Laboratorio di matematica. Esercizi dicembre 2009.

1. Trovare i punti critici vincolati per il problema

$$\begin{cases} \max xy^2, \\ x+y=4. \end{cases}$$

   Calcolare l'hessiano orlato $H(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\mu})$ e, qualora sia diverso da zero dire se i punti sono di massimo o di minimo.

2. Si consideri il problema di ottimizzazione vincolata

$$\begin{cases} \max(y+z^2), & \text{con vincolo} \\ x^2+y^2+2z=0. \end{cases}$$

   Si verifichi che il vincolo e' regolare. Si dica quale tra i punti $P=(0,-1,-\frac{1}{2})$ e $Q=(0,0,0)$ è un punto critico vincolato per il problema.

3. Si consideri la funzione $F:(0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definita da

$$F(x,y)=y(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}).$$

   Si dica se sono soddisfatte le ipotesi che permettono di scrivere attorno al punto $(1,-1)$ l'insieme di livello $\{(x,y):F(x,y)=F(1,-1)\}$ come grafico del tipo $x=\phi(y)$. Quanto vale in tal caso $\phi'(-1)$? Si scriva poi esplicitamente tale insieme di livello come grafico di tipo $y=\psi(x)$.

4. Si consideri il problema vincolato

$$\begin{cases} \max(x+xy), & \text{con vincolo} \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

   Dire quale dei seguenti quattro punti e' un punto critico vincolato per il problema: $P=(0,1)$, $Q=(0,-1)$, $R=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$ ed $S=(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$.

   Calcolare poi nei punti critici trovati l'Hessiano orlato $\tilde{H}$ e stabilire quando possibile se si tratta di punti di massimo o di minimo.

5. Individuare i punto critici vincolati per il problema in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \max xyz & \text{con vincolo} \\ xz+y=1. \end{cases}$$

6. Si risolvano i seguenti problemi alle condizioni iniziali.

   $\dot{y}=y^2\left(\frac{t}{2}+1\right), \qquad y(1)=-\frac{1}{4};$

   $\ddot{y}+4y=0, \qquad y(0)=1,\ \dot{y}(0)=4,$

   $\ddot{y}-2\dot{y}+y=0, \qquad y(0)=2,\ \dot{y}(0)=1.$

7. È data la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x^2 + e^{x+y^2}$. Verificare se sono soddisfatte le ipotesi che permettono di affermare che, localmente attorno a $(0,0)$, l'insieme di livello 1 di F si può scrivere come grafico del tipo $x = \phi(y)$. In caso affermativo calcolare la derivata $\phi'(0)$. Rispondere alla stessa domanda scambiando le variabili x ed y.

8. Si dia, in funzione del parametro reale positivo k, la soluzione generale dell'equazione differenziale
$$\ddot{y} + 2\dot{y} + ky = 0.$$
Posto $k = 3/4$, si dia la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 6$, $\dot{y}(0) = -5$.

9. Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy.
$$\dot{y} = y^2 e^{-t} \qquad\qquad y(0) = \frac{1}{2}$$
$$\dot{y} = \frac{2t+1}{2y} \qquad\qquad y(0) = 1$$

10. Data $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = y^3 - x$, dire a quale curva di livello appartiene il punto $(1,0)$. Fare una figura che rappresenti tale curva. Verificare infine che data la funzione $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
$$\phi(x) = (x-1)\,|x-1|^{-2/3},$$
essa soddisfa $F(x, \phi(x)) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quanto vale $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$? Si può applicare il teorema della funzione implicita nel punto $(0,0)$?