Laboratorio di Matematica. 9 novembre 2011

1. Risolvere i problemi di Cauchy

$$\dot{y} - t - ty = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = 1$$

   e

$$\ddot{y} + 4\dot{y} = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad \dot{y}(0) = 0.$$

2. Determinare i punti critici voncolati per la funzione il problema

$$\begin{cases} \max(x + 2y + z) \\ xyz = 2. \end{cases}$$

3. È data la funzione $f : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x\sqrt{x^2 + y^2 - 1} + y.$$

   Si consideri il punto $(1, 1)$. È possibile applicare il Teorema della funzione implicita per grafici di tipo $y = \phi(x)$? Per grafici di tipo $x = \phi(y)$? Nel caso il teorema sia applicabile calcolare la/le derivata/e della funzione implicita.

4. Individuare i punti critici delle funzione

$$f(x, y) = x^2 + yx^2 - y^2 - y^3$$

   e classificare quelli che hanno matrice Hessiana non singolare.

5. E' data la funzione

$$f(x, y) = \frac{e^{xy}}{1 + e^{xy}}.$$

   Dire in quale direzione unitaria $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$ la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(1, 1)$ assume il valore massimo e calcolare tale valore.

Laboratorio di Matematica. 21 settembre 2011

1. Risolvere i problemi di Cauchy
$$\ddot{y} - 2\dot{y} + 2y = 0 \quad \text{con} \quad y(0) = 1 \quad \text{e} \quad \dot{y}(0) = 1$$
e
$$y\dot{y} = e^{-y^2} t \quad \text{con} \quad y(0) = 1.$$

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,
$$f(x_1, x_2) := x_1 \exp(x_2 x_1^2).$$
Sia $\widetilde{x} = (1, 1)$. Dire in quale direzione di lunghezza unitaria $v = (v_1, v_2)$ la derivata $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1, 1)$ è massima e stabilire tale valore massimo.
Rispondere alla stessa domanda per un punto generico $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$.

3. Sia
$$f(x, y) = x + \log(1 + x^2 + y^2)$$
e si fissi il punto $P = (0, 0)$. Dire se nel punto P sono soddisfatte le ipotesi del Teorema della funzione implicita per grafico di tipo $x = \phi(y)$. Se la risposta e' positiva, calcolare la derivata della funzione implicita. Rispondere alla stessa domanda per grafici di tipo $y = \phi(x)$.

4. Calcolare i punti critici vincolati del problema
$$\begin{cases} \max(xy + z^2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

5. Individuare e classificare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \frac{xy + 1 + y}{1 + x^2}.$$

Laboratorio di Matematica, 30 marzo 2011

1. Si consideri la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$F(x, y) = xye^{x+y^2}.$$
Fissato il punto $(1, 2)$, si dica se sono soddisfatte le ipotesi del Teorema della funzione implicita per scrivere la funzione come grafico di tipo $y = \phi(x)$. Se sí, dire quanto vale la derivata di ϕ in 1.

2. Si trovino i punti critici vincolati per il problema
$$\begin{cases} \min(x + 2y) \qquad \text{con vincolo} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

3. Risolvere i problemi di Cauchy
$$\dot{y} = t(1 + y) \quad y(0) = 0$$
e
$$\ddot{y} + 4y = 0 \qquad y(0) = 0 \quad \dot{y}(0) = 1.$$
Controllare esplicitamente al termine dell'esercizio che le soluzioni trovate sono soluzioni dei corrispondenti problemi di Cauchy.

4. Individuare i punti critici della funzione
$$f(x, y) = (x - 1)e^{-(x^2+y^2+2y)}.$$

Laboratorio di Matematica, 9 gennaio 2011

1. Risolvere i problemi di Cauchy

$$\ddot{y} - 6\dot{y} + 13y = 0, \qquad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{y}(0) = 1$$

e

$$y\dot{y} = \sqrt{1 + y^2}, \qquad y(0) = 1.$$

2. Classificare i punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \frac{x}{1 + x^2 + y^2}.$$

3. Si consideri il problema di ottimizzazione vincolata

$$\begin{cases} \max(x^2 + 3y) & \text{con vincolo} \\ x^2 + y^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

Dire se il vincolo e' regolare e trovare i punti critici vincolati.

4. Data la funzione di due variabili

$$F(x, y) = \frac{x + y}{x + y^2},$$

definita su $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y^2 \neq 0\}$, si consideri il punto $(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = (1, 1)$. Verificare se sono soddisfatte le ipotesi del teorema della funzione implicita che permettono di scrivere localmente l'insieme di livello 1 come grafico di tipo $y = \phi(x)$. In caso affermativo determinare il valore di $\phi'(1)$. Si risponda alla stessa domanda scambiando le variabili x e y.

Laboratorio di Matematica, 26 gennaio 2011

1. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy + 1 > 0\}$. Si consideri la funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$,

$$F(x, y) = x \log(xy + 1) + y.$$

   Calcolare le derivate parziali di F e verificare se, nel punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$, per l'insieme $\{(x, y) \in \Omega : F(x, y) = 0\}$ sono soddisfatte le ipotesi del teorema della funzione implicita rispetto alla variabile x oppure y. In caso affermativo, scrivere la derivata della/e funzione implicita/e (o delle) funzione implicita corrispondente/i nel punto x_0 o y_0.

2. Individuare i punti critici vincolati del problema (nelle variabili (x, y, z))

$$\begin{cases} \min(xy + z^2 - 2z) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

3. Risolvere i problemi di Cauchy

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 3y = 0 \qquad \text{con} \quad y(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{y}(0) = 1.$$

$$\dot{y} = \frac{t}{1 + 2y} \qquad \text{con} \quad y(1) = 1.$$

4. Sia $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$. Individuare i punti critici della funzione $F : \Omega \to \mathbb{R}$

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + x^{-2}y^{-2}$$

   e classificarli.