Per ciascuno dei seguenti valori di c si calcoli, se possibile, il limite di $f(x)$ per x che tende a c .

$$c = +\infty, 1, 0, -1.$$

2. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = e^{x^5+2x^4+x^3}.$$

Si calcolino i limiti di $f(x)$ per x che tende a $+\infty$ e $-\infty$; si determinino gli eventuali punti di minimo e massimo locale per f ; si dia una rappresentazione del grafico di f compatibile con i risultati trovati.

3. Si calcolino gli integrali

$$\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^3} dx, \quad \int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx, \quad \int x^2 \log x dx.$$

4. Si consideri il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = p \end{cases}$$

dove p è un numero reale assegnato. Ridurre tale sistema in forma a scala, dire per quali valori di $p \in \mathbb{R}$ esso ha soluzione e, per tali valori, risolverlo.

5. È dato

$$V = \text{span}\{(1, 2, 1), (0, 1, 1)\}.$$

Trovare una base ortonormale di V e scrivere la proiezione su V del vettore $(1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$.

6. Sia

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Risolvere il sistema $Ax = u$ con $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$ vettore arbitrario. Scrivere poi la matrice inversa di A .