

PROVA SCRITTA DI ANALISI (ESERCIZI) CTAM RIMINI  
4 SETTEMBRE 2015

Tempo a disposizione: 2 ore.

1. Dire qual è il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{1+x}},$$

calcolare i limiti agli estremi del dominio, studiare il segno della derivata e tracciare il grafico di  $f$ .

2. Calcolare

$$\int_0^1 x(1 + \sqrt{1+x^2}) dx \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} x \sin(x) dx$$

3. Risolvere il Problema di Cauchy seguente:

$$y'' + y' = 0, \quad \text{con } y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

4. Calcolare il modulo dei seguenti numeri complessi  $z$  e  $w$

$$z = |1 + 2i|^2 - (1 + i)^2 \quad \text{e} \quad w = \frac{i}{1+i}.$$

5. Data la funzione di due variabili

$$f(x, y) = x \log(x + y).$$

individuare i punti critici e classificarli dicendo se sono di massimo, di minimo o di sella.

6. Dato l'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, \text{ e } 0 < y < 1 - x\}$ , calcolare

$$\int_A xy \, dx dy.$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI (ESERCIZI) CTAM RIMINI  
17 LUGLIO 2015

Tempo a disposizione: 2 ore.

1. Dire qual è il dominio della funzione  $f(x) = \sqrt{x+1} - x$ , calcolare i limiti agli estremi del dominio, studiare il segno della derivata e tracciare il grafico di  $f$ .

2. Calcolare

$$\int_1^2 x^2 \log(x) dx \quad \text{e} \quad \int_a^b x \cos(1+x^2) dx.$$

3. Risolvere il Problema di Cauchy seguente:

$$y'' - 2y' + 5y = 0, \quad \text{con } y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

4. Scrivere in forma trigonometrica i numeri

$$z = \frac{1}{2} + i - \frac{i^2}{2} + 2i^3 \quad \text{e} \quad z = (1+i)^3.$$

5. Calcolare la derivata nella direzione unitaria  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  della funzione  $f(x, y) = y \log(1+x^2+y)$  nel punto  $(1, 0)$ .

Esistono scelte di  $(u, v)$  per le quali tale derivata è nulla? Se sí, quali?

6. Dato l'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 1\}$ , calcolare

$$\int_A \sqrt{x} \, dx dy.$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI (ESERCIZI) CTAM RIMINI  
19 GIUGNO 2015

Tempo a disposizione: 2 ore.

1. Dire qual è il dominio della funzione  $f(x) = x - \log(x)$ , calcolare i limiti agli estremi del dominio e stabilire in quali intervalli la funzione è crescente o decrescente. Tracciare infine un grafico approssimato di  $f$ .

2. Calcolare

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx, \quad \int_0^1 x^2 e^{x^3+1} dx$$

3. Risolvere il Problema di Cauchy seguente:

$$y' = y^2 \sqrt{1+t}, \quad \text{con } y(0) = 1.$$

4. Calcolare parte reale e immaginaria dei numeri

$$z = |1+i|^2 - i \quad \text{e} \quad z = i|1+2i| + i^2.$$

5. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico della funzione  $f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2}$  nel punto  $(1, -2, f(1, -2))$ .

6. Dato l'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, \quad y > x^2, \quad y < x\}$ . Calcolare la

$$\int_A y \, dx dy.$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI (ESERCIZI) CTAM RIMINI  
8 APRILE 2015

Tempo a disposizione: 2 ore.

1. Dire qual è il dominio della funzione  $f(x) = x - 2 \log(1+x^2)$  e stabilire in quali intervalli la funzione è crescente o decrescente.

2. Calcolare

$$\int_0^\pi x^2 \sin(x) dx, \quad \int_0^1 x^2 (\sqrt{1+x^3} - 1) dx$$

3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$y' = t + ty^2, \quad y(1) = 1$$

4. Calcolare modulo e argomento dei seguenti numeri complessi:

$$z = (1+i)^4, \quad z = 4i^3, \quad z = |2+i|.$$

5. Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f(x, y) = 2xye^x + y^2$$

e individuare gli eventuali punti critici (stazionari) e, qualora abbiano matrice Hessiana non singolare, classificarli.

6. Dato l'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1 \text{ e } 0 < y < x^2\}$ . Calcolare

$$\int_A (x+y) dx dy.$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI (ESERCIZI) CTAM RIMINI  
13 FEBBRAIO 2015

Tempo a disposizione: 2 ore.

1. Individuare il dominio, gli intervalli di crescita/decrecita e tracciare un grafico approssimativo della funzione

$$f(x) = e^{-x} \sqrt{1+x}$$

2. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \sin(\sqrt{x} - \sqrt{2})}{\log(x-1)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1 - e^x}{\sin(3-x)}$$

3. Calcolare

$$\int (x+1) \log(x^2) dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{1+2x}{1+x^2} dx$$

4. Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di  $f(x, y) = \arctan(x + y^2)$  nel punto di prime coordinate  $(-3, 2)$ .

5. Risolvere il problema di Cauchy

$$y'' - 4y' + 13 = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad y'(0) = v_0 \in \mathbb{R}.$$

6. Calcolare l'integrale

$$\int_A y \sqrt{x+y^2} dx dy$$

dove

$$A = \{(x, y) : 0 < x < 1 \quad \text{e} \quad 0 < y < \sqrt{x}\}.$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI (ESERCIZI) CTAM RIMINI  
30 GENNAIO 2015

Tempo a disposizione: 2 ore.

1. Dire in che insieme è definita e in quali intervalli è crescente/decescente la funzione

$$f(x) = \log(x^2 + 2x - 3).$$

Individuare inoltre (se ci sono) i punti di intersezione del grafico di  $f$  con l'asse  $x$ .

2. Calcolare gli integrali

$$\int_2^3 \frac{x}{(x-1)^2} dx, \quad \int_0^{\pi/4} (x^2 + \tan^2 x) dx$$

3. Risolvere il problema di Cauchy

$$yy' = t\sqrt{1+y^2} \quad \text{prima con } y(0) = 2 \text{ e poi con } y(0) = -1.$$

4. Data la funzione  $f(x, y) = \sqrt{1 + xy^2}$ , stabilire in quale direzione unitaria  $v = (v_1, v_2)$  è massima la derivata

$$\frac{\partial f}{\partial v}(3, 1)$$

e individuare il valore di tale derivata.

5. Individuare e classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = x^2y - ye^{y^2}.$$

6. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{bx} + \log x}{1 + x^2} \quad \text{al variare di } b \in \mathbb{R}.$$