Laboratorio di Matematica. 12 luglio 2010

1. Individuare e classificare i punti critici liberi per $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = yx^2 + 2xy + (1 - \exp(-y^2/2))y.$$

2. Determinare i punti critici per il problema vincolato

$$\begin{cases} \min(2y - x) \qquad \text{con vincolo} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

3. Risolvere i problemi di Cauchy

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0$$

e

$$\dot{y} + t^2 y = 0, \qquad y(0) = 1.$$

4. E' data la funzione $F : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$F(x_1, x_2) = \exp(x_1^2 \sqrt{x_2}).$$

Verificare che nel punto $(1, 1)$ l'insieme di livello

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) : F(x_1, x_2) = F(1, 1)\}$$

si puo' scrivere localmente attorno a $(1, 1)$ come grafico C^1 del tipo $x_2 = \phi(x_1)$. Calcolare poi il valore di $\phi'(1)$.

LABORATORIO DI MATEMATICA, PROVA SCRITTA. 9 GIUGNO 2010

1. Dato il problema:
$$\begin{cases} \min(x^2+y^2+e^{z^2}), \\ \text{con vincolo} \quad z^2-x^4-y^4=1 \end{cases}$$
e assegnati i punti $P=(1,0,\sqrt{2})$, $Q=(0,1,\sqrt{2})$ e $R=(0,0,1)$, stabilire quale/quali tra essi è/sono critici vincolati. Individuare poi i pertinenti moltiplicatori.

2. Data $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x_1,x_2)=x_1^3+3x_2^2$, stabilire in ogni punto fissato $\widetilde{x}=(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2)\in\mathbb{R}^2$ il valore della derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(\widetilde{x})$ per ogni possibile direzione $v\in\mathbb{R}^2$ di norma unitaria.

   Fissato poi il punto $\widetilde{x}=(1,1)$, dire per quale direzione v tale derivata e' massima e qual è tale valore massimo.

3. Data la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,
$$f(x,y)=x(y^2-e^{-x^2}),$$
individuarne i punti critici e classificarli.

4. Risolvere i problemi di Cauchy
$$\dot{y}=e^{2y}, \qquad y(0)=1$$
e
$$\ddot{y}+2\dot{y}=0, \qquad y(0)=0 \quad \text{e} \quad \dot{y}(0)=1.$$

5. Data la funzione $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,
$$F(x_1,x_2)=x_1x_2e^{x_1x_2^2}$$
si consideri il punto $(1,1)$. Verificare se sono soddisfatte le ipotesi del Teorema della funzione implicita che permettono di scrivere localmente l'insieme di livello $\{x : F(x)=F(1,1)\}$ come grafico del tipo $x_1=\phi(x_2)$. In caso affermativo, calcolare il valore della derivata $\phi'(1)$.

1. Si determinino i massimi/minimi locali della funzione
$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\qquad f(x,y)=x(3x^2+y^2-1).$$

2. Si scriva l'approssimazione di Taylor del II ordine della funzione
$$f:A\to\mathbb{R},\qquad f(x,y)=\log(y-x^2),\quad A=\{(x,y):\ y>x^2\},$$
nelle vicinanze del punto $(1,2)$.

3. Sono date le funzioni
$$g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^2,\qquad g(t)=\left(\frac{t^2+1}{2t},\frac{t^2-1}{2t}\right)$$
$$f:A\to\mathbb{R},\qquad f(x,y)=\frac{1}{xy},$$
dove $A=\{(x,y):\ xy\neq 0\}$. Si determini la derivata
$$(f\circ g)'(2)$$
della funzione composta $f\circ g$ in 2.

4. Si consideri il problema di ottimizzazione
$$\max(y-x^2)\quad\text{con vincolo}\qquad x^4+y^2=1$$
Si verifichi che il vincolo e' regolare e si individuino i punti critici vincolati.

5. Si risolvano i problemi di Cauchy
$$\dot y=e^{-y}t,\quad\text{con}\quad y(0)=0$$
e
$$\ddot y-4\dot y-5y=0,\quad\text{con}\quad y(0)=0\quad\text{e}\quad \dot y(0)=1.$$

6. E' data la funzione $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $G(x,y)=x^4+y^7+y$. Si consideri l'insieme di livello $G^{-1}(3)$. Si verifichi vicino al punto $(1,1)\in G^{-1}(3)$ e' possibile scrivere l'insieme come grafico del tipo $y=\phi(x)$. Si calcoli infine $\phi'(1)$.

7. E' data la funzione $f(x_1,x_2)=(x_1+x_2)e^{2x_2}$. Calcolare per ogni punto $(\tilde x_1,\tilde x_2)\in\mathbb{R}^2$ e per ogni vettore $v=(v_1,v_2)$, la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial v}(\tilde x_1,\tilde x_2)$. Si scelga poi $\tilde x=(1,1)$ e si dica per quale v di norma unitaria la derivata è massima.

8. Si consideri il problema di ottimizzazione vincolata
$$\begin{cases}\max(y+z^2), & \text{con vincolo}\\ x^2+y^2+2z=0.\end{cases}$$
Si dica quale tra i punti $P=(0,-1,-\frac{1}{2})$ e $Q=(0,0,0)$ è un punto critico vincolato per il problema.

9. Si consideri la funzione $F : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$F(x, y) = y(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}).$$

Si dica se attorno al punto $(1, -1)$ è possibile scrivere l'insieme di livello $\{(x, y) : F(x, y) = F(1, -1)\}$ come grafico del tipo $x = \phi(y)$. Quanto vale in tal caso $\phi'(-1)$?

10. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} \max(z + y^2) \\ x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Verificare che la varietà vincolo

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \quad x + z = 0\}$$

e' regolare di classe C^1. Scrivere la lagrangiana del problema e idividuare i punti critici vincolati del problema.